

DOI: 10.11779/CJGE201711017

# 渗透力概念的力学分析及广义化探讨

丁洲祥

(1. 北京交通大学土木建筑工程学院, 北京 100044; 2. 陕西省公路桥梁与隧道重点实验室, 陕西 西安 710064)

**摘要:** 渗透力是土力学中重要而艰深的概念之一。在分析渗透力现有成果基础上, 首先辨析提出了相关的水力梯度定义和 Darcy 定律表述之间的协调性问题, 从而明确了传统渗透力表述式中水力梯度的协调性定义方法; 然后, 基于力学机理较严谨的 Biot 固结理论并引入体力、广义有效应力原理和总渗流势方程等, 分析提出适用于广义多孔介质(含土体)的广义渗透力的一种定义, 即广义渗透力在力学上是广义有效应力系数张量与总渗流势梯度的点积, 这区别于传统假说。在 Terzaghi 有效应力方程适用的范围内, 广义渗透力可以退化为总渗流势梯度这一常见形式。还探讨了渗透力的其他力学性质, 以及考虑渗流速度影响的广义渗透力改进途径。所得结论有助于拓展对渗透力概念的认识。

**关键词:** 渗透力; 水力梯度; Biot 固结理论; 渗流; 广义有效应力原理

**中图分类号:** TU411.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 4548(2017)11 - 2088 - 14

**作者简介:** 丁洲祥(1976 - ), 男, 博士, 副教授, 从事岩土与隧道工程教学科研工作。E-mail: dingzhouxiang@163.com.

## Mechanical fundamentals of seepage force concept and its generalization

DING Zhou-xiang

(1. School of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China; 2. Shaanxi Provincial Major Laboratory for Highway Bridge & Tunnel, Xi'an 710064, China)

**Abstract:** The seepage force is still one of the most fundamental and controversial concepts in soil mechanics. Based on the literature review, the compatibility between the definition of hydraulic gradient and the mathematical description of Darcy's law is discussed first, followed by proposing a compatible form of hydraulic gradient definition in the conventional expression for seepage force. By integrating the body force, the general effective stress principle and the total seepage potential equation into the Biot's consolidation theory, a strict definition of the general seepage force is obtained for various porous media including soils. The general seepage force proposed herein is the dot product of the general effective stress tensor and the total seepage potential gradient, which differs from conventional explanations of seepage force mechanism. Within the scope of Terzaghi's effective stress principle, the general seepage force is reduced to the form of total seepage potential gradient. Other related mechanical properties of seepage force are investigated as well as a further modified formulation for the general seepage force containing seepage velocity. The conclusions may afford profound insight into the concept of seepage force in geotechnical practice.

**Key words:** seepage force; hydraulic gradient; Biot's consolidation theory; seepage; general effective stress principle

## 0 引 言

沈珠江发现渗透力或所谓动水压力的应用是岩土工程界概念混乱现象的最主要表现<sup>[1]</sup>。渗透力概念曾引起 30 多年的学术讨论<sup>[1-11]</sup>, 该现象非常少见。

在实际工作中, 有人可能认为随便从一本土力学教材中就能找到答案; 而对崇尚严谨性的教学或科研工作者, 却发现不同著作关于渗透力概念的提出和推导, 五花八门, 令人困惑。此问题已引起注意, 如文献[12]认为近年出版的土力学教材水平参差不齐, 甚至“以往的瑕疵”和“新的谬误”并存; 文献[1]“特别应当指出, 如果教科书中存在类似问题(概念混乱),

将会贻误下一代, 因此希望高校的土力学教师们加以重视”。教材和教师被寄予厚望。

最近 1 年多来, 作为难点的渗透力概念似乎又成了研究热点。蒋中明等<sup>[13]</sup>研究了边坡稳定分析中的渗透力问题, 并“强烈建议国内相关学者在这个问题上统一认识, 以免这种误解一代一代的传下去”; 祝恩阳<sup>[14]</sup>考虑孔隙水对土颗粒浮力作用推导了渗透力表达式; 李广信<sup>[15-16]</sup>从土颗粒出发解释土中水的渗透力机理,

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51278028, 41172221); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2014JBM087, 310821161119)

**收稿日期:** 2016 - 06 - 02

推导了渗透力计算公式。显然,关于渗透力的概念,几乎每人都有自己的某种理解。人们很容易从渗透力概念的某一解释和推导,找到不足,但却难于提出业界普遍接受和适用范围较广的唯一“正解”。渗透力概念尚无终论。

鉴于上述情况,本文将结合笔者在固结领域多年学习体会,在土力学和广义多孔介质范畴内,重点从力学理论层面探讨渗透力概念。主要工作为:①基于调研,尽量客观地概括土力学中渗透力概念的现状及不同观点间的矛盾性;②提出水力梯度与 Darcy 定律之间的协调性表述问题;③将广义有效应力原理引入 Biot 固结理论,作为渗透力分析的力学基础;④探讨“广义渗透力”的概念及其定义;⑤讨论渗透力概念相关的若干问题。藉此抛砖引玉,供同行讨论。

## 1 渗透力定义的现状与矛盾

现有文献中关于渗透力的具体定义,尚不统一,甚至有学者认为“没有发现渗透力定义正确的书”<sup>[8]</sup>。有必要较全面地了解渗透力概念的不同定义。以下将从力学性质、数学表达及作用方向等角度,概括关于渗透力定义的大体现状及现存的某些矛盾性。

### 1.1 渗透力力学性质研究概况

渗透力定义有不同分类方法。笔者认为,按力学性质相对明确和相对不明确进行分类,则基本上可以区分和概括关于渗透力性质的主要既有观点。

第一类——性质较为明确的渗透力定义主要有:

①刘成宇认为,当水“在土中渗流时,对土颗粒有推动、摩擦和拖曳作用,它们综合形成的作用于土骨架的力,即为渗透力”<sup>[17]</sup>。②钱家欢定义渗透力是“渗透水流施于单位土体内土粒上的拖曳力”<sup>[18]</sup>;类似还有,高大钊“渗透水流作用对土骨架产生的拖曳力称为渗透力”<sup>[19]</sup>,卢廷浩“渗透水流施于单位土体内土粒上的拖曳力称为渗流力,亦称为渗透力、动水压力”<sup>[20]</sup>,Lambe 等阐释渗透力为“由流动水施加于土骨架上的摩擦拖曳力”<sup>[21]</sup>;Craig 认为“当水在土的孔隙中渗流时,由于黏性摩擦产生沿着流动方向并作用于固相颗粒上的摩擦拖曳力,于是从水到固相颗粒就发生能量迁移,相应于该能量迁移的力称为渗透力”<sup>[22]</sup>。③李广信(等)先后提出,渗透力是“渗透水流对土颗粒骨架的拖曳作用力”<sup>[23]</sup>，“渗透力是水作用于土骨架上的推动力和拖曳力,其反作用力是土骨架对于渗透水流的阻力”<sup>[10]</sup>,但近期又指出“‘渗透力就是渗透水流对于土骨架的拖曳力’的说法是不全面的”<sup>[15]</sup>。可见,第一类定义的特点是力图揭示渗透力的微观力学机理,但对究竟由哪几种作用力构成渗透力的定性

认识迄今尚不一致,而且各种微观作用力的符合实际的具体模型和定量分析方法仍鲜有报道。

第二类——力学性质不甚明确或较笼统的渗透力定义主要有:①松岗元<sup>[24]</sup>、姚仰平等<sup>[25]</sup>提出渗透力是“渗流水作用于单位体积土体上的力(体力)”。②张克恭等“单位体积土颗粒所受到的渗流作用力称为渗流力或动水力”<sup>[26]</sup>;赵成刚等“渗透力表示的是水流对单位体积土体颗粒的作用力”<sup>[27]</sup>;张梦喜“单位体积土骨架所受到的渗流作用力称为渗透力或动水压力”<sup>[28]</sup>。③高大钊等<sup>[29]</sup>、洪毓康<sup>[30]</sup>、赵明华<sup>[31]</sup>和席永慧等<sup>[32]</sup>“水流作用在单位体积土体中土颗粒上的力称为动水力,也称为渗流力”。④殷宗泽阐释“流动着的水对土体的作用力叫渗透力”<sup>[33]</sup>;Das 认为渗透力是“通过土体的水流引起施加在土体本身上的某种力”<sup>[34]</sup>。⑤Terzaghi 等基于对总水头、孔压和位置三者关系分析,得到一个具有单位重量纲的量,并称其为“体积渗透力”<sup>[35]</sup>,这是一种较特殊的定义方法。⑥邵龙潭等提出渗透力是“土骨架与孔隙水之间的相互作用力”<sup>[36]</sup>。第二类定义的特点主要是不再执拗于两相之间相互作用力的属性,但渗透力的度量单位究竟是单位体积的两相体、固相还是液相等方面,却存在一定歧义。

此外,关于渗透力的荷载属性,在文献[27, 30, 33]中,一般先入为主地定义为体积力——“它(渗透力)作用在渗流场土体中的每一点,是体积力”,然后据此建模推导渗透力算式。至于为何渗透力是体积力而不是其他,则罕有多角度的论证。蒋中明<sup>[13]</sup>近来还提出渗透力本质是面力的观点。这表明在经典土力学中,相关力学基础似有欠缺。

### 1.2 渗透力的一种常见数学表达

文献[19, 21, 22, 24, 34, 37, 38]给出的渗透力数学表达式较一致,基本都是一维传统形式,概括如下:

$$j = \gamma_w i \quad (1)$$

式中, $j$ 为渗透力, $\gamma_w$ 为孔隙水重度, $i$ 通常称为水力梯度,但 $i$ 的定义却不统一,下文将尝试推本溯源,以明其理。还有一种较少见的观点:邵龙潭等<sup>[36]</sup>和 Li 等<sup>[39]</sup>分别提出不同于式(1)的渗透力定义,即在式(1)右端乘以孔隙率 $n$ 加以修正。

某些文献在分析中也讨论了二维情况,但由于所用假定的局限性,最终都得到上述一维形式。真正二维或三维形式的渗透力推导,以往很少涉及。

### 1.3 渗透力作用方向

文献[17~19, 22, 23, 27, 30, 31, 33, 34, 38, 40~42]认为,渗透力作用方向与渗流方向一致或与等势线法线同向<sup>[42]</sup>,但通常没有阐明具体适用条件。

相比而言,文献[21, 37]则明确提出,在各向同性条件下,渗透力与渗流方向一致,但该结论缺乏具体证明。值得注意的有,李广信<sup>[15]</sup>最近强调了渗透力方向及成立条件,“在渗流各向同性的土体中,渗透力与土中水的水力梯度和渗流流速方向一致”。后文将对渗透力方向问题尝试补充论证。

