

DOI: 10.11779/CJGE20220332

# 饱和孔隙介质的耦合物质点-特征有限元方法

王兆南<sup>1,2</sup>, 王刚<sup>\*1,2</sup>

(1. 山地城镇建设与新技术教育部重点实验室, 重庆 400045; 2. 重庆大学土木工程学院, 重庆 400045)

**摘要:** 物质点法是当下用于分析饱和孔隙介质大变形问题的常用手段。然而, 传统的显式物质点法直接采用弱可压缩的泊松方程计算孔隙水压力, 存在着孔隙水压力震荡以及压力边界难以施加等问题。鉴于此, 提出了一个适用于饱和孔隙介质的耦合物质点-特征有限元方法。该算法将孔隙水视为不可压缩流体, 基于特征线分裂算法的思想, 将存在对流项的液相动量方程采用特征线法进行时间离散, 并利用投影法分步计算固、液相中的压力和速度。应用此算法对一维饱和土柱的固结以及二维弹性地基中波的传播问题进行了数值模拟, 所得结果与参考解基本相一致。计算结果表明新算法可以很好地克服显式物质点法在计算固结问题时产生的孔隙水压力震荡现象。

**关键词:** 物质点法; 饱和孔隙介质; 不可压缩流体; 特征线法; 投影法

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2023)05-1094-09

**作者简介:** 王兆南(1994—), 男, 博士研究生, 主要从事数值计算和本构模型等方面的研究。E-mail: znwang@cqu.edu.cn。

## Coupled material point method and characteristic finite element method for saturated porous media

WANG Zhaonan<sup>1,2</sup>, WANG Gang<sup>1,2</sup>

(1. Key Laboratory of New Technology for Construction of Cities in Mountain Area, Chongqing University, Chongqing 400045, China;

2. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

**Abstract:** The material point method (MPM) is a common approach to analyze the large deformation of the saturated porous media. However, the pore pressure oscillations caused by the weak-compressibility fluid, and the complication to apply the pressure boundary are the main challenges in the conventional explicit MPM. In this study, a novel algorithm, which couples the MPM and characteristic finite element method (FEM) for the saturated porous media with the incompressible fluid, is proposed. Inspired by the characteristic-based split (CBS) method, the characteristic-based procedure is applied to the temporal discretization of the fluid momentum equation to avoid the instability induced by the convective term, and the projection method is introduced to split the velocity and pressure in the solid and fluid phases. Several numerical tests, involving the consolidation of one-dimensional saturated soil column and the wave propagation in two-dimensional elastic foundation, are conducted to examine the performance of the proposed method. The simulated results agree with the reference solutions, which indicates that the new algorithm can greatly overcome the water pressure oscillation of the consolidation problem in comparison with the explicit MPM.

**Key words:** material point method; saturated porous media; incompressible fluid; characteristic-based procedure; projection method

## 0 引言

多孔介质的大变形模拟作为计算岩土力学领域的一个重要分支, 关于其在水力耦合条件下的数值方法是当下的一个研究热点。目前, 受制于非连续方法的计算效率, 连续介质的求解方案仍然是宏观计算多孔介质流固耦合问题的首要选择, 基于 Biot 固结理论的  $u-p$  和  $u-U$  格式有限元法<sup>[1-3]</sup> ( $u$ ,  $p$ ,  $U$  分别代表固相位移、孔压和液相位移) 也已被广泛地运用在多孔介质相关的工程应用中。但是, 有限元在求解大变形问题时却往往需要反复重构网格或增加其它的映射算

法才能弥补网格畸变带来的数值困难, 从而牺牲了有限元在计算效率上的优势。

因此, 用于计算大变形的数值方法便不断地被开发出来, 这些方法主要包括类有限元法(如物质点法<sup>[4-5]</sup>、粒子有限元法<sup>[6-7]</sup>等)和无网格法(光滑粒子流体动力学法<sup>[8]</sup>、运动粒子半隐式法<sup>[9]</sup>等)。其中, 物质点法在近年来的饱和或非饱和土的滑坡计算中取得了极佳的

基金项目: 国家自然科学基金项目(52079012)

收稿日期: 2022-03-24

\*通信作者(E-mail: cewanggang@163.com)

