

DOI: 10.11779/CJGE201902012

饱和-非饱和渗流的数值流形法研究与应用

陈远强^{1, 2}, 杨永涛^{*1}, 郑 宏^{1, 3}, 李 伟^{1, 2}, 林 珊^{1, 2}

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071; 2. 中国科学院大学, 北京 100049;
3. 北京工业大学建筑工程学院, 北京 100124)

摘 要: 非饱和渗流问题涉及岩土、水利和环境等众多领域, 合理有效地模拟非饱和渗流过程具有重要意义。基于数值流形方法 (numerical manifold method, NMM) 的覆盖思想, 建立了非饱和渗流 Richards 方程的 NMM 离散格式, 相比于有限元方法 (finite element method, FEM), NMM 的前处理更为灵活, 对复杂边界具有更强的适应性。欠松弛技术和集中质量矩阵的引入, 有效抑制了求解过程中的数值震荡现象。通过对一维和二维非饱和渗流算例的模拟, 验证了算法的有效性与可靠性。

关键词: 非饱和渗流; Richards 方程; 数值流形方法; 集中质量矩阵; 数值震荡

中图分类号: TV139.14 文献标识码: A 文章编号: 1000 - 4548(2019)02 - 0338 - 10

作者简介: 陈远强(1990 -), 男, 博士研究生, 主要从事计算岩土力学方面的研究工作。E-mail: whytscyq@163.com。

Saturated-unsaturated seepage by numerical manifold method

CHEN Yuan-qiang^{1, 2}, YANG Yong-tao¹, ZHENG Hong^{1, 3}, LI Wei^{1, 2}, LIN Shan^{1, 2}

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 2. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: The unsaturated seepage problem involves many fields, such as geotechnical engineering, hydraulic engineering and environmental engineering. So it is of great significance to simulate the unsaturated flow reasonably and effectively. Based on the cover system of numerical manifold method (NMM), a NMM discrete form is established to solve the Richards equation for the unsaturated flow. Compared with finite element method (FEM), NMM is more flexible in the preprocessing, and more adaptable to complex boundary conditions. By introducing the under-relaxation technique and the lumped mass matrix, the numerical oscillation is eliminated. Through the simulations of 1D and 2D unsaturated seepage problems, the validity and reliability of the proposed algorithm are verified.

Key words: unsaturated seepage flow; Richards equation; numerical manifold method; lumped mass matrix; numerical oscillation

0 引 言

岩土工程、水利工程和环境工程等领域均涉及饱和-非饱和渗流分析, 如降雨情况下的边坡稳定, 库水变化时的土坝渗流, 农田灌溉排水和水土流失等。Richards 方程是非饱和渗流理论的基础方程, 对非饱和状态下多孔介质中水分的运动规律进行了描述, 因此, 开展 Richard 方程的数值求解方法研究, 准确有效地模拟和分析非饱和渗流过程, 具有重要的现实意义。

目前, 最为常用的饱和-非饱和渗流数值分析方法是有限差分法 (finite difference method, FDM) 和有限单元法, 大量的国内外学者对其进行了深入研究。Rubin^[1]应用 FDM 研究了二维非饱和土中的非稳定渗

流问题; Freeze^[2]建立了饱和-非饱和瞬态流的三维 FDM 模型; 雷光耀等^[3]应用全隐式交替方向迭代法的差分格式对水位骤变时的饱和-非饱和渗流问题进行了求解; 曹渊等^[4]建立了以总水头表示的饱和-非饱和渗流三维模型, 通过选取合适的有限差分格式, 避开了求解时的数值震荡和弥散问题; Neuman^[5]最早将有限单元法应用于求解饱和-非饱和渗流问题, 采用 Galerkin 法对 Richards 方程进行空间离散, 用有限差分格式对时间域进行离散, 模拟了二维土坝的渗流问

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11172313, 11572009, 51538001, 51609240); 国家重点基础研究计划 (“973”计划) 项目 (2014CB047100)

收稿日期: 2018 - 01 - 12

*通讯作者 (E-mail: scuhhc@126.com)

题; 赤井浩一等^[6]进行了非饱和砂槽模型试验, 并采用 Neuman 的数学模型和有限元算式对其进行了数值验证; 张家发^[7]建立了三维饱和-非饱和非稳定渗流场有限元模型, 并编制了相应计算程序; Dou 等^[8]将 Bathe 算法与 Signorini 条件联合使用, 并结合欠松弛处理方法, 在常规材料非线性有限元框架范围内求解了非稳定流和非饱和流问题。此外, 陈锐等^[9]基于无网格节点自适应的思想, 提出了非饱和渗流分析节点自适应准则; 陈佩佩等^[10]将光滑粒子法引入到基质吸力水头形式 Richards 方程的求解中, 获得了具有质量守恒特性的数值解。在数值求解过程中, 由于土-水特征曲线和渗透系数函数具有强烈的非线性, 经常会出现湿润锋附近的数值震荡、计算不收敛和计算精度差等现象, 对此, 研究人员也开展了相关研究。Celia 等^[11]对质量矩阵进行了集中化处理, 能够有效地消除湿润锋附近的数值震荡; 吴梦喜等^[12]对饱和度计算公式进行修正, 以消除数值弥散现象; Karthikeyan 等^[13]提出, 当网格尺寸与时间步长之间满足一定比例关系时, 数值震荡得到有效控制, 但计算成本大大增加; Tan 等^[14]、Phoon 等^[15]和陈曦等^[16]在迭代求解过程中采用欠松弛技术对渗透系数和容水度进行修正, 并通过数值试验验证其有效性; 李文涛等^[17]结合有限元提出了一种自适应松弛 Picard 法, 并通过一维和二维算例验证了其有效性。

Shi^[18]提出的数值流形方法 (NMM), 以拓扑流形和微分流形为基础, 采用数学和物理两套覆盖系统, 实现了对连续和非连续问题的统一求解。数学覆盖一般采用有限元网格, 物理覆盖是通过物理区域对数学覆盖的再切割而生成。数学覆盖无需与计算区域保持一致, 只需计算区域完全覆盖住, 因此前处理相对更为简便。将定义在物理覆盖上的覆盖函数通过定义在数学覆盖上的权函数联结起来形成计算域上的总体覆盖函数, 能够很好地模拟不连续问题。目前, NMM 已被用于渗流分析中, 如姜清辉等^[19]提出了求解有自由面渗流问题的三维 NMM; Wang 等^[20]、Hu 等^[21-22]基于 NMM 研究了无压渗流、非均质渗流和裂隙流等问题; Ma 等^[23]基于 NMM 模拟了裂隙网络的两相流问题。然而, NMM 尚未发现被应用于饱和-非饱和和渗流问题的分析之中, 鉴于此, 本文尝试将 NMM 引入饱和-非饱和非稳定渗流问题的求解中, 建立了非饱和和渗流 Richards 方程的 NMM 离散格式, 并通过 Matlab 编程实现其数值计算过程, 数值试验验证了方法的有效性和可靠性, 为非饱和和渗流问题的数值模拟提供了一个新的思路。