## 2 水力梯度及 Darcy 定律表述的协调性

式(1)清楚地表明,传统渗透力  $j$  与水力梯度  $i$  密切相关;而研究渗流力方向有关的渗流方向时,自然会涉及 Darcy 定律。

笔者调研表明:历史上曾出现两种不同表述形式的 Darcy 定律(方程)及两种不同的水力梯度定义。

通过分析,本文认为,关于水力梯度和 Darcy 定律的表述,两者之间需要满足协调性或相容性要求。

### 2.1 协调的水力梯度及 Darcy 定律表述

Darcy 定律描述土体孔隙水渗流,常见表述形式主要有两种,这里记为类型 I:

$$v = ki \quad (2)$$

和类型 II

$$v = -ki \quad (3)$$

式中,  $k$  是渗透系数,  $v$  是 Darcy 渗流速度。式(2)和(3)的差别主要是两式右端相差一个负号。

本文认为,在满足协调性要求的前提下,式(2)、(3)分别应对应于不同的水力梯度定义。

#### (1) 水力梯度定义类型 A

不妨将与式(2)对应的满足协调性的水力梯度定义称为类型 A。此类定义在国外文献中较常见,但在数学符号和术语上彼此仍存在一些区别,例如文献[37, 43]将水力梯度  $i$  定义为

$$i = -dh / dl \quad (4)$$

式中,  $l$  为沿渗流路径(flow path)度量的距离,  $h$  为总水头(total head),相应地, Darcy 定律式(2)中的  $v$  称为表观渗流速度(apparent velocity of flow)。

而 Terzaghi 等将水力梯度定义为<sup>[35]</sup>

$$i = -\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta h / \Delta s = -dh / ds \quad (5)$$

式中,  $\Delta s$  为点  $a$  和点  $b$  之间的宏观或表观渗流距离(macroscopic or apparent flow distance);  $\Delta h$  为  $a$  和  $b$  之间的水头损失(head loss),  $\Delta h = h_a - h_b$ ;  $h_a$  和  $h_b$  分别为  $a$  和  $b$  的总水头或水力水头(total or hydraulic head)。Terzaghi 等将 Darcy 定律式(2)中的  $v$  解释为在宏观或表观渗流方向  $s$  上的排水速度(discharge velocity)。

Powrie 将水力梯度定义为与式(5)相似的形式,即  $i = -dh / dx$ ; 但将式(2)中的  $v$  称为表面或 Darcy

渗流速度(superficial or Darcy seepage velocity)<sup>[44-45]</sup>。

松岗元也使用了与式(5)类似的表述,即将水力坡度(水力梯度)定义为  $i = -\Delta h / \Delta s$ , 即水头损失  $-\Delta h$  除以沿水流方向的流线长  $\Delta s$ ; 与之协调的应是类型 I 的 Darcy 定律, 即式(2)。

Terzaghi<sup>[46]</sup>在其经典固结理论模型推导过程中,曾经使用

$$i = -\partial h / \partial z \quad (6)$$

的形式定义水力梯度,并使用式(2)形式的 Darcy 定律。这种表示方法在文献[47]中仍在使用,即  $i_z = -\partial h / \partial z$ , 但个别符号稍有差别; Aysen<sup>[47]</sup>认为,这种形式的水力梯度可用在二维或三维坐标系统中。

国内文献[26]在推导 Terzaghi 固结理论模型时,就使用了式(6)所示的水力梯度定义和式(2)所示的 Darcy 定律。

式(4)~(6)可归于水力梯度定义的类型 A。

#### (2) 水力梯度定义类型 B

与 Darcy 定律类型 II(即式(3)),协调对应的水力梯度定义不妨称为类型 B。例如,龚晓南<sup>[40]</sup>在引入 Darcy 渗透试验时,定义水力梯度为

$$i = \Delta h / L \quad (7)$$

式中,  $\Delta h = h_1 - h_2$ ,  $L$  为试样长度;并在多维渗流连续性方程推导中,将  $n$  方向的 Darcy 渗流方程写为

$$v_n = -k_n i_n = -k_n \partial h / \partial x_n \quad (8)$$

其中隐含着与式(7)对应的水力梯度的微分形式,即

$$i_n = \partial h / \partial x_n \quad (9)$$

在 Darcy 定律的一维和多维形式,即式(3)、(8)中,右端项“负号表示渗流方向与水中势能增加方向相反”<sup>[40]</sup>。再往前追溯,黄文熙<sup>[48]</sup>已按式(3)的形式(类型 II)来表述 Darcy 定律。

李广信<sup>[23]</sup>也曾使用类似的水力梯度(水力坡降)定义,即  $i = h / L$ , 这里的  $h$  为长度  $L$  上的水头损失;并在二维渗流分析中,按式(8)所示形式引用 Darcy 定律。

简言之,式(9)可以归为水力梯度定义类型 B,它仅与 Darcy 定律表述方法类型 II,即式(3)相协调。

### 2.2 非协调的水力梯度及 Darcy 定律表述

国内、外文献中还存在 1 种非协调应用情况,其中,水力梯度定义采用类型 B,但对应的 Darcy 定律表述却使用类型 I。例如, Budhu<sup>[49]</sup>将水力梯度定义为

$$i = \Delta H / l \quad (10)$$

但却按式(2)来表述 Darcy 定律,并给出任意方向  $n$  上的 Darcy 渗流<sup>[49]</sup>:

$$v_n = k_n dH / dx_n \quad (11)$$

式中,  $dH$  是距离  $dx$  内总水头的变化。于是,  $n$  方向的水力梯度不妨记为

$$i_n = dH / dx_n \quad (12)$$

显然式 (12) 与式 (9) 是相似的, 同属于类型 B; 而式 (11) 与式 (2) 相似, 可归于类型 I。

Das 也采用与 Budhu 类似的水力梯度定义<sup>[34, 50]</sup>, 即  $i = \Delta h / L$  ( $L$  是两点间距离或产生水头损失的渗流长度), 并按式 (2) 描述 Darcy 定律, 这属于非协调情况; 但 Das 在文献[51]却先后使用协调和非协调用法。

相比而言, 国内对非协调法的应用更普遍。例如, 陈仲颐等利用水力坡降(水力梯度)定义  $i = \Delta h / L$  ( $L$  为考察的两点间“渗流途径”, 即  $\Delta h$  的渗流长度), 以及 Darcy 定律类型 I 即式 (2)<sup>[38]</sup>; 并在二维平面渗流中, 对各向异性土, 使用如下的 Darcy 定律<sup>[38]</sup>:

$$v_n = k_n i_n = k_n \partial h / \partial x_n \quad (13)$$

显然, 式 (13) 与式 (11) 相一致, 实质为 Darcy 定律表述类型 I 和水力梯度类型 B。据调研, 在平面渗流问题中, 文献[17, 18, 26, 27, 31~34]同样用了上述非协调形式。

进一步结合 Darcy 定律在 Terzaghi 固结理论的应用来看, 有学者<sup>[17, 27-31, 34, 38, 49, 52]</sup>使用了非协调的 Darcy 定律和水力梯度表示; 然而还有学者<sup>[18, 22, 35, 46, 53, 54]</sup>在 Terzaghi 固结模型推导过程中, 则使用了具有协调性的 Darcy 定律类型 I 和相应的水力梯度类型 A。

值得注意的还有: ①近年来, Das 在固结方程推导中, 已由文献[34, 52]中的非协调用法, 转而使用 Darcy 定律类型 I 及其相协调的水力梯度定义类型 A<sup>[50]</sup>。②松岗元在推导稳定渗流的拉普拉斯方程和 Terzaghi 固结模型时, 均使用了 Darcy 定律类型 I 和水力梯度定义类型 A, 前后较为一致, 且满足协调性。这些用法在数学力学意义上较严谨, 是可喜的新趋势。

水力梯度和 Darcy 定律在数学上宜遵循协调性表述法; 非协调形式在以往屡见不鲜, 但此宜不法常可。

### 2.3 矛盾根源剖析: 方向导数与梯度

Darcy 定律和水力梯度表述差异的根源参伍错综。考虑到 Terzaghi 著作<sup>[46]</sup>的影响力, 本文尝试择其重点, 因其固然, 以资权证。文献[46]在“88.Flow of water through soils”中, 先后涉及水力梯度两种形式: ①  $i = h / l$ , 式中,  $i$  为水力梯度 (hydraulic gradient),  $l$  为棱柱盒中试样长度,  $h$  为水头 (hydraulic head); ②  $i = -\partial h / \partial l$ 。前者用于线性流, 后者用于流线任意弯曲的情况。两种情况中的  $l$  和  $dl$  均沿着流线  $ab$  方向。

水力梯度形式①中的  $h$ , Terzaghi 称为水头, 然而其数学表达式却是

$$h = h_{w1} - h_{w2} - H \quad (14)$$

式中,  $h_{w1}$  和  $h_{w2}$  分别是流线上  $a$  和  $b$  两点的测压管水

头 (piezometric head),  $H$  是  $b$  点相对于  $a$  点的位置水头 (position head)。Terzaghi 没有提及零势参考面概念, 而在应用中默认  $a$  点位于零势面。因此, 式(14)定义的“水头” $h$ , 本质上是  $a$  和  $b$  两点之间的总水头差。然而, Terzaghi 后来又把  $\gamma_w h$  称为超静水压力 (excess hydrostatic pressure), 由此看来,  $h$  却又表示超静水压力对应的超静水头, 令人费解。

形式①的剖析:

$$i = h / l = -(-h / l) = -\Delta \tilde{h} / \Delta L \quad (15)$$

式中,  $\Delta \tilde{h}$  是沿流向由  $a$  点至  $b$  的总水头函数有限增量,  $\Delta \tilde{h} = -h = \tilde{h}_b - \tilde{h}_a$ ;  $\Delta L = l$ 。因为  $\Delta L$  并不一定恰好是坐标增量, 所以  $\Delta \tilde{h} / \Delta L$  不能一概理解为总水头函数  $\tilde{h}$  的梯度或对坐标的偏导数。而  $\Delta \tilde{h} / \Delta L$  其实正是总水头函数沿流向的方向导数。分析: 按方向导数定义<sup>[55]</sup>, 式 (15) 中的  $\Delta \tilde{h} / \Delta L$ , 表示的是文献[46]中总水头  $\tilde{h}$  在  $a$  点沿流向的变化率, 即  $\Delta \tilde{h} / \Delta L$  是总水头函数在  $a$  点的方向导数。严格而言, 当  $l \rightarrow 0$  时,  $\Delta \tilde{h} / \Delta L$  的极限值才是数学意义上  $a$  点的方向导数, 此时式 (15) 对应于

$$i = -\lim_{l \rightarrow 0} \left[ \tilde{h}(x_a + l \cos \alpha, y_a + l \cos \beta) - \tilde{h}(x_a, y_a) \right] / l = -\partial \tilde{h} / \partial l \Big|_{(x_a, y_a)} \quad (16)$$