效果<sup>[10-13]</sup>,为地质灾害的防治提供了一个有效的模拟手段。

传统的显式多孔介质物质点法(下文简称“显式物质点法”)一般采用一套或两套物质点<sup>[14-16]</sup>储存固相和液相的物质信息,在背景网格完成动量方程的求解之后,再将更新后的信息映射回物质点,并计算其在下一时步的空间位置和速度,孔隙水压力则采用弱可压缩的泊松方程进行显式地更新。

该方法存在以下问题:①时间步长受液体压缩模量、土体渗透性的限制。由于液体的压缩模量很高,必须采用很小的时间步长,从而降低了计算效率。②在流体不可压的限制下,若速度和压力的插值函数组合不能满足 ladyzenskaja-babuška-brezzi (LBB) 条件<sup>[17]</sup>,会引起剧烈的孔隙水压力震荡。③孔压边界的施加较为复杂,需要追踪边界单元后再施加在其内部的物质点上<sup>[13]</sup>。④不便于考虑多场耦合问题中所包含的其它未知量,如细颗粒浓度<sup>[18-19]</sup>、温度<sup>[20-21]</sup>等随流场迁移的标量。

针对传统物质点法流体压力震荡、自由面不稳定的现象, Pan 等<sup>[22]</sup>将孔隙流体视为不可压的,采用 SUPG (streamline upwind petrov-galerkin) 有限元<sup>[23-25]</sup>与物质点法相结合的方法分析了土颗粒与流体的耦合作用。Yamaguchi 等<sup>[26]</sup>和 Kularathna 等<sup>[27]</sup>基于 Chorin<sup>[28]</sup>所提出的投影法将物质点法中的速度和压力进行分步计算,投影法的引入使得物质点的速度和压力能够同时使用一阶次的插值函数而无需满足 LBB 条件,极大地增强了饱和土体大变形时的压力计算稳定性。

特征分裂(characteristic-based split, CBS)技术是由 Zienkiewicz 等<sup>[29]</sup>提出的一种采用特征线-伽辽金法处理 Navier-Stokes 方程中的对流项,并基于投影法分步计算速度和压力的有限元方法。其特点是能够克服因 LBB 限制所造成的压力不稳定,并扩大了时间步长来提高求解的效率。此外,沿特征线进行对流项的离散也能够给出具有明确物理意义的平衡耗散项,从而避免了 SUPG 修正权函数的困难。

基于此,本文提出了一个适用于饱和孔隙介质的物质点和有限元法的耦合求解方案,推导了耦合形式下固、液两相控制方程的离散格式。通过对一维饱和土柱固结、二维饱和地基中波的传播问题的模拟,验证了新方法的效果。由于在求解过程中,固、液相速度采用显式的向前欧拉法更新,而压力则是通过解线性方程组获得的。因此,耦合物质点-特征有限元法属于半隐式的求解方案(下文简称“半隐式耦合法”)。

## 1 饱和孔隙介质的控制方程

本文中变量上标 s, f 分别表示该变量属于固相或

液相;下标  $i, j, k$  分别表示张量的方向,黑色斜体变量表示矩阵或向量;下标  $I, J, K, L$  表示网格节点。

根据孔隙介质理论的均匀化假设,固相和液相的平均密度可分别表示为

$$\bar{\rho}^s = (1 - \phi)\rho^s \quad , \quad (1a)$$

$$\bar{\rho}^f = \phi\rho^f \quad . \quad (1b)$$

式中:  $\rho^s, \rho^f$  分别表示固相和液相的真实密度;  $\phi$  为孔隙体积与总体积之间的比值,即孔隙率。

固相和液相的质量守恒方程可分别表示为

$$\frac{D^s \bar{\rho}^s}{Dt} + \bar{\rho}^s \frac{\partial \mathbf{u}_i^s}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}^f}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho}^f \mathbf{u}_i^f)}{\partial x_i} = 0 \quad . \quad (2b)$$

式中:  $\mathbf{u}_i$  为速度张量;  $D^s(\cdot)/Dt = \partial(\cdot)/\partial t + \mathbf{u}_i^s \partial(\cdot)/\partial x_i$  是针对固相变量的物质导数。将式(2a), (2b)展开,并考虑土颗粒和孔隙流体的不可压缩性:

$$\rho^s \frac{\partial (1 - \phi)}{\partial t} + \rho^s \mathbf{u}_i^s \frac{\partial (1 - \phi)}{\partial x_i} + \bar{\rho}^s \frac{\partial \mathbf{u}_i^s}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad (3a)$$

$$\rho^f \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho^f \mathbf{u}_i^f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \bar{\rho}^f \frac{\partial \mathbf{u}_i^f}{\partial x_i} = 0 \quad . \quad (3b)$$