1 饱和-非饱和和渗流的控制方程及离散格式

1.1 基本控制方程及边界条件

忽略水的压缩性, 并假定材料为各向同性, 则描述二维饱和-非饱和和渗流问题的 Richards 方程可表示如下:

$$\nabla \cdot [k_s k_r \nabla H] = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1)$$

式中 H 为总水头, 是压力水头 h 与位置水头 y 的和; k_s 为饱和渗透系数; k_r 为相对渗透系数, 在饱和区, $k_r=1$, 在非饱和区, 可表示成压力水头 h 的函数, 且 $0 < k_r < 1$; ∇ 为梯度算子; t 为时间; $\theta = ns$ 为体积含水率 (n 为孔隙率, s 为饱和度), 在饱和区, 饱和度 $s=1$, 体积含水率等于孔隙度, 在非饱和区, $\frac{\partial \theta}{\partial t} = n \frac{\partial s}{\partial t} + s \frac{\partial n}{\partial t}$, 若不考虑介质骨架变形对渗流的影响, 则 $\frac{\partial \theta}{\partial t} = n \frac{\partial s}{\partial h} \frac{\partial H}{\partial t}$ 。令 $C = n \frac{\partial s}{\partial h} = \frac{\partial \theta}{\partial h}$ (C 为容水度), 则式 (1) 可重新表示为

$$\nabla \cdot [k_s k_r \nabla H] = C \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2)$$

饱和-非饱和和渗流问题的定解条件分为初始条件和边界条件, 具体形式如下:

(1) 初始条件

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y, t_0) \quad (\text{在 } \Omega \text{ 内}) \quad (3)$$

(2) 边界条件

a) 水头边界 (本质边界) 条件 Γ_H

$$H(x, y, t) = \bar{H}(x, y, t) \quad (\text{在 } \Gamma_H \text{ 上}) \quad (4a)$$

b) 流量边界 (自然边界) 条件 Γ_q

$$-k_s k_r \nabla H(x, y, t) \cdot \mathbf{n} = \bar{q}(x, y, t) \quad (\text{在 } \Gamma_q \text{ 上}) \quad (4b)$$

c) 溢出面边界条件 Γ_s

$$H(x, y, t) = y \quad (\text{在 } \Gamma_s \text{ 上}) \quad (4c)$$

d) 材料边界条件 Γ_m

$$\begin{aligned} H^+(x, y, t) &= H^-(x, y, t) - k_s^+ k_r^+ \nabla H^+(x, y, t) \cdot \mathbf{n} \\ &= -k_s^- k_r^- \nabla H^-(x, y, t) \cdot \mathbf{n} \quad (\text{在 } \Gamma_m \text{ 上}) \end{aligned} \quad (4d)$$

式 (3)、(4a) ~ (4d) 中 t_0 为初始时刻; H_0 为初始时刻水头值; \bar{H} 为已知水头边界值; \bar{q} 为已知流量边界值; y 表示计算点的垂直坐标分量; \mathbf{n} 为边界单位外法线向量; 上标 “+” 和 “-” 表示该量分属材料边界 Γ_m 附近两侧; Ω 为渗流计算区域。

1.2 NMM 简介

NMM 包含两套独立的覆盖系统: 数学覆盖和物理覆盖。数学覆盖由一系列单连通区域构成, 每个单连通区域称之为一个数学片。数学覆盖无需与计算区域重合, 只需将计算区域完全覆盖即可。每个数学片

经各种物理边界（如计算域边界，材料界面和结构面等）切割并舍弃位于计算区域之外的部分，就生成相应的物理片。所有物理片的并集就构成物理覆盖，而相应物理片之间相互切割就形成流形单元。

图1为NMM离散过程示意图。图中，计算域 Ω 由两个不同的材料域 Ω_1 和 Ω_2 构成，即 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ，采用两个正六边形的数学片（分别记为 MP_1 、 MP_2 ）去覆盖整个计算域。 MP_1 和 Ω 相互切割，生成两个物理片： PP_{1-1} 和 PP_{2-1} ；同样， MP_2 和 Ω 相互切割，也生成两个物理片： PP_{1-2} 和 PP_{2-2} 。4个物理片相互切割，就生成了6个流形单元： E_1, E_2, \dots, E_6 （ E_1 源于 PP_{1-1} ， E_2 源于 PP_{1-1} 和 PP_{1-2} ， E_3 源于 PP_{1-2} ， E_4 源于 PP_{1-2} ， E_5 源于 PP_{1-2} 和 PP_{2-2} ， E_6 源于 PP_{2-2} ）。

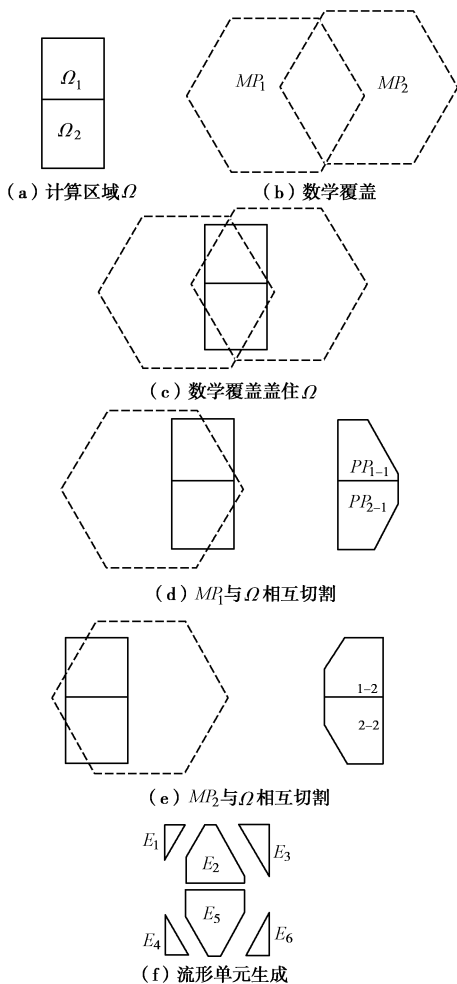


图1 NMM离散示意图

Fig. 1 Illustration of dissociation of NMM

基于上述概念，对渗流问题，任一流形单元上的渗流场近似函数可表示为

$$H^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N^p} w_i(\mathbf{x}) H_i(\mathbf{x}) \quad (5)$$