式中,  $(x_a, y_a)$  是 Terzaghi 著作中  $a$  点在二维空间的坐标,  $(\alpha, \beta)$  是渗流方向的方向角。

问题: 式 (15) 中的  $i$  表示什么意义? Terzaghi 将其定义为水力梯度, 它真是数学上的梯度<sup>[55]</sup>么? 经数学分析, Terzaghi 定义的  $i$ , 实质是总水头函数沿流向的方向导数的相反数, 它不是数学意义上的梯度。

函数梯度与函数方向导数有本质不同。梯度是向量; 方向导数却是标量。Terzaghi 也提到,  $i$  是一个纯数 (pure number)。按文献[46]图示条件, 式 (15) 定义的  $i$  应是一个正数。式 (15) 中“水力梯度” $i$ , 名不副实。

Terzaghi 在推导任意弯曲流线情况下的水力梯度时, 得到  $i = -\partial h / \partial l$  的结论, 却没阐明此时的  $h$  与前述  $i = h / l$  中  $h$  的异同, 再次导致  $h$  多义性。Terzaghi 推导中还用了  $h / l = -\partial h / \partial l$  的替换式。然而, 此替换可能有误。经分析, 正确的替换法可以为:  $h / l = -\partial h' / \partial l$ , 其中  $h' = h_w + z + C$ ,  $C$  是与零势参考面有关但与  $l$  无关的待定参数。因此, 严格的表述方法可为  $i = -\partial h' / \partial l$ ,  $h$  不能兼当总水头差和总水头。

可见, 对上述两种流线, Terzaghi 定义的水力梯度, 都非真正的梯度, 而是总水头函数在流向的方向导数的相反数, 这也是水力梯度定义类型 A 的本质。结合其他观点看, 如钱家欢阐释水力坡降(水力梯度)为“沿渗流方向单位距离的水头损失”<sup>[18]</sup>, 以及洪毓

康的“沿着水流方向单位长度上的水头差”<sup>[30]</sup>等提法,某种程度上也具有方向导数相反数含义,只是限于有限增量而没给出微分形式和深入辨析,但仍值得肯定。

相比而言,水力梯度定义类型 B,则是真正数学意义上的梯度(或梯度分量)。

## 2.4 协调性与渗透力的关系

回顾式(1)定义的渗透力传统表述式,该式右端的水力梯度  $i$  应该取上述哪种形式的定义呢?类型 A 和 B 不可能同时适用。不难看出,在式(1)中,只有当水力梯度  $i$  为类型 A 时才合理。

## 2.5 水力梯度定义类型 A 及式(1)的一种向量化方法

在可微条件下,函数  $\tilde{h}$  在某点  $P_0$  沿方向  $l$  的方向导数  $\partial\tilde{h}/\partial l$  就等于函数  $\tilde{h}$  在该点的梯度  $\text{grad}\tilde{h}$  与与方向  $l$  同向的单位向量  $\mathbf{e}_l$  的点积<sup>[55]</sup>即

$$\partial\tilde{h}/\partial l = \text{grad}\tilde{h} \cdot \mathbf{e}_l \quad (17)$$

以二维问题为例。当  $l$  的含义不再特指渗流方向,而可取任意方向时,例如分别取坐标轴正方向,则  $P_0$  点处沿这两个方向的方向导数的相反数为

$$-\partial\tilde{h}/\partial l|_{l=x^+} = -\tilde{h}_x \quad (18)$$

$$-\partial\tilde{h}/\partial l|_{l=y^+} = -\tilde{h}_y \quad (19)$$

那么,

$$\mathbf{I} = -\tilde{h}_x \mathbf{i} - \tilde{h}_y \mathbf{j} \quad (20)$$

就可定义 1 个向量,它与函数  $\tilde{h}$  在该点的梯度满足

$$\mathbf{I} = -\text{grad}\tilde{h} \quad (21)$$

如果称  $\mathbf{I}$  为具有向量意义的“水力梯度”,那么,它其实就是总水头梯度对应的负向量,或可简称为负梯度。式(21)的  $\mathbf{I}$  与式(1)的  $i$  有本质不同:类型 A 的  $i$  是标量,建立在流线已知或假定已知的基础上;  $\mathbf{I}$  是向量,与流向并非无条件等价关系。

于是,式(1)的向量化形式可推广为

$$\mathbf{J} = \gamma_w \mathbf{I} \quad (22)$$

式中,  $\mathbf{J}$  的分量  $(-\gamma_w \tilde{h}_i)$  方向以坐标轴正向为正,且渗流课题中一般以纵坐标向上为正(坐标系  $x_i$ )。式(22)具有重要意义,是讨论渗透力方向的依据,本文 5.4 节将展开论述。4.2 节将论证式(22)的成立条件。

## 3 渗透力分析基础: Biot 固结理论

以往渗透力公式推导主要采用宏观的孔隙水隔离体法<sup>[27, 30, 38, 56]</sup>以及近年来微观的基于平衡微分方程的固相隔离体法<sup>[39]</sup>与孔隙水隔离体法<sup>[36]</sup>和最近由微观到宏观的土颗粒、水隔离体法<sup>[15-16]</sup>等。尽管基本都从静力平衡出发,不同隔离体法推导过程中的假设和

条件有时却迥乎不同,但所得渗透力算式(1)总体上毫无二致,偶遇例外,值得关注。

成败皆有因,隔离体法的盛行可能主要源于直观易懂和相对普及的优势,而其不足则因鲜有反求诸己的自我剖析而存而不论:例如有 1 个现象——隔离体法推导渗透力时通常孤立于或无视有效应力的存在,但在渗流课题中计算有效应力时,却又要额外考虑所求渗透力的贡献。国外学者 Das 前几年独辟蹊径,将渗流过程中有效应力和渗透力统一考虑,发展提出推导渗透力新方法——宏观的有效应力对比法<sup>[50]</sup>。该法一定程度上体现了考虑流固耦合的土水整体分析思想。

不知有汉,何论魏晋。大家知道, Biot 固结理论<sup>[57]</sup>的力学思想是整体分析,是描述多孔介质(含土体)耦合机理较严谨的多维理论,在一维情况下可退化为 Terzaghi 模型<sup>[46]</sup>。相因相生,本文尝试以 Biot 理论作为研究渗透力的理论框架,拟从多维和广义的角度进行力学分析,以克服以往方法一维局限性等不足。

应说明的是,本文的广义主要指采用广义有效应力原理;对 Biot 理论的解读尽量忠于原文。

### 3.1 Biot 固结理论的几点注解

有必要先澄清关于 Biot 理论的某些成见。个别文献将 Biot 固结理论<sup>[57]</sup>当作饱和土固结理论,然而, Biot 理论<sup>[57]</sup>最初并非针对饱和土体,而是考虑了孔隙水中存在气泡(air bubbles)的情况,只有在土性参数  $Q = \infty$  和  $\alpha = 1$  的条件下, Biot 理论才简化为饱和土体固结模型,此即后期文献中的常见形式。

还有几点值得阐明:① Biot 并没有采用土力学符号约定(这并不重要);② Biot 没有对土水势(渗流势)概念进行完整描述和运用,由此带来潜在的制约条件,如地下水位不变等;③忽略了土体体积力,直到 14 a 后在文献[58]中才加以补充;④使用的 Darcy 定律形式不是现在的常见形式,其渗透系数  $k$ ,相当于式(2)、(3)中渗透系数  $k$  除以水重度,即  $k/\gamma_w$ ;⑤定义的压缩系数  $a$  不是土力学中常见的压缩系数  $a_v$ ,而相当于体积压缩系数  $m_v$ ;⑥ Biot 并没有直接引用或使用 Terzaghi 有效应力原理,这点很重要;⑦ Biot 理论模型,尽管按全量符号撰写,但实际是基于增量描述的。

本节将在 Biot 理论<sup>[57]</sup>饱和土模型基础上,较完整地引入土力学符号约定、渗流势方程和土体体积力,但并不先入为主地引入渗透力概念;考虑多维情况;坐标系采用土力学应力课题中纵轴向下为正的笛卡尔右手系,记为  $\xi_i$ 。这与渗流课题通常以纵轴向上为正的惯用法(记为  $x_i$ )不同。涉及应力和渗流耦合的课题,无论如何选择单一坐标系,总存在彼此适应的问

题。渗流势表述等问题受此处坐标规则的影响较显著。

### 3.2 静力平衡方程

丁洲祥等<sup>[59]</sup>在固、液两相不可压缩前提下，得到忽略固相加速度和速度的两相体静力平衡微分方程：

$$\tau_{ji,j} + \rho f_i = D(\rho_f q_i) / Dt - \rho_f q_{j,j} q_i, \quad (23)$$

式中， $\tau_{ij}$  是欧拉应力张量， $\rho$  是饱和密度， $f_i$  是单位质量的体力， $\rho_f$  是液相密度， $q_i$  是宏观的平均渗流速度（不局限于 Darcy 定律，合适的渗流定律都可）， $D(\cdot) / Dt$  是  $(\cdot)$  的物质导数。

由式 (23) 可见，固液两相整体的静力平衡方程，在严谨意义上一般受渗流速度  $q_i$  影响，而导致方程右端不为零。但有 2 种情况，可使式 (23) 右端为零：

①无渗流即静水状态—— $q_i = 0$ ；②稳态且均匀渗流——稳态要求  $q_{i,i} = 0$  且当地加速  $\partial q_i / \partial t = 0$ ，均匀流要求迁移加速  $q_{i,n} q_n = 0$ ，从而  $D(\rho_f q_i) / Dt = 0$  得到满足。于是，式 (23) 相应地简化为连续介质力学对应的方程。

因此，在无渗流或稳态均匀渗流以及几何小变形条件下，式 (23) 就严格退化为 Biot 理论平衡微分方程：

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad (24)$$

式中， $\sigma_{ij}$  是  $\tau_{ij}$  退化而来的总应力，属于 Cauchy 应力， $b_i$  是两相整体体积力，源于  $\rho f_i$ 。若设重力方向为  $z$ ，则单位质量体力矢量  $f_i$  为  $(0, 0, g)$ ， $g$  为重力加速度。