结合式(3a), (3b), 能够得到饱和孔隙介质的连续性方程:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (1 - \phi) \mathbf{u}_i^s + \phi \mathbf{u}_i^f \right] = 0 \quad . \quad (4)$$

固相和液相的动量守恒方程可分别表示为

$$\bar{\rho}^s \frac{D^s \mathbf{u}_i^s}{Dt} = \frac{\partial (\sigma'_{ij} - (1 - \phi) p^f \delta_{ij})}{\partial x_j} + \bar{\rho}^s b_i + D_i \quad , \quad (5a)$$

$$\bar{\rho}^f \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^f}{\partial t} + \mathbf{u}_j^f \frac{\partial \mathbf{u}_i^f}{\partial x_j} \right) = -\phi \frac{\partial p^f}{\partial x_i} + \bar{\rho}^f b_i - D_i \quad . \quad (5b)$$

式中:  $\sigma'_{ij}$  为土骨架之间的有效应力;  $p^f$  为孔隙水压力;  $b_i$  为外力加速度。与拉格朗日视角下的液相动量方程<sup>[13]</sup>不同,式(5b)的流体加速度部分考虑了对流项的影响,这是欧拉视角下采用固定网格描述流场变化而产生的。 $D_i$  表示固相和液相之间动量交换时产生的拖曳力,一般采用线性的达西定律表示:

$$D_i = \frac{\phi^2 \rho^f g}{k} (\mathbf{u}_i^f - \mathbf{u}_i^s) \quad . \quad (6)$$

式中:  $k$  为土体的渗透系数;  $g$  是重力加速度。

偏微分方程(4), (5)的边界条件包括以下4种:

- ①在固相位移边界  $\Gamma = \Gamma_u^s$ , 给定固相速度  $\mathbf{u}_i^s = \bar{\mathbf{u}}_i^s$ ;
- ②在固相面力边界  $\Gamma = \Gamma_t^s$ , 给定面力  $\sigma'_{ij} n_j = \bar{t}_i^s$ ,  $n_j$  为面力边界的外法线矢量;
- ③在液相位移边界  $\Gamma = \Gamma_u^f$ , 给定液相速度  $\mathbf{u}_i^f = \bar{\mathbf{u}}_i^f$ ;
- ④在压力边界  $\Gamma = \Gamma_p^f$ , 给定压力水头  $p^f = \bar{p}^f$ 。

## 2 耦合物质点-特征有限元方法

半隐式耦合方法的求解过程主要利用了投影法分步计算速度和压力的思想,其原理为:先忽略动量方程(5)中的压力梯度以得到预测速度  $\mathbf{u}^*$ ;再根据质量守恒单独计算压力;最后从预测速度中减去压力梯度完成速度的修正,整个过程是速度和压力的交替求解。因此,本文在预测阶段和修正阶段分别引入了速度增量  $\Delta \mathbf{u}^*$ ,  $\Delta \mathbf{u}^{**}$ 用以辅助计算,它们与真实速度增量  $\Delta \mathbf{u}$  之间的关系表示为

$$\Delta \mathbf{u}^\alpha = \Delta \mathbf{u}^{\alpha*} + \Delta \mathbf{u}^{\alpha**} \quad (7)$$

式中:  $\alpha = s$  或  $f$ 。孔隙介质固、液两相的加速度可由  $t+1$  和  $t$  时刻的速度向前差分得到:

$$\frac{D^s \mathbf{u}^s}{Dt} = \frac{\mathbf{u}^{s,t+1} - \mathbf{u}^{s,t}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{u}^{s*} + \Delta \mathbf{u}^{s**}}{\Delta t} \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^f}{\partial t} = \frac{\mathbf{u}^{f,t+1} - \mathbf{u}^{f,t}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{u}^{f*} + \Delta \mathbf{u}^{f**}}{\Delta t} \quad (8b)$$

式中:  $\Delta t$  为时间步长。

### 2.1 时间离散

将式(8)代入固相的动量方程(5a),同时让压力作为一个在  $t+1$  时刻的独立变量,则式(5a)被分裂成两部分:

$$(1 - \phi^t) \rho^s \Delta \mathbf{u}_i^{s*} = \Delta t \left[ \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + (1 - \phi) \rho^s b_i + D_i \right]^t \quad (9a)$$

$$(1 - \phi^t) \rho^s \Delta \mathbf{u}_i^{s**} = -(1 - \phi^t) \Delta t \frac{\partial p^{f,t+1}}{\partial x_i} \quad (9b)$$