式中 \mathbf{x} 表示位置向量； N^p 为组成流形单元的物理片

的个数； $w_i(\mathbf{x})$ 为第 i 个物理片所对应的权函数，也叫单位分解函数，与生成该物理片的数学片上的权函数一致； $H_i(\mathbf{x})$ 为定义在第 i 个物理片上的覆盖函数，可表示为

$$H_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i \quad (6)$$

其中， \mathbf{d}_i 为定义在第 i 个物理片上的广义自由度， $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 为多项式基函数，可以为零阶、一阶和二阶等，其相应的数学表达式为 $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1\}^T$ ， $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y\}^T$ 和 $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1, x, y, xx, xy, yy\}^T$ ，本文采用的是零阶基函数。

本文采用三角形网格形成的数学覆盖去覆盖整个计算区域，故而每个流形单元被3个相应物理片所覆盖，因此渗流场近似函数可重写为

$$H^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (7)$$

式中， \mathbf{N} 为形函数矩阵， $\mathbf{N} = [N_1, N_2, N_3]$ ，其中， $N_i = w_i \mathbf{p}^T$ ， \mathbf{d} 为广义自由度向量， $\mathbf{d} = [d_1, d_2, d_3]^T$ 。

1.3 离散控制方程

根据式(2)和边界条件式(4a)~(4d)得到如下泛函形式：

$$\Pi(H) = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{2} k_s k_r \nabla H \cdot \nabla H + CH \frac{\partial H}{\partial t} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{q} H d\Gamma \quad (8)$$

NMM 采用规则网格形成数学覆盖，允许网格与求解域边界及材料界面不匹配，因此，NMM 中本质边界条件和界面连续性条件无法像有限单元法一样直接施加。在 NMM 中，可以采用 Lagrange 乘法或者罚函数法来施加本质边界条件和界面连续性条件。本文采用的是罚函数法，相应的修正泛函表示为

$$\Pi^*(H) = \Pi(H) + \int_{\Gamma_H + \Gamma_s} \frac{1}{2} k_p \|H - \bar{H}\|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_m} \frac{1}{2} k_p \|H^+ - H^-\|^2 d\Gamma \quad (9)$$

式中， k_p 为罚因子，对溢出面边界 Γ_s ， $\bar{H} = y$ 。

令 $\delta \Pi^* = 0$ ，可得求解饱和-非饱和非稳定渗流问题的总体方程为

$$\mathbf{K} \{H\} + \mathbf{E} \left\{ \frac{\partial H}{\partial t} \right\} = \mathbf{Q} \quad (10)$$

式中 \mathbf{K} 为总渗透矩阵； \mathbf{E} 为时间矩阵，也称为质量矩阵； \mathbf{Q} 为广义节点流量列阵； $\{H\}$ 为广义自由度列阵； $\left\{ \frac{\partial H}{\partial t} \right\}$ 为广义自由度对时间的导数列阵。 \mathbf{K} ， \mathbf{E}

和 \mathbf{Q} 分别由相应的单元矩阵叠加而得，其在相应单元上可表示为

$$\mathbf{K}^e = \iint_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_{\bar{H}} + \Gamma_s^e} k_p \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma +$$

$$\int_{\Gamma_m^e} k_p (N^+ - N^-)^T (N^+ - N^-) d\Gamma \quad , \quad (11)$$

$$\mathbf{E}^e = \iint_{\Omega^e} \mathbf{C} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad , \quad (12)$$

$$\mathbf{Q}^e = \int_{\Gamma_q^e} \mathbf{N}^T \bar{q} d\Gamma + \int_{\Gamma_H^e + \Gamma_s^e} k_p \mathbf{N}^T \bar{H} d\Gamma \quad , \quad (13)$$

式中, $\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}$, $\mathbf{L} = [\partial/\partial x, \partial/\partial y]^T$, \mathbf{k} 为渗透系数矩阵。

对时间域采用差分法进行离散化处理, 可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{H_{n+1} - H_n}{\Delta t} \quad , \\ H &= \alpha H_{n+1} + (1 - \alpha) H_n \quad . \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (10), 可得流形元迭代格式如下:

$$\left(\alpha \mathbf{K} + \frac{\mathbf{E}}{\Delta t} \right) \{ H_{n+1} \} = \left[\frac{\mathbf{E}}{\Delta t} - (1 - \alpha) \mathbf{K} \right] \{ H_n \} + \mathbf{Q} \quad . \quad (15)$$

式中 n 为时间步数; Δt 为时间步长; α 为权重参数, $0 \leq \alpha \leq 1$ 。当 α 取为 0, 1/2, 2/3 和 1 时, 分别对应向前差分、中心差分、Galerkin 差分和向后差分公式。目前, 对时间域的离散多采用欧拉向后差分公式, 即 $\alpha = 1$, 本文亦是如此。

1.4 非线性迭代方法

非饱和区介质的渗透系数和土-水特征曲线具有强烈的非线性, 对控制方程进行空间和时间离散后, 需要采用非线性迭代方法来求解每一时间步所对应的方程。本文采用 Picard 迭代法进行迭代求解。

对式 (15), 取 $\alpha = 1$, 并引入 Picard 迭代, 则有如下的迭代计算格式:

$$\left(\mathbf{K}_{n+1,m} + \frac{\mathbf{E}_{n+1,m}}{\Delta t} \right) \{ H_{n+1,m+1} \} = \frac{\mathbf{E}_{n+1,m}}{\Delta t} \{ H_n \} + \mathbf{Q}_{n+1,m} \quad . \quad (16)$$

式中 m 表示迭代步数; $\{ H_{n+1,m+1} \}$ 表示第 $n+1$ 个时间步中第 $m+1$ 个迭代步的广义自由度列阵; 矩阵 $\mathbf{K}_{n+1,m}$, $\mathbf{E}_{n+1,m}$ 和列阵 $\mathbf{Q}_{n+1,m}$ 需根据 $\{ H_{n+1,m} \}$ 计算得出, 但实际计算中, 往往会采用一些欠松弛方法以抑制解的震荡, 具体方法见 3.1 节。

迭代收敛条件为

$$\| H_{n+1,m+1} - H_{n+1,m} \| \leq \varepsilon \quad , \quad (17)$$

式中, ε 为给定的容差, 本文取为 1×10^{-4} 。当收敛条件满足时, 令 $\{ H_{n+1} \} = \{ H_{n+1,m+1} \}$, 即可进入下一时间步的计算。

1.5 域积分方案

本文采用数值积分方法计算式 (11) ~ (13) 中的相关域积分。在 NMM 中, 流形单元可以为任意形状, 故而可以先将流形单元分解成若干个子三角形, 然后对每个子三角形采用 Gauss 积分, 最终将每个子三角形的计算结果集成到相应流形单元上。图 2 为流形单元分解成子三角形示意图。