在循序渐进的研究过程中，合理简化有益，所以暂设式 (24) 也适于瞬态渗流等情况，但应意识到，这其实忽略了式 (23) 右端对应的小变形构形变换项。

另外，土力学符号约定<sup>[57]</sup>通常仅规定应力符号，而不涉及体力。不妨补充：体力以坐标轴反向为正，与弹性力学约定<sup>[60]</sup>相反。于是，就式 (24) 而言，按土力学符号约定的单位体积两相体体力矢量  $b_i$  可写为

$$b_i = \rho_{\text{sat}} f_i = (0, 0, -\gamma_{\text{sat}}), \quad (25)$$

式中， $\rho_{\text{sat}}$  是饱和两相体密度， $\gamma_{\text{sat}}$  是饱和重度。

### 3.3 有效应力原理

前已述及，Biot<sup>[57]</sup>并未涉及 Terzaghi 有效应力原理。Biot 这样论述满足应力场平衡的土体应力分量：

“Physically we may think of these stresses as composed of two parts; one which is caused by the hydrostatic pressure of the water filling the pores, the other caused by the average stress in the skeleton. In this sense the stresses in the soil are said to be carried partly by the water and partly by the solid constituent.”。这种总应力分解为骨架平均应力和孔隙水静水压力（笔者注：此为测压管压力）的观点，与 Terzaghi 有效应力方程相似，但 Biot 并没明确给出该关系的数学表达，因此不能简单地将 Biot 观点等同于 Terzaghi 有效应力方程。

深入调研表明，这种谨慎是对的。

经分析，有两个途径可以得到 Biot 关于总应力分解的具体公式。第 1 个途径：通过 Biot 在文献[57]建立的土体应力场和渗流场的本构关系，其形式可概括为

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - \alpha \delta_{ij} \sigma, \quad (26)$$

式中， $\sigma_{ij}$  为总应力（增量）， $\sigma'_{ij}$  为“骨架平均应力”， $\sigma$  为“水压增量”（increment of water pressure）， $\alpha$  为土性参数， $\alpha = 2(1+\nu)G / [3(1-2\nu)H]$ ， $G$  为土体剪切模量， $\nu$  为泊松比， $H$  为一个附加物理常数。由于 Biot 将  $\sigma$  定义为水压增量而不是水压全量，因此，式 (26) 中的  $\sigma_{ij}$  和  $\sigma'_{ij}$  均具有增量的含义，该式描述的是增量形式的“有效应力方程”。该式右端最后一项前面的减号，乃是源于 Biot 采用了弹性力学符号约定。

第 2 个途径：Biot 后来在文献[58]中诠释“多孔材料的应力张量”时，隐含使用的方程可归纳为

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} \sigma, \quad (27)$$

式中， $\sigma'_{ij}$  是应力张量  $\sigma_{ij}$  分量，表示作用于固相占据的粒状材料单位尺寸立方体表面的部分力；此时  $\sigma$  表示施加于该立方体表面的液相部分的总法向拉力，且

$$\sigma = -fp. \quad (28)$$

式中， $f = S_p / S_b$ ， $S_b$  为粒状材料的任意横截面积， $S_p$  为该横截面积上由孔隙占据的部分面积， $p$  为孔隙中流体的静水压力(hydrostatic pressure)；式 (28) 右端的负号，同样因为应用了弹性符号惯用法。

显然，历史上先后出现的式 (26) 与式 (28) 中的  $\sigma$  具有不同的物理含义，前者是孔压增量，而后者是孔压全量。

如果进一步引入土力学符号约定及广义多孔介质概念，则一般意义（或广义）上全量形式的总应力分解方程，可以概括表示为

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \eta_{ij} p_w. \quad (29)$$

式中  $\sigma'_{ij}$  为广义有效应力张量； $p_w$  为孔隙水压力； $\eta_{ij}$  为广义有效应力系数张量；各向同性的  $\eta_{ij}$  可简化为  $\eta_{ij} = \eta \delta_{ij}$ ，其中包含两个参数： $\delta_{ij}$  为 Kronecker 符号，为常数，而  $\eta$  为各向同性有效应力系数值，与多孔介质材料性质有关，其物理意义是使有效应力方程成立的孔压分数。式 (29) 可退化为文献[61]中一维的广义有效应力方程。所以，式 (29) 可理解为饱和多孔介质的广义有效应力方程。

式 (29) 的两种简化：①对通常的各向同性饱和土体，一般认为 Terzaghi 有效应力方程成立，广义有效应力系数  $\eta = 1.0$ 。②按 Biot 有效应力方程式 (26) 和 (27)，应有  $\eta = \alpha$  或  $\eta = n$ ， $n$  是孔隙比。显然，Terzaghi 和 Biot 对广义有效应力系数  $\eta$  的理解和应用截然不同。

而对广义多孔介质,如岩石和混凝土, Lade<sup>[61]</sup>、Mitchell 等<sup>[62]</sup>和李广信<sup>[63]</sup>分别研究和归纳过 $\eta$ 的不同取值以及强度等效和变形等效的区别。研究现状主要是:广义有效应力系数 $\eta$ 与材料性质有关,但有时即便对同一材料(如土体), $\eta$ 也有多种不同定义和选择。由于曲高和寡、众口难调兼自身复杂性等原因,学界对 $\eta$ 的统一理论定义还未现共识。取精用弘,具体问题具体分析,当下亦不失明智。

### 3.4 总渗流势方程

渗流势(土水势)概念与孔隙水渗流相关<sup>[53]</sup>。渗流势的单位有比水势、容积势和重量势3种<sup>[53]</sup>。当单位采用容积势时,饱和两相体的总渗流势方程为

$$\psi = p_z + p_s + p_u \quad (30)$$

式中 $\psi$ 为以容积势为单位的总渗流势; $p_z$ 为孔隙水相对于零势参照面的重力势(位置势); $p_s$ 为静水压力引起的压力势,也表示静止孔隙水压力; $p_u$ 为超静孔压有关的荷载势。下标 $z$ 是 $\xi_i$ 在重力方向上的分量。

一般而言,饱和两相体中任意观察点 $\xi_i$ 的渗流势分量与地下水位和零势参考面有关。其中,位置势 $p_z$ 可表示为

$$p_z = (\tilde{z}_d - \tilde{z})\gamma_w \quad (31)$$

而压力势 $p_s$ 为

$$p_s = (\tilde{z} - \tilde{z}_g)\gamma_w \quad (32)$$

式中, $\tilde{z}_g$ 是地下水位坐标, $\tilde{z}_d$ 表示零势参考面坐标。

位置势与压力势之和为

$$p_z + p_s = (\tilde{z}_d - \tilde{z}_g)\gamma_w \quad (33)$$

可见,当地下水位与时间无关时,式(33)结果为常数;若零势参考面取地下水位,则式(33)结果为零。

土力学中孔压 $p_w$ 表示静水压力与超静孔压之和,它与总渗流势分量之间的关系(即孔压方程)为

$$p_w = p_s + p_u = (\tilde{z} - \tilde{z}_g)\gamma_w + p_u \quad (34)$$

在小变形及地下水位不随时间变化的条件下,存在 $\Delta\tilde{z} = \Delta\tilde{z}_g = 0$ ,此时才有

$$\Delta p_w = \Delta p_s + \Delta p_u = \Delta p_u \quad (35)$$

因此,某些应用中将孔压增量等同于超静孔压增量,其实隐含了这一前提条件。

可见,引入渗流势、零势参考面和地下水位等概念,有助于明晰孔隙水渗流问题。另外,对广义多孔介质,将土力学中总土水势改称总渗流势似乎更妥帖。

### 3.5 Darcy 定律

Biot 在 1955 年才开始使用全量形式的 Darcy 定律<sup>[58]</sup>,与其 1941 年论文中的增量形式<sup>[57]</sup>不同。由前文分析知,满足协调性要求的 Darcy 定律可写为

$$v_i = -(K_{ij}/\gamma_w)\partial\psi/\partial\xi_j \quad (36)$$

式中, $K_{ij}$ 是渗透系数张量, $v_i$ 是 Darcy 渗流速度,以

坐标轴正向为正。式(23)中的渗流速度 $q_i$ 若服从 Darcy 定律,则有 $q_i = v_i$ ,土力学中 $\gamma_f = \rho_f g = \gamma_w$ 。

Biot 理论模型还包含连续性条件、固相本构、几何关系及初边值条件等,因非本文重点,从略。

## 4 渗透力的力学根源分析

### 4.1 平衡方程与广义有效应力原理和渗透力

固液两相多孔介质的平衡方程是推导渗透力的重要依据之一。将 Biot 框架下广义有效应力方程式(29)代入静力平衡方程式(24),并考虑到有效应力系数与坐标无关,有

$$\sigma'_{ij,j} + \eta_{ij}p_{w,j} + b_i = 0 \quad (37)$$

可见,平衡方程式(37)中渗流场有关项采用孔压本身含义,而体力则取饱和重度对应的数值。

在实际工程中,地下水位(面)可以简化为水平面、斜平面或曲面(如土坝渗流自由面)等情况。对复杂情形,地下水位 $\tilde{z}_g$ 的含义拓展至函数意义。

地下水位 $\tilde{z}_g$ 具体函数在不同情况下将判然有别:当水位为水平面时, $\tilde{z}_g$ 函数与研究点坐标无关,仅是时间 $t$ 的函数,即 $\tilde{z}_g = \tilde{z}_g(t)$ ,这时压力势和荷载势容易区分;而当地下水位为斜平面或曲面时, $\tilde{z}_g$ 函数与坐标和时间有关,即 $\tilde{z}_g = \tilde{z}_g(\xi_i, t)$ 。对于后者情况,式(32)是否还是压力势的合理表示,却发人深思,因为压力势的概念已趋于晦涩难懂,进而影响荷载势的诠释,所以这时压力势和荷载势不易截然区分。