由于液相动量方程(5b)中存在对流项,若直接采用标准伽辽金法离散会造成数值上的不稳定。因此,这里选择 CBS 的方法进行处理,即先以特征线法进行时间离散,再结合投影法将其分裂为

$$\phi^t \rho^f \Delta \mathbf{u}_i^{f*} = -\Delta t \left( \phi \rho^f \mathbf{u}_j^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} - \phi \rho^f b_i + D_i \right)^t + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{u}_k^f \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \phi \rho^f \mathbf{u}_j^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} - \phi \rho^f b_i + D_i \right)^t \quad (10a)$$

$$\phi^t \rho^f \Delta \mathbf{u}_i^{f**} = -\phi^t \Delta t \frac{\partial p^{f,t+1}}{\partial x_i} \quad (10b)$$

式(10a)方程右边的第二项为特征线法离散得到的一个二阶的稳定项。将式(9b)和(10b)代入连续性方程(4)内,可以得到饱和孔隙介质的压力泊松方程:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (1 - \phi^t) \mathbf{u}_i^{s*} + \phi^t \mathbf{u}_i^{f*} - \left( \frac{1 - \phi}{\rho^s} + \frac{\phi}{\rho^f} \right)^t \Delta t \frac{\partial p^{f,t+1}}{\partial x_i} \right] = 0 \quad (11)$$

式中:  $\mathbf{u}^{\alpha*} = \mathbf{u}^{\alpha,t} + \Delta \mathbf{u}^{\alpha*}$  为固、液两相的预测速度。

### 2.2 空间离散

采用标准伽辽金法分别对固、液相的动量预测方

程(9a)和(10a)两端分别乘以试探函数  $\delta w_i$ ,可以得到这两个方程的弱形式:

$$\int \delta w_i \bar{\rho}^s \Delta \mathbf{u}_i^{s*} d\Omega = -\Delta t \int \frac{\partial \delta w_i}{\partial x_j} \sigma'_{ij} d\Omega + \Delta t \int_{\Gamma_s^s} \delta w_i \bar{t}_i^s d\Gamma + \Delta t \int \delta w_i \frac{\phi \bar{\rho}^f g}{k} (\mathbf{u}_i^f - \mathbf{u}_i^s) d\Omega + \Delta t \int \delta w_i \bar{\rho}^s b_i d\Omega \quad (12a)$$

$$\int \delta w_i \bar{\rho}^f \Delta \mathbf{u}_i^{f*} d\Omega = -\Delta t \int \delta w_i \frac{\phi \bar{\rho}^f g}{k} (\mathbf{u}_i^f - \mathbf{u}_i^s) d\Omega - \Delta t \int \delta w_i \bar{\rho}^f \mathbf{u}_j^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} d\Omega + \Delta t \int \delta w_i \bar{\rho}^f b_i d\Omega - \frac{\Delta t^2}{2} \int \frac{\partial \delta w_i}{\partial x_k} \mathbf{u}_k^f \bar{\rho}^f \mathbf{u}_j^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} d\Omega + \frac{\Delta t^2}{2} \int \frac{\partial \delta w_i}{\partial x_k} \mathbf{u}_k^f \bar{\rho}^f b_i d\Omega - \frac{\Delta t^2}{2} \int \frac{\partial \delta w_i}{\partial x_k} \mathbf{u}_k^f \frac{\phi \bar{\rho}^f g}{k} (\mathbf{u}_i^f - \mathbf{u}_i^s) d\Omega + \frac{\Delta t^2}{2} \int \delta w_i \mathbf{u}_k^f \left( \bar{\rho}^f \mathbf{u}_j^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} - \bar{\rho}^f b_i + D_i \right) n_k d\Gamma \quad (12b)$$