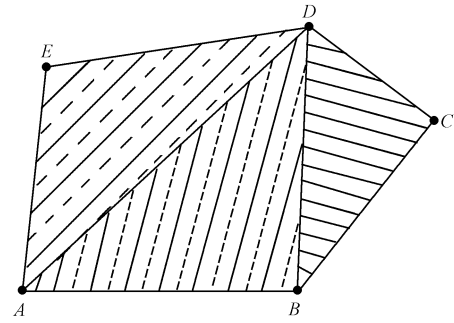


图 2 流形单元分解成子三角形

Fig. 2 Manifold element divided into triangles

2 模拟计算中的几个问题

2.1 计算参数的处理

在对式 (16) 进行迭代求解, 更新 $\mathbf{K}_{n+1,m}$, $\mathbf{E}_{n+1,m}$ 和 $\mathbf{Q}_{n+1,m}$ 时, 对相对渗透系数 k_r 和容水度 C 进行适当的欠松弛处理可以有效抑制解的震荡。文献[15]提出, 当采用当前时间步最近两个迭代步的压力水头均值去求解 k_r 时, 能够有效抑制解的震荡, 加速算法的收敛速度。其渗透系数表达式为

$$k_{n+1,m} = k_s k_r \left(\frac{h_{n+1,m} + h_{n+1,m-1}}{2} \right) \quad . \quad (18)$$

对容水度 C , 常取为当前时间步体积含水率的当前迭代值 $\theta_{n+1,m}$ 与上一时间步的收敛值 θ_n 之差除以相应的压力水头之差 ($h_{n+1,m} - h_n$), 这种方法能够有效改善离散格式的质量守恒性, 但当前后两时间步的压力水头相等, 即 $h_{n+1,m} = h_n$ 时, 计算失效。吴梦喜^[24]对上述方法稍作修正, 有效避免了计算失效问题:

$$C = \frac{\partial \theta}{\partial h} = \begin{cases} \frac{\theta(h_{n+1,m}) - \theta(h_n)}{\beta(h_{n+1,m}) \cdot h_{n+1,m} - \beta(h_n) \cdot h_n} & (|\beta(h_{n+1,m}) \cdot h_{n+1,m} - \beta(h_n) \cdot h_n| \geq 0.01) \quad , \\ \frac{\theta(h_{n+1,m}) - \theta(h_{n+1,m} - 0.01)}{0.01} & (|\beta(h_{n+1,m}) \cdot h_{n+1,m} - \beta(h_n) \cdot h_n| < 0.01) \quad . \end{cases} \quad (19)$$

式中, $\beta(h) = \begin{cases} 1, & h < 0 \\ 0, & h \geq 0 \end{cases}$ 。式 (19) 使质量矩阵对计算

的影响仅限于非饱和区, 保证了质量守恒的同时, 也能够有效消除计算中的数值弥散。

2.2 质量矩阵集中化处理

文献[24]指出, 由于质量矩阵 \mathbf{E} 并非对角占优矩阵, 即使总渗透矩阵 \mathbf{K} 具有对角占优的特性, 但时间步 Δt 很小时, 总体方程的系数矩阵 $(\mathbf{K} + \mathbf{E}/\Delta t)$ 的对角占优特性将发生改变, 从而导致湿润锋附近数值震荡。研究表明, 质量矩阵集中化处理能够有效解决上述数值震荡^[11, 24]。本文引入 Zheng 等^[25]提出的一种质量矩阵集中化处理方法, 该方法具有严格的数学推导, 能

够适用于所有基于单位分解的数值分析方法。

对式(8)中时间项取其变分,可重写为如下形式:

$$\delta\Pi_t = \iint_{\Omega} C(\delta H) \frac{\partial H}{\partial t} d\Omega \quad (20)$$

由于权函数 $\{w_i\}$ 满足单位分解特性,故而有 $\sum w_i = 1$, 将 $\delta\Pi_t$ 的积分项乘以 $\sum w_i$, 则有

$$\begin{aligned} \delta\Pi_t &= \iint_{\Omega} C(\delta H) \frac{\partial H}{\partial t} \sum_i w_i d\Omega \\ &= \sum_i \iint_{\Omega} C w_i (\delta H) \frac{\partial H}{\partial t} d\Omega \quad (21) \end{aligned}$$

考虑权函数的紧支性,即当 $\mathbf{x} \notin \Omega_i^p$ 时, $w_i(\mathbf{x}) = 0$, 则式(21)可重新表示为

$$\delta\Pi_t = \sum_i \iint_{\Omega_i^p} C w_i (\delta H) \frac{\partial H}{\partial t} d\Omega \quad (22)$$

式中, Ω_i^p 表示第 i 个物理片。

当物理片 Ω_i^p 足够小时, δH 和 $\frac{\partial H}{\partial t}$ 即可用相应物

理片的局部近似 δH_i^h 和 $\frac{\partial H_i^h}{\partial t}$ 代替,对任一物理片,有

$$\delta\Pi_t^i = \iint_{\Omega_i^p} C w_i (\delta H_i^h) \frac{\partial H_i^h}{\partial t} d\Omega \quad (23)$$

将式(6)代入式(23)可得

$$\delta\Pi_t^i = (\delta \mathbf{d}_i)^T \mathbf{E}_i^i \frac{\partial \mathbf{d}_i}{\partial t} \quad (24)$$

式中, \mathbf{E}_i^i 即为物理片 Ω_i^p 的质量矩阵,其具体表达式如下:

$$\mathbf{E}_i^i = \iint_{\Omega_i^p} C w_i \mathbf{p}^T \mathbf{p} d\Omega \quad (25)$$

考虑本文 $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ 取为零阶,即 $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1\}^T$, 则质量矩阵 \mathbf{E}_i^i 为一阶,即

$$\mathbf{E}_i^i = \iint_{\Omega_i^p} C w_i d\Omega \quad (26)$$

文献[13]提出一种基于一致质量矩阵的最小时间步准则:当网格尺寸与时间步长满足一定比例关系时,数值震荡能够得到有效控制。但该方法在网格划分为粗糙时,时间步长相应较大,从而导致计算精度较低,而采用细分网格时,计算效率将会降低,计算成本过大。当采用质量矩阵集中化方案时,保持网格尺寸一定,采用较小的时间步长就能得到更为精确的结果,3.1节将对此进行验证。

2.3 溢出点的确定

溢出点位置的确定,一直是渗流问题求解的难点之一。溢出点位置的正确与否,关系着溢出面边界的准确施加,直接影响解的精确性。对于计算得到的流形单元广义节点水头值,如果其水头值大于其位置水头,则该节点位于浸润线以下,反之,则该节点位于浸润线以上,据此可采用线性插值的方法确定浸润线的位置。如图3(a)所示,对于3个广义节点形成的三角形网格,假定节点 i 位于浸润线之上,节点 j, k