因此,以下将以压力势和荷载势是否易于区分为标准,按两类情况分别进行渗透力的力学分析。

(1) 压力势和荷载势易区分的情况

此时,地下水位 $\tilde{z}_g$ 与当前点坐标 $\xi_i$ 无关, $\tilde{z}_{g,j} = 0$ 。将孔压方程式(34)代入式(37),有

$$\sigma'_{ij,j} + \eta_{ij}(p_{s,j} + p_{u,j}) + b_i = 0 \quad (38)$$

考虑到压力势 $p_s$ 的梯度满足

$$p_{s,j} = (z_j - z_{g,j})\gamma_w = \gamma_w z_j = \gamma_w e_j \quad (39)$$

其中, $e_j$ 是重力方向 $j$ 的坐标基矢量。于是,式(38)进一步表示为等价形式

$$\sigma'_{ij,j} + \eta_{ij}p_{u,j} + b'_i = 0 \quad (40)$$

式中, $b'_i$ 是对应于有效重度(浮重度)的单位体积多孔介质体力,即

$$b'_i = \gamma_w \eta_{ij} e_j + b_i \quad (41)$$

当重力沿着 $i=3$ 或 $z$ 的方向时, $b'_i$ 可写为显式形式

$$b'_i = (0, 0, \eta\gamma_w - \gamma_{sat}) \quad (42)$$

根据导出的固相或骨架静力平衡方程式(40),将其中渗流场有关项定义为

$$\hat{J}_i = \eta_{ij}p_{u,j} \quad (43)$$

式中, $\hat{J}_i$ 是广义饱和和多孔介质渗透力的一种数学表述。

在土力学历史上，以数学形式定义新概念并不罕见。譬如，Terzaghi 有效应力<sup>[46]</sup>概念其实就是早期一种数学定义法（其分析对象是薄层砂土，关键依据是孔压不引起可观测的变形和抗剪阻力变化，但未见具体试验数据）；前述 Terzaghi 与合作者推导的渗透力<sup>[35]</sup>实际也是数学定义法（按总渗流势方程）。

作为对比，由式（40），当平衡方程中渗流场相关项取超静孔压时，体力应按有效重度计算。

（2）压力势和荷载势难分辨的情况

这时，孔压  $p_w$  对应于测压管压力，容易通过观测得到（测压管水头减位置水头结果乘以  $\gamma_w$ ）。因为  $p_{w,j} = \psi_{,j} - p_{z,j} = \psi_{,j} + \gamma_w e_j$ ，故平衡方程式（37）等价于

$$\sigma'_{ij,j} + \eta_{ij} \psi_{,j} + b'_i = 0 \quad (44)$$

式中， $b'_i$  的定义同式（41）。可见，平衡方程式（44）中渗流场项为总渗流势含义时，体力项应以有效重度考虑。

式（44）与式（40）的区别在于与渗流场有关的场变量不同，两者分别为总渗流势和荷载势。

根据式（44），同理可以定义

$$\tilde{J}_i = \eta_{ij} \psi_{,j} \quad (45)$$

式中， $\tilde{J}_i$  是广义饱和多孔介质渗透力的另一形式。

（3）平衡方程的统一形式及广义渗透力

由式（40）和式（44），得到平衡方程的 1 种统一形式：

$$\sigma'_{ij,j} + J_i + b'_i = 0 \quad (46)$$

式中， $J_i$  根据地下水位情况取值不同，当  $p_s$  和  $p_u$  容易区分时， $J_i = \hat{J}_i$ ；而当两者难区别时， $J_i = \tilde{J}_i$ 。

分析来看，式（45）也适于地下水位为非水平面的工况，因此意义更普遍，即  $J_i = \tilde{J}_i$  是普适的。

按上述推导过程及张量代数分析， $J_i$  的数学物理意义是广义有效应力系数张量  $\eta_{ij}$  与总渗流势（容积势）梯度  $\psi_{,j}$  的点积，此内积运算产生一个新的一阶张量（矢量）。本文将  $J_i$  称为“广义渗透力”，主要原因是它在理论上适用于两相饱和和广义多孔介质。

广义渗透力  $J_i$  本身是多维的，不需要由一维向多维推广，反而可由多维退化为一维，体现了张量分析的优势。对比来看，传统土力学关于渗透力的推导式

（1）基本都是一维情况，而且有时需要倒果为因的前提条件或持既得之见，即事先无条件地假定渗透力为体积力，且其方向与渗流方向相同，然后导出结果。这种传统分析方法对多维问题并不适用，主要因为多维问题中渗透力与渗流方向未必总相同（详见 5.4 节）。

早期土力学研究中判定渗透力是体积力的具体原因通常不太明确，一般依据渗透力式（1）结果具有重量纲这一事实，而忽视了其渗透力推导方法本身存

在的某种逻辑学错误：渗透力是体积力这一论断的原因既是渗透力推导的结果也是推导的前提。这种矛盾尤其多见于宏观的孔隙水隔离体法。弃故揽新，补苴罅漏。不难发现，广义渗透力  $J_i$  与体力矢量  $b'_i$  在平衡方程中的形式和地位基本一致，如果将其合并成一项：

$$\beta'_i = J_i + b'_i \quad (47)$$

式（46）就此可记为

$$\sigma'_{ij,j} + \beta'_i = 0 \quad (48)$$

比较式（24）与式（48），两者在数学形式上何其相似——均对应于弹性力学静力平衡微分方程<sup>[64]</sup>。然而，两者的物理或力学意义迥异：式（24）为饱和两相整体的总应力平衡方程，而式（48）却是固相或骨架单相的平衡方程。数学形式简约且一致而不失思想丰富。

$\beta'_i$  的意义。因为式（48）中  $\beta'_i$  对应于弹性力学静力平衡方程体力项，不妨称其为两相体骨架的“广义体积力”。如果有效应力  $\sigma'_{ij}$  具有等效意义，那么  $\beta'_i$  也相应地包含某种等效含义。“广义体积力”  $\beta'_i$  有两部分构成： $J_i$  和  $b'_i$ ，前者反映孔隙水渗流场梯度影响，后者表示静止孔隙水浮力作用。所以，广义渗透力可视为一种体积力的原因及意义就得到了新的诠释。

进一步看，通常的渗透力、浮力和有效应力三者，其实可以统一到式（46）或（48），而不必一味地隔离开来单独研究。这两个公式也就提供了考虑渗透力和浮力影响的广义有效应力计算方法，就此笔者拟另文探讨。

4.2 Terzaghi 有效应力方程范畴内的渗透力

在 Terzaghi 有效应力方程适用范围内，因为  $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ ，故式（43）、（45）的广义渗透力  $J_i$  分别简化为

$$J_i = \bar{J}_i = p_{u,i} \quad (49)$$

$$J_i = \tilde{J}_i = \psi_{,i} \quad (50)$$

其中，式（50）具有更普遍的意义。注意： $J_i$  数值为正表示方向朝坐标轴负向，即遵循本节前述符号约定，以及纵坐标正向朝下的选择，这与式（22）中  $\mathbf{J}$  的情况不同。进行坐标变换，并考虑容积势和重量势的转换关系，式（50）在数学上等价为

$$\begin{aligned} J_i &= \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \xi_i} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_n} \delta_{ni} \\ &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = -\gamma_w \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x_i} = -\gamma_w \tilde{h}_{,i} \end{aligned} \quad (51)$$

式（51）最后一个等号右端项，就是式（22）渗透力  $\mathbf{J}$  的分量形式。这样就证明了传统渗透力的向量化公式（22），其实是本文广义渗透力在 Terzaghi 有效应力方程范畴内的退化结果。或者说，式（22）适用范围实

际受隐含的 Terzaghi 有效应力方程限制。

值得关注的有：文献[53]介绍 Biot 理论平衡微分方程，“根据有效应力原理，总应力为有效应力和孔隙压力  $u$  之和”，接着将平衡方程中  $\partial u / \partial x$ ， $\partial u / \partial y$  和  $\partial u / \partial z$ （本文简记为  $u_{,j}$ ）称为“各方向的单位渗透力”。通过上述分析： $u_{,j}$  是各方向单位渗透力的提法可能百密一疏，因为按式(49)，只有当  $u$  表示超静孔压而非孔压时才较严谨，但还受隐含的地下水位假设限制。

## 5 渗透力的力学辨析与探讨

科研工作中使人困惑的常常不是未知的知识而是已有的知识。渗透力概念似不例外。

### 5.1 既有渗透力定义的逻辑学初探

渗透力作为一般概念，自然应服从逻辑学原理<sup>[65]</sup>。按逻辑学，概念的定义主要有精确定义（降低模糊性）和理论定义（促进理论理解）等 5 种。而就推理或语言其他信息性用法而言，属加种差的内涵定义方法通常最为有效和常见。

土力学文献中渗透力的定义有很多种，其中违反逻辑规则的情况不少。1.1 节总结的第 2 类渗透力定义中，如渗透力是“渗流水作用于单位体积土体上的力（体力）”：被定义项本身出现在定义项中，可能违反了“定义不能循环”的逻辑规则。还有渗透力是“通过土体的水流引起施加在土体本身上的某种力”<sup>[34]</sup>，似乎违反了定义不能使用歧义、晦涩或比喻的语言来表述的规则。这种定义在逻辑学中无效。

而对 1.1 节概括的第 1 类渗透力定义，如 Lambe & Whitman“摩擦拖曳力”、Craig“相应于能量迁移的力”和其他学者的“推动、摩擦和拖曳综合作用力”等：这类定义的“属”之间差别明显，甚至某些“属”成为其他“属”的“种”，仍存在一定的模糊性和歧义，还不能较充分完整地作为词典定义或精确定义。

土力学界对渗透力概念定义的期望通常不仅是精确的问题，更在于寻求全面的理解。这必然涉及概念的理论定义——给出概念所适用对象的一种理论上充分或科学上有用的精确描述。前文汇集的渗透力第一类定义，一定程度上反映了人们对第二类定义向精细化方向改进的努力，然而这些定义分别对应的数学表述结果大多数情况下完全相同（即式(1)），没有体现渗透力概念内涵扩充或变化而带来的不同，这并不符合逻辑常识。所以，除了肯定以往渗流力定义在促进理解方面产生过的积极作用外，探索同时满足土力学和逻辑学意义的较完善的渗透力理论定义，依然委重投艰。

### 5.2 本文定义的自剖及改进途径

土力学是物理学分支——力学中的一个研究领

域。渗透力概念是力学的，也是物理的。物理概念定义方法有多种选择，其中数学定义法中的数学推导法是根据已知的概念和规（定）律，借助数学推导而定义概念的方法。此法定义的概念一般具有确定性。

本文广义渗透力定义式（43）和（45）就是数学推导法的结果。推导依据是广义 Biot 固结理论框架内的流固耦合、有效应力、体力和广义多孔介质等概念与 Biot 静力平衡方程、广义有效应力方程、总渗流方程等反映的规律。由此导出的渗透力概念比较清晰明确，不具任意性，在力学上相对严谨。