式(12b)等式右边最后一项为分部积分产生的面力项,此处将其省略<sup>[29]</sup>。

对于任意的固相或液相变量都可以采用其在网格节点上的值进行插值近似,同时考虑试探函数的任意性  $\delta w_i = N_I$ ,则方程(12a),(12b)可以被空间离散为

$$M_{IJ}^s \Delta \mathbf{u}_j^{s*} = \Delta t \left[ F_I^{s,int} + F_I^{s,ext} + Q_{IJ} (\mathbf{u}_j^f - \mathbf{u}_j^s) \right] \quad (13a)$$

$$M_{IJ}^f \Delta \mathbf{u}_j^{f*} = -\Delta t \left[ C_{IJ} \mathbf{u}_j^f - S_I + Q_{IJ} (\mathbf{u}_j^f - \mathbf{u}_j^s) \right] - \frac{\Delta t^2}{2} \left[ C_{IJ}^u \mathbf{u}_j^f - S_I^u + Q_{IJ}^u (\mathbf{u}_j^f - \mathbf{u}_j^s) \right] \quad (13b)$$

式中:固相方程中的矩阵采用物质点积分,节点对于物质点处的形函数采用  $N_I(\mathbf{x}_p)$ 表示;液相相关的矩阵则采用高斯积分,节点对于积分点处的形函数采用  $N_I(\mathbf{x}_g)$ 表示:

$$M_{IJ}^s = \sum_{p=1}^{N_p} m_p N_I(\mathbf{x}_p) N_J(\mathbf{x}_p) \quad (13c)$$

$$F_I^{s,int} = -\sum_{p=1}^{N_p} \frac{\partial N_I(\mathbf{x}_p)}{\partial x_j} \sigma'_{ij} \Omega_p \quad (13d)$$

$$F_I^{s,ext} = \sum_{p=1}^{N_p} N_I(\mathbf{x}_p) m_p b_i + \int_{\Gamma_s^s} N_I(\mathbf{x}_p) \bar{t}_i^s d\Gamma \quad (13e)$$

$$M_{IJ}^f = \int N_{IJ}(\mathbf{x}_g) \bar{\rho}^f N_J(\mathbf{x}_g) d\Omega \quad (13f)$$

$$C_{IJ} = \int N_{IJ}(\mathbf{x}_g) \bar{\rho}^f N_{KJ}(\mathbf{x}_g) \mathbf{u}_{j,K}^f \frac{\partial N_{JJ}(\mathbf{x}_g)}{\partial x_j} d\Omega \quad (13g)$$

$$S_I = \int N_{IJ}(\mathbf{x}_g) \bar{\rho}^f b_i d\Omega \quad (13h)$$

$$Q_{IJ} = \int N_{IJ}(\mathbf{x}_g) \frac{\phi_g \bar{\rho}^f g}{k_g} N_{JJ}(\mathbf{x}_g) d\Omega \quad (13i)$$

$$C_{IJ}^u = \int \frac{\partial N_I(\mathbf{x}_g)}{\partial x_k} N_L(\mathbf{x}_g) \mathbf{u}_{k,L}^f \bar{\rho}^f N_K(\mathbf{x}_g) \mathbf{u}_{j,K}^f \frac{\partial N_J(\mathbf{x}_g)}{\partial x_j} d\Omega \quad (13j)$$

$$S_i^u = \int \frac{\partial N_I(\mathbf{x}_g)}{\partial x_k} N_J(\mathbf{x}_g) u_{k,J}^f \bar{\rho}^f b_i d\Omega \quad , \quad (13k)$$

$$Q_{LJ}^s = \int \frac{\partial N_I(\mathbf{x}_g)}{\partial x_k} N_L(\mathbf{x}_g) u_{k,L}^f \frac{\phi_g \bar{\rho}^f g}{k_g} N_J(\mathbf{x}_g) d\Omega \quad , \quad (13l)$$

式中:  $N_p$  为总的物质点数量;  $\bar{t}_i^s$  可直接施加在边界单元中的物质点上;  $\phi_g, k_g$  为积分点上的孔隙率和渗透系数;  $\Omega_p$  为物质点的体积,  $m_p$  是物质点的质量,

$$m_p = (1 - \phi) \rho^s \Omega_p \quad . \quad (14)$$

对压力泊松方程两边同时乘以试探函数  $\delta p$ , 其弱形式可以表示为

$$\begin{aligned} & \int \delta p (1 - \phi) \frac{\partial u_i^{s*}}{\partial x_i} + \delta p \phi \frac{\partial u_i^{f*}}{\partial x_i} + \delta p (u_i^{f*} - u_i^{s*}) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega \\ & = \Delta t \int_{\Gamma_p^f} \left( \frac{1 - \phi}{\rho^s} + \frac{\phi}{\rho^f} \right) \delta p \frac{\partial p^{f,t+1}}{\partial x_i} n_i d\Gamma - \\ & \quad \Delta t \int \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \left( \frac{1 - \phi}{\rho^s} + \frac{\phi}{\rho^f} \right) \frac{\partial p^{f,t+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad . \quad (15) \end{aligned}$$