位于浸润线以下,则浸润线与三角形边 ij 的交点 a 位置确定如下:

$$\left. \begin{aligned} x_a &= x_j + (x_i - x_j)(H_j - y_j)/(H_j - H_i + y_i - y_j), \\ y_b &= y_j + (y_i - y_j)(H_j - y_j)/(H_j - H_i + y_i - y_j). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中 H_i, H_j 分别为节点 i, j 处的总水头值; $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ 分别为节点 i, j 的坐标。同理,可求出边 ik 上的交点 b 的坐标。以此类推,即可得到整个计算域上的浸润线,而浸润线与潜在出渗面的交点即可作为溢出点,如图3(b)所示。确定了溢出点的位置后,即可采用罚函数法施加溢出面边界条件。

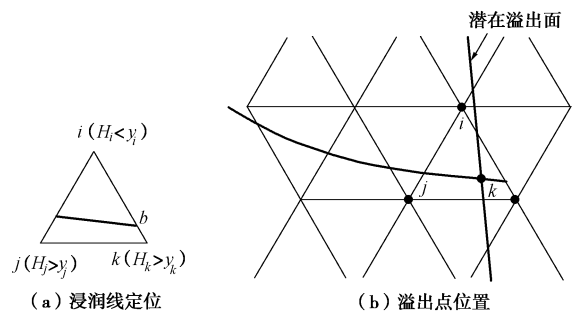


图3 浸润线及溢出点定位

Fig. 3 Location of phreatic lines and spill points

3 数值算例

3.1 一维入渗的震荡控制

本例为一维均质土的非饱和非稳定渗流问题^[13-15]。如图4所示,土层厚度为1m,初始条件为 $H(y, 0) = (y - 8) \text{ m}$, 边界条件为 $H(1, t) = 1 \text{ m}$, $H(0, t) = -8 \text{ m}$ 。土-水特征曲线与相对渗透系数函数分别采用 van Genuchten^[26]和 Mualem^[27]模型来描述:

$$\theta = \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{[1 + (-ah)^b]^c} \quad (28)$$

$$k_r = \Theta^{1/2} [1 - (1 - \Theta^{1/c})^c]^2 \quad (29)$$

式中 θ_r, θ_s 分别为残余含水率和饱和含水率; $\Theta = (\theta - \theta_r)/(\theta_s - \theta_r)$, 为有效饱和度; a, b, c 均为与土性相关的模型参数,其中 $c = 1 - 1/b$ 。相关计算参数取值如表1所示。

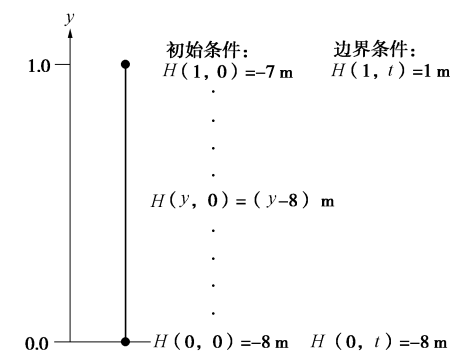


图4 一维计算模型与初始条件、边界条件

Fig. 4 One-dimensional model with initial and boundary conditions

表 1 一维入渗模型参数

Table 1 Model parameters for 1D infiltration

$k_s / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	θ_r	θ_s	a / m^{-1}	b
1.0×10^{-6}	0.186	0.363	1.00	1.53

采用文献[13]中的网格尺寸与时间步长, 分别利用一致质量矩阵和集中质量矩阵对 $t = 46800 \text{ s}$ 的压力水头分布进行计算, 计算结果如图 5 所示。由图 5 可知, 随网格尺寸和时间步长的逐渐减小, 两种方法计算的压力水头均呈现收敛趋势, 且二者的压力水头分布几乎完全一致。当网格尺寸为 0.001 m 时, 二者在 0.8 m 位置处的压力水头计算结果均为 -0.0216 m , 与解析解一致^[15]。

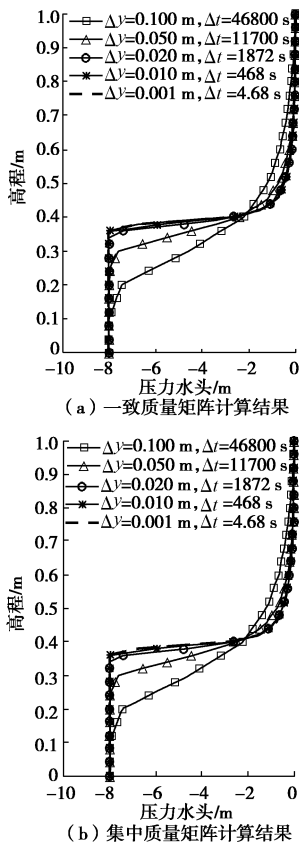


图 5 压力水头分布

Fig. 5 Distribution of pressure head

将网格尺寸固定为 0.05 m , 逐渐减小时间步长, 压力水头的计算结果如图 6 所示。由图 6 可见, 当网格尺寸固定, 时间步长逐渐减小时, 两种方法计算的压力水头均呈收敛趋势, 但由一致质量矩阵计算的压力水头在湿润锋附近发生剧烈震荡, 而质量矩阵集中化处理之后的计算结果不存在数值震荡现象。通过上述分析可知, 采用集中质量矩阵方案, 能够有效消除因时间步长过小引起的数值震荡, 在网格划分较为粗糙时, 适当缩短时间步长, 有利于提高计算精度。

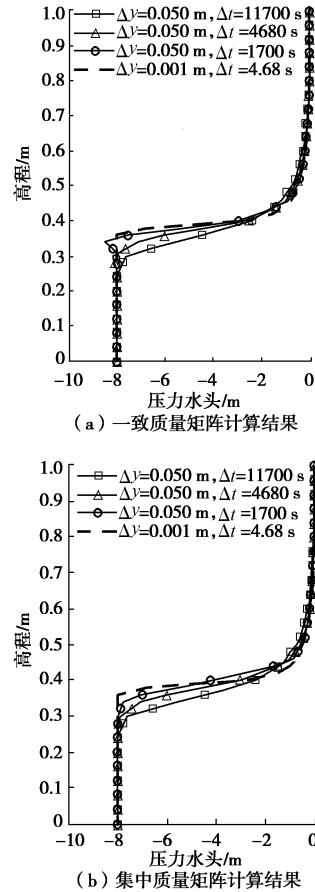


图 6 网格尺寸为 0.05 m 时的压力水头分布

Fig. 6 Distribution of pressure head at size of mesh of 0.05 m

3.2 土柱入渗问题

Srivastava 等^[28]给出了一维瞬态非饱和均质土柱与层状土柱入渗问题的解析解。本算例中, 均质土柱高度取为 3 m , 饱和渗透系数为 1.0 m/d ; 层状土柱上下两层高度相等, 均为 1.5 m , 其饱和渗透系数分别为 $1.0, 0.1 \text{ m/d}$, 其余条件相同。计算边界条件为: 底部为水头边界, $t \geq 0$ 时, 总水头 $H_b = 0$; 顶部为入渗边界, $t = 0$ 时, 入渗强度为 $q_t = 0$, $t > 0$ 时, 入渗强度 $q_t = 0.1 \text{ m/d}$ 。计算几何模型及边界条件如图 7 所示。土-水特征曲线和渗透系数函数采用 Gardner 指数模型^[29]表示:

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r)e^{\alpha h} \quad (30)$$

$$k_t = e^{\alpha h} \quad (31)$$

式中, α 为与土性相关的模型拟合参数, 其余参数同式 (28)、(29)。相关计算参数取值 α 为 2.0 m^{-1} , θ_r 为 0.092 , θ_s 为 0.400 。

均质土柱与层状土柱的计算几何模型及数学覆盖分别见图 8 (a) 与图 8 (b), 二者均生成 175 个物理片和 266 个流形单元。计算时, 采用固定时间步长 0.005 d , 计算总时长 5 d , 数值模拟结果如图 9 所示。由图可见, 不论是均质土柱还是层状土柱, 其数值解

与解析解均吻合良好，模拟结果均无震荡现象发生，充分验证了算法和程序的有效性与可靠性。

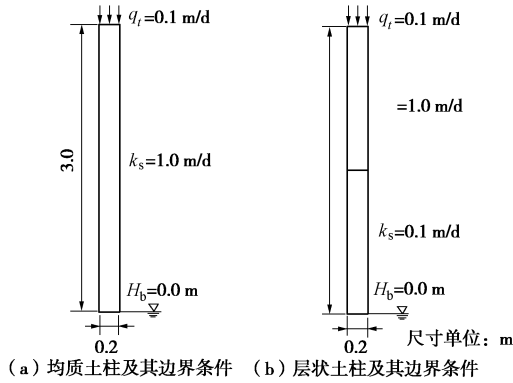


图 7 计算几何模型及其边界条件
Fig. 7 Geometric model with boundary conditions

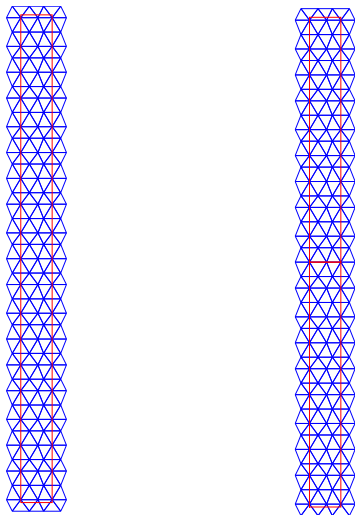


图 8 计算几何模型及数学覆盖
Fig. 8 Geometric model and mathematical cover

3.3 二维砂槽的非饱和入渗

Vauclin 等^[30]进行的二维室内入渗试验经常用来检验饱和-非饱和和非稳定渗流算法的性能。试验流动区域为高 2.00 m，宽 6.00 m，厚 0.05 m 的土板，其底部为不透水边界，两侧为自由排水边界。土体由颗粒分布规则的河砂组成。初始时刻，土体内水位为 0.65 m，试验开始后在土体表面中心 1.00 m 范围内均匀施加 0.148 m/h 的降雨强度，共 8 h。试验过程中对流动区域内不同时刻的自由水面位置进行了测量。土-水特征曲线和渗透系数函数分别由 van Genuchten 模型和 Mualem 模型来描述，即式 (28)、(29)，相关计算参数取值为 k_s 为 0.35 m/h， θ_r 为 0.01， θ_s 为 0.30， a 为 3.30 m^{-1} ， b 为 4.10。

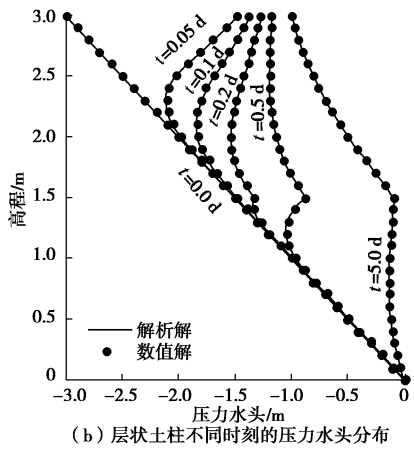
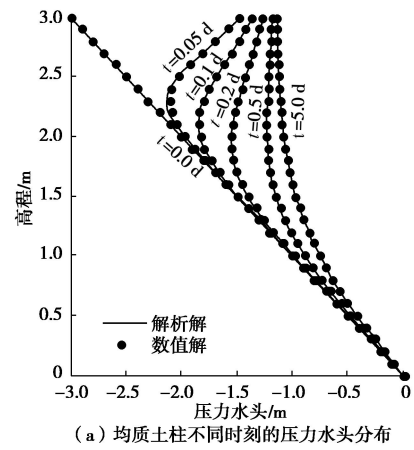


图 9 不同时刻下的压力水头分布

Fig. 9 Distribution of pressure head at different moments

根据对称性，截取流动区域的右半部分进行计算，计算几何模型及数学覆盖如图 10 所示，共生成 784 个物理片和 1460 个流形单元。计算过程采用固定时间步长 0.002 h。图 11 给出了不同时刻地下水模拟位置与试验结果的对比，数值解与试验值吻合良好。入渗后 2 h 与 8 h 的压力水头等值线如图 12 所示，整个计算域内等值线处处光滑，无震荡现象发生，进一步验证了算法和程序的可靠性。

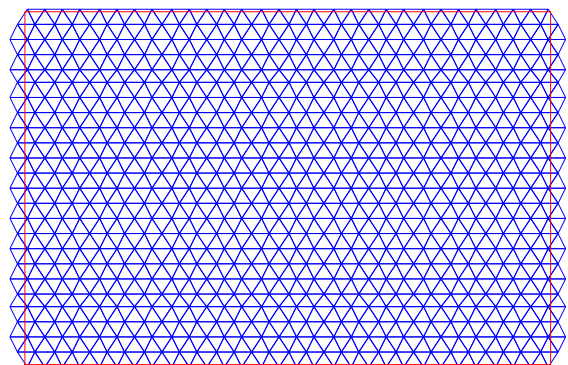


图 10 计算几何模型及数学覆盖
Fig. 10 Geometric model and mathematical cover

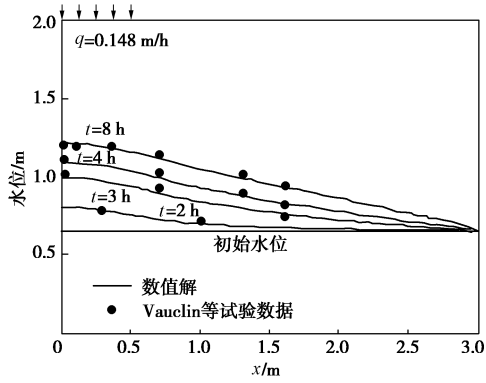


图 11 不同时刻地下水位模拟位置与试验结果对比

Fig. 11 Simulated and experimental water table positions at different moments

模型和 Gardner 通用模型^[29]表示, 前者即式 (28), 后者表示如下:

$$k_r = \frac{1}{1+A|h|^\beta} \quad (32)$$

式中, A , B 均为与土性相关的模型拟合参数。相关计算参数取文献[31]中所给参数, a 为 0.4049, b 为 8.852, A 为 $1.969 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$, B 为 6.912。