从逻辑学原理看，本文广义渗透力概念兼有规定定义和理论定义的特点。因为被定义项是用于意指式（43）或（45）这个数学定义项所意味的对象的一个建议或方案，这符合规定定义的特征。广义渗透力式（43）或（45）试图给出其适用对象的一种理论较充分或科学有用的精确描述，这也符合理论定义的特点。理论定义的完善与理论的改进密切相关。本文广义渗透力，不是基于经典 Terzaghi 固结理论，而是基于更先进的广义 Biot 固结理论，进行逻辑演绎的结果。这是广义渗透力概念有望促进理解的根本原因。还有，广义渗透力实质也体现了融贯论而非符合论的研究思想。

综上所述，广义渗透力  $J_i$  可用语言表述为：固液两相多孔介质的广义渗透力，在性质上是进行隔离考察时液相渗流驱动下对固相的抽象作用力，它与广义有效应力梯度  $\sigma'_{ij,j}$  和有效体力  $b'_i$  共同控制固相的静力平衡，在数量上是广义有效应力系数张量与总渗流势（容积势）梯度的点积。该概念的外延是适用于广义有效应力方程的各类固液两相多孔介质。随着认识水平的提高，此概念适用的对象范围可能会扩大，而其内涵或有新的完善。

但本文  $J_i$  的内涵能否进一步改进？按融贯论思想，应探求更基础的推导前提。改进依据两点：①鉴于严谨意义上 Biot 平衡方程式（24）仅适于无渗流和稳态均匀渗流的不足，可按丁洲祥等平衡方程式（23）的小变形退化方程，来考虑非稳态等各渗流情况；②总渗流势方程式（30）改进为 Bernoulli 方程<sup>[27]</sup>：

$$\psi = p_z + p_w + \frac{1}{2} \rho_f q_i q_i \quad (52)$$

于是，按前文方法可导出骨架静力平衡微分方程：

$$\sigma'_{ij,j} + \underline{J}_i + b'_i = 0 \quad (53)$$

式中， $\underline{J}_i$  不妨称为 1 种改进的广义渗透力，定义为

$$\underline{J}_i = \eta_{ij} \psi_{,j} - \frac{1}{2} \rho_f \eta_{ij} (q_n q_n)_{,j} - \frac{D(\rho_f q_i)}{Dt} + \rho_f q_{j,j} q_i \quad (54)$$

对比式（54）、（45）：改进后的广义渗透力  $\underline{J}_i$  比  $J_i = \tilde{J}_i$  多考虑了渗流速度  $q_i$  的影响，即涉及单位体积

液相动能的梯度、 $q_i$  物质时间导数以及  $q_i$  散度与  $q_i$  乘积有关的 3 项内容, 从而直接体现了液相“渗流”对固相的作用力, 并通过平衡方程式 (53) 反映其对有效应力  $\sigma'_{ij}$  的影响。 $J_i$  在一定条件下可退化为  $J_i$ 。

当渗流过程中固相的速度和加速度不可忽略时, 以上静力平衡分析就不适用了。如果液相不是理想流体, 而需要考虑黏滞性时, 流体动力学 Navier-Stokes 理论和边界层等理论可能提供一定的理论支撑, 但此时流体动压力因剪切力的存在将不再为各向同性等原因, 多孔介质流固耦合情况更复杂。这两个方向是深入和拓展渗透力内涵研究的难点。

### 5.3 渗透力与体积力

渗透力力学性质是体积力吗? 这无条件成立吗?

李广信最近强调了渗透力是体积力的观点<sup>[15-16]</sup>。

4.1 (3) 节已提到, 在土力学研究历史中渗透力是体积力的观点, 一方面可能因为渗透力表达式结果与重量纲相同, 另一方面是作为某些推导方法前提条件的需要。存在即合理, 笔者理解为这并非指存在即正确, 而更可能是指某一种客观存在 (存在), 一定有其存在的原因并服从其存在的发展规律 (合理)。我们关心的是合的什么理, 即探明“理” (因和律)。本文在 4.1 (3) 节也从新角度, 补充了渗透力作为体积力的原因和意义的解释, 作为参考。

多学科交叉研究, 相得益彰。弹性力学和流体力学等知识对深入探讨渗透力的力学属性大有裨益。

众所周知, 弹性力学相对比较严谨, 在徐芝纶<sup>[60]</sup>、Timoshenko 等<sup>[64]</sup>的弹性力学中认为: 外力分为两种——表面力和体积力; 表面力是分布在物体表面的力, 例如一个物体对另一物体的压力或静水压力; 体积力是分布在物体体积内的力, 例如重力、磁力或物体在运动情况下的惯性力。应用中通常取单位面积的表面力和单位体积的体积力并分别分解为 3 个平行于坐标方向的分量。

弹性力学的应力<sup>[64]</sup>: 处于平衡的物体, 在外力作用下物体不同部分之间会产生内部力, 该内部力的集度称为应力; 应力通常分解为法向应力和剪应力两部分。

根据上述概念, 有两点值得注意: ①流体静水压力的性质——按弹性力学, 作用在其他物体表面上的流体静水压力属于表面力, 即该物体受到的外力, 而按流体力学, 单相流体内部的流体静水压力却属于应力, 即内力。②弹性力学中, 判断某一量是否是表面力 (或体积力), 标准并非其量纲——这仅是一个必要而非充分的条件。举例: 应力和表面力, 都可作为每单位面积的力, 但两者性质不同, 分别属于内力和外力, 如果仅依据量纲相同就把应力定性为表面力, 明

显不合理, 反之亦然。

先讨论浮力的性质。工程上常把浮力当成体积力, 现在简析其合理性。题设: 静水中某固相颗粒 N 的外表面积为  $S_N$  并占据实心体积空间为  $V_N$ , 处于瞬时静止状态, 试分析其受力情况。有两种解法: ①认为 N 受重力  $W$  和施加在  $S_N$  的静水压力  $p(z)$  作用, 即体积力和表面力两种作用; ②认为 N 受  $W$  和浮力  $F$  作用, 即两种体积力作用。两种方法都能建立 N 的平衡条件。思考: 浮力究竟是体积力还是表面力?

分析: 再假设颗粒 N 出现一定的空心  $V_C$ , 实际体积  $V_A = V_N - V_C$  但外表面  $S_N$  等条件不变; 重复上述两法的分析。结果对比: 两法中重力  $W$  都同等减少, 但  $S_N$  上的表面力和浮力  $F$  都不变。推理: 如果浮力  $F$  是体积力, 那么按弹性力学——体积力是分布在物体体积内的力, 既然颗粒 N 实际体积发生  $V_N \rightarrow V_A$  变化, 就应有体积力的相应变化, 但结果是重力  $W$  发生了变化而浮力  $F$  却没变。推论: 重力符合体积力的定义, 而浮力  $F$  并不符合——与体积  $V_N$  和  $V_A$  无关而取决于外表面  $S_N$ 。

浮力  $F$  源于作用于颗粒 N 的表面力, 对表面力沿  $S_N$  的面积积分结果可按坐标轴方向分解为 3 个分量, 其中逆重力方向分量对应于通常所说的浮力。作为表面力面积积分结果某个分量的浮力, 并不属于弹性力学和流体力学中対力的基本分类。静水中若干颗粒的集合体, 也适用这种推理分析。

上述颗粒空心化假设可用于对渗透力是体积力观点的逻辑严谨性进行推敲。基于该理由也会得到类似推论: 在颗粒 N 外表面  $S_N$  相同情况下渗透力与不同的体积  $V_A$  和  $V_N$  无关, 故不符合弹性力学体积力和流体力学质量力<sup>[66-67]</sup> (材料均质时又称为体积力) 定义。

不支持渗透力是体积力的第 2 个可能的原因, 在于以下关于“体积力”定义的理解<sup>[68]</sup>——①认为体积力不同于接触力 (表面力), 体积力不需要接触就能传递; ②常见的压力梯度不是体积力, 因为需要系统之间的接触才能存在。

如果压力梯度不是体积力的观点是合理的, 那么会有哪些推论? 对我们的常识性认识有哪些影响? 分别讨论  $\sigma'_{ij}$  和  $J_i$ : ①按本文式 (46),  $\sigma'_{ij} + J_i + b'_i = 0$ , 有效应力梯度  $\sigma'_{ij}$  也是一种压力梯度——有效应力是“研究平面内所有粒间接触面上接触力的法向分力之总和, 除以研究平面的总面积所得到的平均应力<sup>[18]</sup>”; 所以, 作为接触力的有效应力的梯度, 不是体积力; 在土力学界, 确实极少有人将  $\sigma'_{ij}$  的性质解释为一种体积力, 该推论容易接受。②渗透力  $J_i$ , 在力学平衡方程中的本质有时可理解为与渗流有关的孔压梯度  $p_{w,i}$  的一部分—— $p_w$  对固相而言是液相施加在固相

表面的接触压力,但以往在土力学界,同样作为一种压力梯度的渗透力却容易被接受为体积力。因而,如果要坚持渗透力是体积力,恐怕就需要否定压力梯度不是体积力观点的合理性。这不能不令人深思。

近来文献[13]还提出渗透力不是体积力的一种判断依据——“由于动水压力和拖曳力都是面力,所以,渗透力实质上也是面力”。文献[1]和[69]还就渗透力概念的真实性与虚拟性进行过不同意见的讨论。

综上,本节提出并简要总结了渗透力是体积力的正、反两方面的判断依据,供辩证性思考,但笔者不作倾向性结论。

#### 5.4 渗透力与渗流速度的方向

渗透力方向无条件地等同渗流方向吗?如何论证?