考虑试探函数的任意性, 令  $\delta p = N_I$ , 方程 (15) 的空间离散形式为

$$-\Delta t H_{IJ} p_J^{f,t+1} = G_{IJ}^s u_J^{s*} + G_{IJ}^f u_J^{f*} + O_{IJ} (u_J^{f*} - u_J^{s*}) - \Delta t P_{IJ} p_J^{f,t+1} \quad , \quad (16a)$$

式中:

$$G_{IJ}^s = \int N_I(\mathbf{x}_g) (1 - \phi_g) \frac{\partial N_J(\mathbf{x}_g)}{\partial x_i} d\Omega \quad ; \quad (16b)$$

$$G_{IJ}^f = \int N_I(\mathbf{x}_g) \phi_g \frac{\partial N_J(\mathbf{x}_g)}{\partial x_i} d\Omega \quad ; \quad (16c)$$

$$O_{IJ} = \int N_I(\mathbf{x}_g) \frac{\partial N_K(\mathbf{x}_g)}{\partial x_i} \phi_K N_J(\mathbf{x}_g) d\Omega \quad ; \quad (16d)$$

$$H_{IJ} = \int \frac{\partial N_I(\mathbf{x}_g)}{\partial x_i} \left( \frac{1 - \phi_g}{\rho^s} + \frac{\phi_g}{\rho^f} \right) \frac{\partial N_J(\mathbf{x}_g)}{\partial x_i} d\Omega \quad ; \quad (16e)$$

$$P_{IJ} = \int_{\Gamma_p^f} \left( \frac{1 - \phi_g}{\rho^s} + \frac{\phi_g}{\rho^f} \right) N_I(\mathbf{x}_g) \frac{\partial N_J(\mathbf{x}_g)}{\partial n} d\Gamma \quad . \quad (16f)$$

式 (16) 为一个线性方程组,  $H_{IJ}$  则为一个正定对称的方阵, 该方程组可采用预处理共轭梯度法进行求解。

同样地, 固相和液相的动量修正方程(9b)和(10b)的弱形式表示为

$$\int \delta w_i (1 - \phi) \rho^s \Delta u_i^{s**} d\Omega = -\Delta t \int \delta w_i (1 - \phi) \frac{\partial p^{f,t+1}}{\partial x_j} d\Omega \quad , \quad (17a)$$

$$\int \delta w_i \phi \rho^f \Delta u_i^{f**} d\Omega = -\Delta t \int \delta w_i \phi \frac{\partial p^{f,t+1}}{\partial x_i} d\Omega \quad . \quad (17b)$$

其空间离散形式:

$$M_{IJ}^s \Delta u_J^{s**} = -\Delta t G_{IJ}^s p_J^{f,t+1} \quad , \quad (18a)$$

$$M_{IJ}^f \Delta u_J^{f**} = -\Delta t G_{IJ}^f p_J^{f,t+1} \quad . \quad (18b)$$

### 2.3 状态变量的映射

物质点携带了土体的速度、孔隙率、渗透系数等状态变量, 而控制方程的求解却是在欧拉网格节点上进行的, 因此可通过质量最小二乘的方式将上述状态信息通过插值函数映射至节点上.  $t$  时刻节点的固相速度、孔隙率、渗透系数可分别表示为

$$\mathbf{u}_I^{s,t} = \sum_{p=1}^{N_p} \frac{N_I(\mathbf{x}_p^t) m_p \mathbf{u}_p^t}{N_I(\mathbf{x}_p^t) m_p} \quad , \quad (19a)$$

$$\phi_I^t = \sum_{p=1}^{N_p} \frac{N_I(\mathbf{x}_p^t) m_p \phi_p^t}{N_I(\mathbf{x}_p^t) m_p} \quad , \quad (19b)$$

$$k_I^t = \sum_{p=1}^{N_p} \frac{N_I(\mathbf{x}_p^t) m_p k_p^t}{N_I(\mathbf{x}_p^t) m_p} \quad . \quad (19c)$$