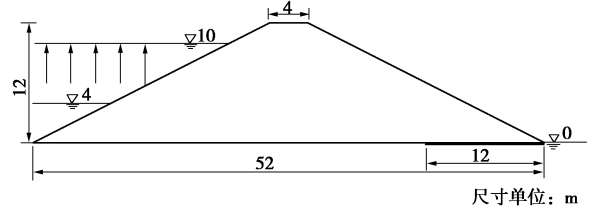


图 13 计算几何模型及边界条件

Fig. 13 Geometric model with boundary conditions

采用三角形网格覆盖坝体区域, 如图 14 所示, 共生成 1113 个物理片和 2036 个流形单元。计算时间步长取为 0.02 h。图 15 给出了坝体内浸润线随时间变化过程, 由图 15 可以看出, 水位变化初期, 浸润线的位置变化很快, 随着时间推移, 浸润线位置变化逐渐缓慢, 最终趋于稳定。同时, 也说明了本文所提方法对实际工程问题的可行性。

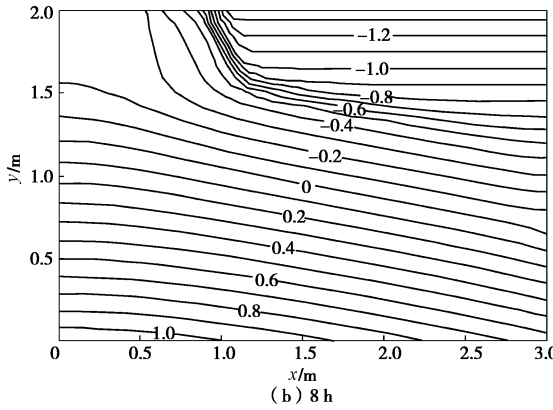
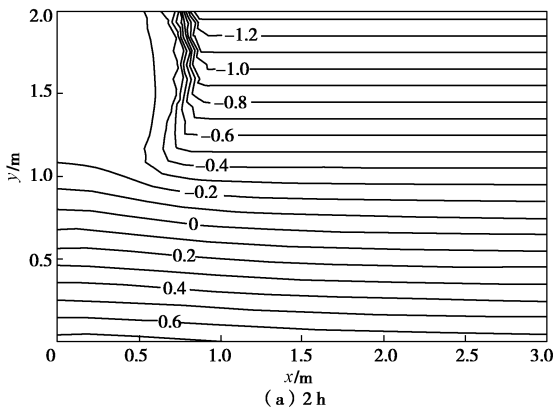


图 12 入渗后 2 h 与 8 h 的压力水头等值线

Fig. 12 Contour plot of pressure head at time of 2 and 8 h after infiltration

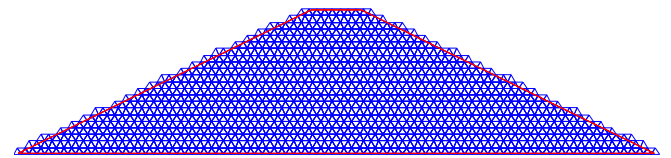


图 14 土坝几何模型及数学覆盖

Fig. 14 Geometric model and mathematical cover of the earth dam

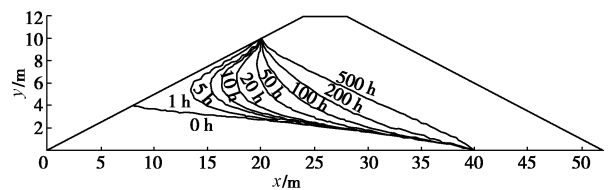


图 15 不同时刻坝体浸润线位置

Fig. 15 Phreatic lines of dam at different moments

3.4 二维均质土坝

某均质黏土坝, 坝高 12 m, 坝顶宽 4 m, 上下游坝坡均为 1 : 2, 下游坝底有一水平排水带, 排水带深入坝内长度为 12 m。初始条件为上游水位 4 m, 下游无水, 在 $t=0$ 时刻, 上游水位瞬时升高至 10 m, 下游仍然保持无水状态, 计算库水位上升后坝体内浸润线变化过程, 计算几何模型及边界条件具体如图 13 所示。饱和渗透系数为 $2.5 \times 10^{-7} \text{ m/s}$, 孔隙率为 0.381, 土-水特征曲线和渗透系数函数分别由 van Genuchten

4 结 论

(1) 基于 NMM 的覆盖思想, 建立了非饱和渗流 Richards 方程的 NMM 离散格式。相比于有限元, NMM 的前处理更为灵活, 对复杂边界具有更强的适应性, 同时, 罚函数法的引入, 使得本质边界条件和界面连续性条件的施加更为简便。

(2) 当网格尺寸与时间步长比例良好时, 集中质量矩阵与一致质量矩阵计算结果一致, 但对于较小的

时间步长,集中质量矩阵对湿润锋附近的数值震荡有明显的抑制作用。

(3)通过编程实现对一维和二维非饱和非稳定渗流的数值模拟,结果显示数值解与解析解或试验值吻合良好,验证了本文算法的有效性与可靠性。

参考文献:

- [1] RUBIN J. Theoretical analysis of two-dimensional, transient flow of water in unsaturated and partly unsaturated soils[J]. Soil Science Society of America Journal, 1968, **32**(5): 607 - 615.
- [2] FREEZE R A. Three-dimensional, transient, saturated-unsaturated flow in a groundwater basin[J]. Water Resources Research, 1971, **7**(2): 347 - 366.
- [3] 雷光耀,张锁春,高 骥. 水位骤变时的饱和-不饱和渗流数值计算[J]. 计算物理, 1984, **1**(2): 237 - 244. (LEI Guang-yao, ZHANG Suo-chun, GAO Ji. Numerical solution of saturated-unsaturated seepage flow under rapid change of the water surface level[J]. Journal of Computational Physics Sinica, 1984, **1**(2): 237 - 244. (in Chinese))
- [4] 曹 渊,王铁良,王文科,等. 饱和-非饱和渗流三维数学模型及数值方法[J]. 固体力学学报, 2013(33): 79 - 83. (CAO Yuan, WANG Tie-liang, WANG Wen-ke, et al. 3D theoretical model and numerical method of saturated-unsaturated seepage[J]. Chinese Journal of Soil Mechanics, 2013(30): 79 - 83. (in Chinese))
- [5] NEUMAN S P. Saturated-unsaturated seepage by finite elements[J]. Journal of the Hydraulics Division, 1973, **99**(12): 2233 - 2250.
- [6] 赤井浩一,大西有三,西垣诚. 有限要素法による飽和-不飽和浸透流の解析[C]// 土木学会論文報告集(第 264 号). 1977. (AKAI K, OHNISHI Y, NISHIGAKI M. Finite element analysis of saturated-unsaturated seepage in soil[C]// Journal of Japan Society of Civil Engineers(No.264). 1977. (in Japanese))
- [7] 张家发. 三维饱和非饱和和稳定非稳定渗流场的有限元模拟[J]. 长江科学院院报, 1997, **14**(3): 35 - 38. (ZHANG Jia-fa. Simulation of 3D saturated-unsaturated and steady-unsteady seepage field by FEM[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 1997, **14**(3): 35 - 38. (in Chinese))
- [8] DOU Z S, WU J W, ZHANG H M, et al. The solution of unconfined water seepage problem in saturated-unsaturated soil using Bathe algorithm and Signorini condition[C]// IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Chengdu, 2017: 1 - 12.
- [9] 陈 锐,王若宣,刘 坚,等. 节点自适应无网格法在非饱和土瞬态渗流分析中的应用[J]. 土木工程学报, 2015, **48**(增刊 2): 12 - 16. (CHEN Rui, WANG Ruo-xuan, LIU Jian, et al. Application of EFGM with adaptive nodes to transient analysis of water infiltration in unsaturated soil[J]. China Civil Engineering Journal, 2015, **48**(S2): 12 - 16. (in Chinese))
- [10] 陈佩佩,白 冰. 非饱和岩土介质渗流问题的光滑粒子法模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, **35**(10): 2124 - 2130. (CHEN Pei-pei, BAI Bing. Simulation of seepage problems in unsaturated soil using the smoothed particle hydrodynamics(SPH) method[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics Engineering, 2016, **35**(10): 2124 - 2130. (in Chinese))
- [11] CELIA M A, BOULOUTAS E T, ZARBA R L. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation[J]. Water Resources Research, 1990, **26**(7): 1483 - 1496.
- [12] 吴梦喜,高莲士. 饱和-非饱和土体非稳定渗流数值分析[J]. 水利学报, 1999(12): 38 - 42. (WU Meng-xi, GAO Lian-shi. Saturated-unsaturated unsteady seepage numerical analysis[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1999(12): 38 - 42. (in Chinese))
- [13] KARTHIKEYAN M, TAN T S, PHOON K K. Numerical oscillation in seepage analysis of unsaturated soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2001, **38**(3): 639 - 651.
- [14] TAN T S, PHOON K K, CHONG P C. Numerical study of finite element method based solutions for propagation of wetting fronts in unsaturated soil[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2004, **130**(3): 254 - 263.
- [15] PHOON K K, TAN T S, CHONG P C. Numerical simulation of Richards equation in partially saturated porous media: under-relaxation and mass balance[J]. Geotechnical and Geological Engineering, 2007, **25**(5): 525 - 541.
- [16] 陈 曦,于玉贞,程勇刚. 非饱和渗流 Richards 方程数值求解的欠松弛方法[J]. 岩土力学, 2012, **33**(增刊): 237 - 243. (CHEN Xi, YU Yu-zhen, CHENG Yong-gang. Under-relaxation methods for numerical solution of Richards equation of variably saturated flow[J]. Rock and Soil Mechanics, 2012, **33**(S0): 237 - 243. (in Chinese))
- [17] 李文涛,马田田,韦昌富. 基于自适应松弛 Picard 法的高效非饱和渗流有限元分析[J]. 岩土力学, 2016, **37**(1): 256 - 262. (LI Wen-tao, MA Tian-tian, WEI Chang-fu. An efficient finite element procedure for unsaturated flow based

- on adaptive relaxed Picard method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2016, **37**(1): 256 - 262. (in Chinese))
- [18] SHI G H. Manifold methods of material analysis[C]// *Transactions of the 9th Army Conference on Applied Mathematics and Computing*. Minneapolis, 1991.
- [19] 姜清辉, 邓书申, 周创兵. 有自由面渗流分析的三维数值流形方法[J]. *岩土力学*, 2011, **32**(3): 879 - 884. (JIANG Qing-hui, DENG Shu-sheng, ZHOU Chuang-bing. Three-dimensional numerical manifold method for seepage problems with free surfaces[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2011, **32**(3): 879 - 884. (in Chinese))
- [20] WANG Y, HU M S, ZHOU Q, et al. Energy-work-based numerical manifold seepage analysis with an efficient scheme to locate the phreatic surface[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2014, **38**(15): 1633 - 1650.
- [21] HU M S, WANG Y, RUTQVIST J. An efficient approach for modeling fluid flow in heterogeneous media using numerical manifold method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2015, **77**(8): 459 - 476.
- [22] HU M S, RUTQVIST J, WANG Y. A practical model for fluid flow in discrete-fracture porous media by using the numerical manifold method[J]. *Advances in Water Resources*, 2016, **97**: 38 - 51.
- [23] MA G W, WANG H D, FAN L F, et al. Simulation of two-phase flow in horizontal fracture networks with numerical manifold method[J]. *Advances in Water Resources*, 2017, **108**: 293 - 309.
- [24] 吴梦喜. 饱和-非饱和土中渗流 Richards 方程有限元算法[J]. *水利学报*, 2009, **40**(10): 1274 - 1279. (WU Meng-xi. Finite-element algorithm for Richards' equation for saturated-unsaturated seepage flow[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2009, **40**(10): 1274 - 1279. (in Chinese))
- [25] ZHENG H, YANG Y T. On generation of lumped mass matrices in partition of unity based methods[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, **112**(8): 1040 - 1069.
- [26] VAN GENUCHTEN M T. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils[J]. *Soil Science Society of America Journal*, 1980, **44**(5): 892 - 898.
- [27] MUALEM Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media[J]. *Water Resources Research*, 1976, **12**(3): 513 - 522.
- [28] SRIVASTAVA R, YEH T C J. Analytical solutions for one-dimensional, transient infiltration toward the water table in homogeneous and layered soils[J]. *Water Resources Research*, 1991, **27**(5): 753 - 762.
- [29] GARDNER W R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table[J]. *Soil Science*, 1958, **84**(4): 228 - 232.
- [30] VAUCLIN M, KHANJI D, VACHAUD G. Experimental and numerical study of a transient, two-dimensional unsaturated-saturated water table recharge problem[J]. *Water Resources Research*, 2010, **15**(5): 1089 - 1101.
- [31] THIEU N T M, FREDLUND M D, FREDLUND D G, et al. Seepage modeling in a saturated/unsaturated soil system[C]// *Proceedings of the International Conference on Management of the Land and Water Resources*. Hanoi, 2001: 20 - 22.