式(22)给出了向量化的传统渗透力表达, $\mathbf{J}=\gamma_w \mathbf{I}$ ,可见:渗透力 $\mathbf{J}$ 是“水力梯度” $\mathbf{I}$ 的 $\gamma_w$ 倍,两者同向,与渗透系数张量 $K_{ij}$ 是否各向同性无关(文献[15,16]认为对各向同性渗流, $\mathbf{J}$ 与 $\mathbf{I}$ 的方向相一致,笔者觉得这是对的,但似乎去掉该限制条件也能成立)。而根据 Darcy 定律式(36), $\mathbf{I}$ 虽然与 Darcy 渗流速度 $\mathbf{v}$ (分量为 $v_i$ )有关,但 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{I}$ 未必同向——取决于 $K_{ij}$ 性质,故 $\mathbf{J}$ 与 $\mathbf{v}$ 的方向关系较复杂——涉及渗流速度定律。简要论证如下:

设式(36)中 $K_{ij}$ 主方向与坐标轴同向;对 $(x,z)$ 坐标系,记 $k_x$ 和 $k_z$ 分别是 $x$ 和 $z$ 方向渗透系数主值,且 $k_x = mk_z$ , $m$ 为实数;记 $i_x$ 和 $i_z$ 是 $\mathbf{I}$ 在对应方向的分量。

根据定义,Darcy 渗流速度 $\mathbf{v}$ 与 $x$ 轴的夹角 $\alpha$ 满足

$$\cos \alpha = v_x / \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = mi_x / \sqrt{m^2 i_x^2 + i_z^2}, \quad (55)$$

而渗透力 $\mathbf{J}$ 和 $\eta J_i$ ( $\eta_{ij}$ 各向同性)与 $x$ 轴夹角 $\beta$ 满足

$$\cos \beta = J_x / \sqrt{J_x^2 + J_z^2} = i_x / \sqrt{i_x^2 + i_z^2}. \quad (56)$$

分析:二(多)维情况下,只有当 $m=1$ 即渗透性各向同性时, $\alpha$ 和 $\beta$ 相等,渗透力和流速方向才相同(一维问题两者自然同向)。商榷:不分条件就凭一维结果断定多维状态下渗透力一定沿流向,似乎不合适。

#### 5.5 渗透力与度量单位

渗透力 $\mathbf{J}$ 和 $J_i$ 的度量单位是什么?单位体积的两相体、固相还是液相?

许多土力学文献中认为渗透力式(1) $j=\gamma_w i$ 的度量单位是单位体积的土体或两相体,也有少数文献认为是单位体积的骨架颗粒,还有著作<sup>[36]</sup>认为是单位体积的液相或孔隙水。

笔者根据平衡方程式(46)和关系(51)认为,渗透力 $J_i$ 和 $\mathbf{J}$ 的度量单位与 $b'_i$ 一致——单位体积的两相整体。这与大部分土力学著作中的观点相符。

少数文献<sup>[36,39]</sup>提出传统渗透力修正公式—— $j=n\gamma_w i$ ,认为在单位体积两相体为度量单位条

件下的传统渗透力 $j=\gamma_w i$ 是错误的<sup>[36]</sup>。若按本文广义渗透力定义 $J_i=\eta_{ij}\psi_{,j}$ 来解释,单从结果看: $j=n\gamma_w i$ 正是 $J_i=\eta_{ij}\psi_{,j}$ 在 Biot 有效应力方程<sup>[58]</sup> $\eta_{ij}=n\delta_{ij}$ 适用条件下退化的结果,因而这种意义上前述修正公式也合理。但是,在常见问题中土力学界尚未普遍接受用 Biot 有效应力方程修正 Terzaghi 有效应力方程的观点。

#### 5.6 关于渗透力的一个悖论

有一种代表性观点<sup>[30]</sup>:在黏土中,只有克服结合水抗剪强度才能开始渗流,相应的水头梯度,称为黏土的起始水力梯度 $i_0$ ;当 $i \leq i_0$ 时,渗流速度 $v=0$ 。

悖论问题:当水力梯度 $0 < i \leq i_0$ 时,渗流速度 $v=0$ ,此时是否存在渗透力?

如果按渗透力定义式(1), $j=\gamma_w i$ ,那么可知 $j$ 与 $v$ 大小无关,只取决于水力梯度 $i$ ,而题设中 $i \neq 0$ ,故渗透力存在即 $j \neq 0$ 。但若按以往理解,如渗透力是“渗透水流施于单位土体内土粒上的拖曳力<sup>[18]</sup>”,那么既然题设 $v=0$ ,故渗透力不存在即 $j=0$ 。

笔者对此困惑,这里提出,谨请同行思辨和解悖。

## 6 结 论

本文研究了经典土力学中“渗流力”概念的现状、矛盾及其力学根源,并探讨了渗透力多维化和广义化的力学基础,得到以下4点新认识。

(1)水力梯度及达西定律的表述两者之间应满足协调性要求。以往采用的非协调表述方法在数学上不严谨。本文分别概括提出了两类协调的表述形式。经典土力学中 Terzaghi 定义的水力梯度,严格意义上并不是数学梯度,而是总水头函数沿流线的方向导数的相反数。常见渗透力式(1)中水力梯度在协调性上对应于本文定义类型A。还提出了式(1)的向量化方法。

(2)在 Biot 固结理论框架内引入总渗流势方程、体力和广义有效应力方程,并按土力学符号约定推导出适于多种多孔介质的广义渗透力矢量 $J_i$ 数学定义,阐释了其定性和定量的内涵及外延。常见的渗透力表述式其实隐含使用了 Terzaghi 有效应力方程。

(3)针对 Biot 理论不足,按新近固结理论成果和 Bernoulli 方程来考虑渗流速度的影响,探讨了固相加速度和速度忽略条件下一种改进的广义渗透力 $\underline{J}_i$ 。

(4)还就渗透力若干问题提出商榷意见:①建议渗透力概念研究中重视逻辑学原理;②就渗透力是体积力的观点总结和补充了正、反两方面的判断依据;③认为传统渗透力式(1)及本文式(22)和 $J_i$ 的度量单位是单位体积的两相整体,而有的渗透力修正公式可能隐含使用了 Biot 有效应力方程;④渗透力 $\mathbf{J}$ 、水力梯度 $\mathbf{I}$ 和渗流速度 $\mathbf{v}$ 之间的方向关系,宜按渗透

力数学定义和渗流定律公式综合分析确定, 等。望大家指正。

附注: 在压力势  $p_s$  和荷载势  $p_u$  易区分且 Terzaghi 有效应力方程适用条件下, 对由片光滑闭曲面  $S$  (其外法向单位矢量为  $n_i$ ) 围成的空间闭区域  $V$  内的土体, 若  $p_s$  和  $p_u$  及其一阶偏导数在  $V$  上连续, 则根据高斯散度定理, 有

$$\oint_S p_s n_i dS = \int_V p_{s,i} dV, \quad \oint_S p_u n_i dS = \int_V p_{u,i} dV,$$

式中,  $p_{s,i}$  和  $p_{u,i}$  分别对应于单位体积土体的浮力与渗透力。

致 谢: 笔者衷心感谢各匿名审稿人从不同角度为本文提出的多次修改意见和推荐的参考文献, 以及编委会和编辑部提供本文的刊用机会; 感谢同事赵成刚、石志飞、李旭、李伟华、白冰和李涛等教授贡献的宝贵意见、同济大学朱合华教授的指点与鼓励以及 University of Pittsburgh 的 Jeen-Shang LIN 教授的会议交流; 特别感谢国家留学基金委的访学资助及 University of Alaska Anchorage 的 Joey YANG 教授于 2014 年就本文初稿提出的改进建议; 感谢李广信教授若干文章的深刻见解给予的启发; 研究生王思远协助进行参考文献英文翻译工作, 一并鸣谢。

#### 参考文献:

- [1] 沈珠江. 莫把虚构当真实——岩土工程界概念混乱现象剖析[J]. 岩土工程学报, 2003, 25(6): 767 - 768. (SHEN Zhu-jiang. No confusing fiction with reality: analysis of misunderstanding of some concepts in geotechnical engineering[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2003, 25(6): 767 - 768. (in Chinese))
- [2] 毛昶熙. 渗流作用下的坝坡稳定有限单元分析[J]. 岩土工程学报, 1982, 4(3): 87 - 106. (MAO Chang-xi. Finite element analysis for slope stability of earth dams under seepage flow[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1982, 4(3): 87 - 106. (in Chinese))
- [3] 陈愈炯. 关于“渗流作用下的坝坡稳定有限单元分析”一文的讨论[J]. 岩土工程学报, 1983, 5(3): 135 - 138. (CHEN Yu-jiong. Discussion on “Finite element analysis for slope stability of earth dams under seepage flow”[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1983, 5(3): 135 - 138. (in Chinese))
- [4] 毛昶熙, 李吉庆, 段祥宝. 渗流作用下土坡圆弧滑动有限元计算[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(6): 746 - 752. (MAO Chang-xi, LI Ji-qing, DUAN Xiang-bao. Finite element calculation on circular slip of earth slope under seepage action[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001, 23(6): 746 - 752. (in Chinese))
- [5] 陈祖煜. 关于“渗流作用下土坡圆弧滑动有限元计算”的讨论之一[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(3): 394 - 396. (CHEN Zu-yu. Discussion on “Finite element calculation on circular slip of earth slope under seepage action”[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(3): 394 - 396. (in Chinese))
- [6] 毛昶熙, 段祥宝. 关于渗流的力及其应用[J]. 岩土力学, 2009, 30(6): 1569 - 1574, 1582. (MAO Chang-xi, DUAN Xiang-bao. On seepage forces and application[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(6): 1569 - 1574, 1582. (in Chinese))
- [7] 毛昶熙, 段祥宝, 吴良骥. 再论渗透力及其应用[J]. 长江科学院院报, 2009, 26(增刊 1): 1 - 5. (MAO Chang-xi, DUAN Xiang-bao, WU Liang-ji. Discussion again on seepage force and its application[J]. Journal of Yangtze River Scientific Research Institute, 2009, 26(S1): 1 - 5. (in Chinese))
- [8] 陈津民. 土中渗透力的定义和论证[J]. 岩土工程界, 2008, 11(10): 22 - 24. (CHEN Jian-min. Definition and analysis of seepage force in soil[J]. Geotechnical Engineering World, 2008, 11(10): 22 - 24. (in Chinese))
- [9] 李广信. 岩土工程 50 讲——岩坛漫话[M]. 2 版. 北京: 人民交通出版社, 2010. (LI Guang-xin. Fifty topics in geotechnical engineering: discourses on geotechnics[M]. 2nd ed. Beijing: China Communications Press, 2010. (in Chinese))
- [10] 李广信, 李学梅. 土力学中的渗透力与超静孔隙水压力[J]. 岩土工程界, 2009(4): 11 - 12. (LI Guang-xin, LI Xue-mei. Seepage force and excess pore water pressure in soil mechanics[J]. Geotechnical Engineering World, 2009(4): 11 - 12. (in Chinese))
- [11] 雷国辉, 郑 强. 瑞典条分法剖析引发的有效应力和渗透力概念问题[J]. 岩土工程学报, 2012, 34(4): 667 - 676. (LEI Guo-hui, ZHENG Qiang. Issues on concepts of effective stress and seepage force arising from anatomizing Swedish slice method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, 34(4): 667 - 676. (in Chinese))
- [12] 李广信. 土体、土骨架、土中应力及其他——兼与陈津民先生讨论[J]. 岩土工程界, 2005, 8(7): 13 - 17. (LI Guang-xin. Soil mass, soil skeleton, stress in soils, etc.: Discussion with Mr. CHEN Jin-min[J]. Geotechnical Engineering World, 2005, 8(7): 13 - 17. (in Chinese))
- [13] 蒋中明, 龙 芳, 熊小虎, 等. 边坡稳定性分析中的渗透力计算方法考证[J]. 岩土力学, 2015, 36(9): 2478 - 2486, 2493. (JIANG Zhong-ming, LONG Fang, XIONG Xiao-hu,