式中:  $\mathbf{u}_p, \phi_p, k_p$  分别为物质点处的速度、孔隙率和渗透系数。

### 2.4 状态变量的更新

$t + 1$  时刻节点上的固、液两相速度可以记作:

$$\mathbf{u}_I^{\alpha,t+1} = \mathbf{u}_I^{\alpha,t} + \Delta t \mathbf{u}_I^{s*} + \Delta t \mathbf{u}_I^{f**} \quad . \quad (20)$$

其中固相更新后的速度还需从节点映射回物质点来计算粒子的速度和位移:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p^{t+1} & = (1 - \beta) \sum_{I=1}^{N_n} N_I(\mathbf{x}_p^t) \mathbf{u}_I^{s,t+1} + \\ & \quad \beta \left[ \mathbf{u}_p^t + \sum_{I=1}^{N_n} N_I(\mathbf{x}_p^t) (\mathbf{u}_I^{s,t+1} - \mathbf{u}_I^{s,t}) \right] \quad , \quad (21a) \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_p^{t+1} = \mathbf{x}_p^{t+1} + \Delta t \sum_{I=1}^{N_n} N_I(\mathbf{x}_p^t) \mathbf{u}_I^{s,t+1} \quad . \quad (21b)$$

式中:  $N_n$  为总的节点数量。

式 (21a) 是一种混合 PIC (particle in cell) 和 FLIP (fluid implicit particle) 的物质点速度映回方式。在经典物质点法中, PIC 虽然可以使求解过程更加稳定, 但是会造成严重的能量耗散; 而 FLIP 一般可以保证能量守恒, 但是会使得系统产生振荡。参数  $\beta \in [0, 1]$  决定了式 (21a) 中 PIC 和 FLIP 在信息映回时所占的比重 ( $\beta = 0$  时为 PIC,  $\beta = 1$  时为 FLIP)。本文将  $\beta$  的取值定为 0.9。

物质点体积和孔隙率的更新则是与其变形梯度  $F_p$  相关联的:

$$F_p^{t+1} = \left( \delta + \Delta t \sum_{I=1}^{N_n} \nabla N_I(\mathbf{x}_p^t) \mathbf{u}_I^{s,t+1} \right) F_p^t \quad , \quad (22a)$$

$$\Omega_p^{t+1} = J_p^{t+1} \Omega_p^0 \quad , \quad (22b)$$

$$\phi_p^{t+1} = 1 - \frac{(1 - \phi_p^0)}{J_p^{t+1}} \quad . \quad (22c)$$

式中:  $\delta$  为克罗内克算子;  $J_p$  为变形梯度  $F_p$  的行列式;  $\phi_p^0, \Omega_p^0$  分别为物质点的初始孔隙率和初始体积。

### 2.5 数值算法流程

本文所提出的半隐式耦合算法的求解流程：①使用方程 (19a), (19b), (19c) 将固相物质点上的信息映射至背景网格节点上, 包括固相的速度、孔隙率、渗透系数等变量; ②通过固相的本构方程计算所有物质点上的有效应力 (本文中涉及问题均使用线性弹性本构模型), 该更新应力的方案被称为 USF 格式 (update stress first); ③求解固、液两相的动量预测方程 (13a), (13b), 并分别施加它们的位移边界条件; ④根据压力边界条件计算泊松方程 (16a), 隐式地计算孔隙压力; ⑤求解固、液两相的动量修正方程 (18a), (18b), 并分别施加它们的位移边界条件; ⑥根据式 (20) 更新固、液两相的节点速度, 并将固相节点速度映射回物质点, 从而根据式 (21a), (21b) 得到质点速度和位移; ⑦采用方程 (22a), (22b), 22 (c) 更新物质点的变形梯度、孔隙率, 渗透系数的更新方式与具体问题相关, 它是孔隙率、颗粒粒径、细粒含量等变量的函数; ⑧丢弃背景网格上除液相速度和压力以外的所有信息, 进入下一时步的计算。

上述计算流程中, 固相的位移边界和面力边界分别被施加在背景网格的节点和指定的物质点上; 液相的位移边界和孔压边界均被施加在节点上。此外, 与物质点法相关的计算均可采用 B 样条插值函数<sup>[30]</sup>或其他高阶插值格式来抑制物质点跨越网格时产生的数值噪声。