- et al. Study of calculation methods of acting force of seepage in slope stability analysis[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, **36**(9): 2478 - 2486, 2493. (in Chinese))
- [14] 祝恩阳. 考虑孔隙水浮力的渗透力公式推导[J]. *力学与实践*, 2015, **37**(6): 761 - 762. (ZHU En-yang. Derivation of the seepage force [J]. *Mechanics in Engineering*, 2015, **37**(6): 761 - 762. (in Chinese))
- [15] 李广信. 论土骨架与渗透力[J]. *岩土工程学报*, 2016, **38**(8): 1522 - 1528. (LI Guang-xin. On soil skeleton and seepage force[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2016, **38**(8): 1522 - 1528. (in Chinese))
- [16] 李广信. 高等土力学[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2016. (LI Guang-xin. *Advanced soil mechanics*[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2016. (in Chinese))
- [17] 刘成宇. 土力学[M]. 2版. 北京: 中国铁道出版社, 2000. (LIU Cheng-yu. *Soil mechanics*[M]. 2nd ed. Beijing: China Railway Press, 2000. (in Chinese))
- [18] 钱家欢. 土力学[M]. 南京: 河海大学出版社, 1988. (QIANG Jia-huan. *Soil mechanics*[M]. Nanjing: Hohai University Press, 1988. (in Chinese))
- [19] 高大钊. 土力学与基础工程[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1999. (GAO Da-zhao. *Soil mechanics and foundation engineering*[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 1999. (in Chinese))
- [20] 卢廷浩. 土力学[M]. 2版. 南京: 河海大学出版社, 2002. (LU Ting-hao. *Soil mechanics*[M]. 2nd ed. Nanjing: Hohai University Press, 2002. (in Chinese))
- [21] LAMBE T W, WHITMAN R V. *Soil mechanics*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1969.
- [22] CRAIG R F. *Craig's soil mechanics*[M]. 7th ed. London: Taylor & Francis Group, 2004.
- [23] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (LI Guang-xin. *Advanced Soil Mechanics* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))
- [24] 松岗元. 土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001. (MATSUOKA H. *Soil mechanics*[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2001. (in Chinese))
- [25] 姚仰平. 土力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004. (YAO Yang-ping. *Soil mechanics*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004. (in Chinese))
- [26] 张克恭, 刘松玉. 土力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2001. (ZHANG Ke-gong, LIU Song-yu. *Soil mechanics*[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2001. (in Chinese))
- [27] 赵成刚, 白冰. 土力学原理(修订本)[M]. 北京: 清华大学出版社, 北京交通大学出版社, 2009. (ZHAO Cheng-gang, BAI Bing. *Fundamentals of soil mechanics (modified ed.)* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, Beijing Jiaotong University Press, 2009. (in Chinese))
- [28] 张梦喜. 土力学原理[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2007. (ZHANG Meng-xi. *Fundamentals of soil mechanics*[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2007. (in Chinese))
- [29] 高大钊, 袁聚云. 土质学与土力学[M]. 3版. 北京: 人民交通出版社, 2001. (GAO Da-zhao, YUAN Ju-yun. *Soil physics and soil mechanics*[M]. 3rd ed. Beijing: China Communications Press, 2001(in Chinese))
- [30] 洪毓康. 土质学与土力学[M]. 2版. 北京: 人民交通出版社, 1995. (HONG Yu-kang. *Soil Physics and soil mechanics*[M]. 2nd ed. Beijing: China Communications Press, 1995. (in Chinese))
- [31] 赵明华. 土力学与基础工程[M]. 武汉: 武汉工业大学出版社, 2000. (ZHAO Ming-hua. *Soil mechanics and foundation engineering*[M]. Wuhan: Wuhan Industrial University Press, 2000. (in Chinese))
- [32] 席永慧, 陈建峰. 土力学与基础工程[M]. 上海: 同济大学出版社, 2006. (XI Yong-hui, CHEN Jian-feng. *Soil Mechanics and Foundation Engineering* [M]. Shanghai: Tongji University Press, 2006. (in Chinese))
- [33] 殷宗泽. 土力学与地基[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1998. (YIN Zong-ze. *Soil mechanics and foundation*[M]. Beijing: China Water & Power Press, 1998. (in Chinese))
- [34] DAS B M. *Advanced soil mechanics*[M]. 3rd ed. New York: Taylor & Francis Group, 2008.
- [35] TERZAGHI K, PECK R B, MESRI G. *Soil mechanics in engineering practice*[M]. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [36] 邵龙潭, 郭晓霞. 有效应力新解[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2014. (SHAO Long-tan, GUO Xiao-xia. *New interpretation of effective stress*[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2014. (in Chinese))
- [37] SMITH G N, SMITH I G N. *Elements of soil mechanics*[M]. 7th ed. Cambridge: Blackwell Science Ltd., 1998.
- [38] 陈仲颐, 周景星, 王洪瑾. 土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1994. (CHEN Zhong-yi, ZHOU Jin-xing, WANG Hong-jin. *Soil mechanics*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1994. (in Chinese))
- [39] LI X S, MING H Y. Seepage driving effect on deformations of San Fernando dams[J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2004, **24**: 979 - 992.
- [40] 龚晓南. 高等土力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1996. (GONG Xiao-nan. *Advanced soil mechanics*[M]. Hangzhou:

- Zhejiang University Press, 1996. (in Chinese))
- [41] MURTHY V N S. Geotechnical engineering: principles and practices of soil mechanics and foundation engineering[M]. Boca Raton: CRC Press, 2002.
- [42] TAYLOR D W. Fundamentals of soil mechanics[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1948.
- [43] SCOTT C R. An introduction to soil mechanics and foundations[M]. 3rd ed. London: Applied Science Publishers Ltd., 1980.
- [44] POWRIE W. Soil mechanics: concepts and applications[M]. 2nd ed. New York: Taylor & Francis, 2004.
- [45] POWRIE W. Soil mechanics: concepts and applications[M]. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2014.
- [46] TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: John Wiley and Sons, Inc., 1943.
- [47] AYSAN A. Soil mechanics: basic concepts and engineering applications[M]. Lisse: Swets & Zeitlinger B.V., 2002.
- [48] 黄文熙. 土的工程性质[M]. 北京: 水利电力出版社, 1983. (HUANG Wen-xi. Engineering properties of soil[M]. Beijing: Water Resources & Electric Power Press, 1983. (in Chinese))
- [49] BUDHU M. Soil mechanics and foundations[M]. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [50] DAS B M. Principles of geotechnical engineering[M]. 7th ed. Stamford, CT: Cengage Learning, 2010.
- [51] DAS B M. Advanced soil mechanics[M]. 4th ed. Boca Raton: CRC Press, 2013.
- [52] DAS B M. Advanced soil mechanics[M]. 2nd ed. Washington: Taylor & Francis, 1997.
- [53] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 2 版. 北京: 水利电力出版社, 1994. (QIAN Jia-huan, YIN Zong-ze. Principles and calculation in geotechnical engineering[M]. 2nd ed. Beijing: Water Resources & Electric Power Press, 1994. (in Chinese))
- [54] 殷宗泽. 土工原理[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007. (YIN Zong-ze. Fundamentals in geotechnical engineering[M]. Beijing: China Water & Power Press, 2007. (in Chinese))
- [55] 同济大学应用数学系. 高等数学下册[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2002. (Department of Applied Mathematics, Tongji University. Advanced mathematics[M]. 5th ed. Beijing: Higher Education Press, 2002. (in Chinese))
- [56] 龚晓南. 土力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. (GONG Xiao-nan. Soil mechanics[M]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2002. (in Chinese))
- [57] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. Journal of Applied Physics, 1941, **12**(2): 155 - 164.
- [58] BIOT M A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid[J]. Journal of Applied Physics, 1955, **26**(2): 182 - 185.
- [59] 丁洲祥, 龚晓南, 谢永利. 欧拉描述的大变形固结理论[J]. 力学学报, 2005, **37**(1): 92 - 99. (DING Zhou-xiang, GONG Xiao-nan, XIE Yong-li. Finite strain consolidation theory with eulerian description[J]. Acta Mechanica Sinica, 2005, **37**(1): 92 - 99. (in Chinese))
- [60] 徐芝纶. 弹性力学简明教程[M]. 北京: 人民教育出版社, 1980. (XU Zhi-lun. Concise course of elasticity[M]. Beijing: People's Education Press, 1980. (in Chinese))
- [61] LADE P V, BOER R. The concept of effective stress for soil, concrete and rock[J]. Géotechnique, 1997, **47**(1): 61-78.
- [62] MITCHELL J K, SOGA K. Fundamentals of soil behavior[M]. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [63] 李广信. 关于有效应力原理的几个问题[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(2): 315 - 320. (LI Guang-xin. Some problems about principle of effective stress[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(2): 315 - 320. (in Chinese))
- [64] TIMOSHENKO S, GOODIERJ N. Theory of elasticity[M]. New York: Mc-Graw Hill Book Company, Inc., 1951.
- [65] COPI I M, COHEN C. Introduction to Logic[M]. 14th ed. Harlow: Pearson Education Ltd., 2014.
- [66] 清华大学水力学教研组编. 水力学(上册)1980年修订版[M]. 北京: 人民教育出版社, 1981. (Hydraulics Faculties of Tsinghua University. Hydraulics(Vol.1)(modified ed., 1980) [M]. Beijing: People's Education Press, 1981. (in Chinese))
- [67] 吴望一. 流体力学(上册)[M]. 北京: 北京大学出版社, 1982. (WU Wang-yi. Fluid mechanics(Vol.1)[M]. Beijing: Peking University Press, 1982. (in Chinese))
- [68] Body force. Available from: [https:// en.wikipedia.org/ wiki/ body\\_force](https://en.wikipedia.org/wiki/body_force).
- [69] 吴雄志. 来函照登[J]. 岩土工程学报, 2004, **26**(1): 158 - 159. (WU Xiong-zhi. Reader correspondence[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, **26**(1): 158 - 159. (in Chinese))