## 3 数值算例分析

### 3.1 一维饱和土柱固结

饱和土柱的一维固结问题是土力学中的一个经典算例。图 1 为一个高 1.0 m、宽 0.1 m 的弹性土柱, 土柱的侧面和底部均为不透水层, 顶部为透水层并受到均布荷载  $Q$  的作用。采用 10 个边长  $\Delta x = 0.1$  m 的四边形有限元网格将饱和土柱离散, 并在每个网格内均置 4 个物质点以表示土体骨架。总的求解时间  $T_{total} = 2.0$  s, 单个时间步长  $\Delta t = 2.0 \times 10^{-4}$  s。图 1 中的  $E, \nu$  分别表示杨氏模量和泊松比。

图 2 给出了  $Q = 10$  kPa 时不同时刻下孔隙水压力沿深度的分布情况, 可以看出数值解与太沙基的理论解<sup>[31]</sup>基本相一致。尤其是在 0.001, 0.01 s 两个固结的初始时刻, 孔隙水压力沿深度均呈现出了良好的分布形态。

图 3 为土柱中部节点处孔隙水压力随时间消散的时程曲线。从中可知, 显式物质点法<sup>[13]</sup>在固结开始的 0.025 s 之前存在着明显的数值震荡, 而半隐式耦合方

法所得到的孔压时程曲线则与理论解始终保持着一致, 其数值稳定性要显著优于传统方法。此外, 该算例中显式物质法的计算时间步长  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$  s, 其计算效率也低于半隐式耦合算法约两个数量级。

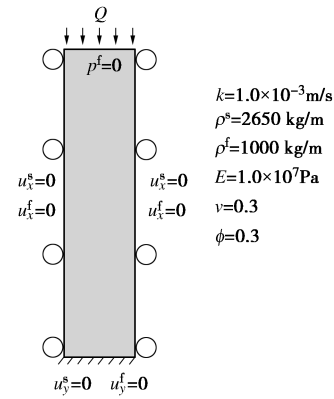


图 1 一维土柱固结的示意图

Fig. 1 Consolidation of 1D soil column

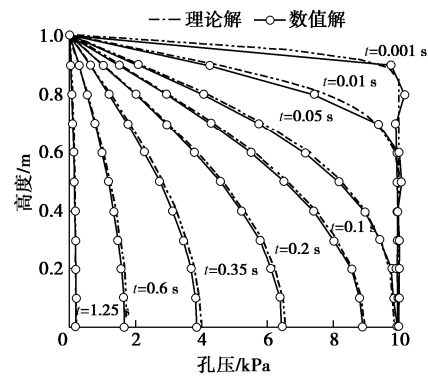


图 2 不同时刻孔隙水压力沿深度的分布

Fig. 2 Distribution of pore water pressure along height at different time

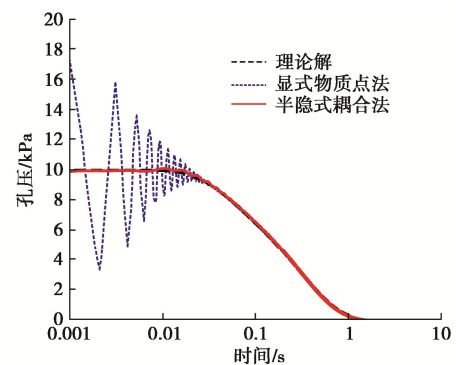


图 3 土柱中部孔隙水压力随时间的消散曲线

Fig. 3 Dissipation curves of pore water pressure at middle of soil column

图 4 给出了顶部荷载  $Q = 2$  MPa 时土柱内孔隙水压力随时间的消散情况。在固结的初始阶段, 数值解与理论解仍然保持着较好的一致性。当固结时间为  $t =$

0.164 s 时, 高度在 0.9, 1.0 m 节处的点孔隙水压力变为了零, 这说明此时最顶部网格内的物质点受荷载作用已经跨越网格向下移动, 出现了较大的土体变形。此时, 土柱中孔隙水压力随时间的分布形态也依然保持正确, 说明本文提出的半隐式耦合算法在处理多孔介质的较大变形问题时。

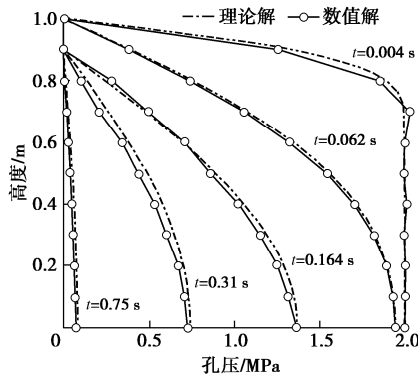


图 4 大变形条件下孔隙水压力沿深度随时间的分布

Fig. 4 Distribution of pore water pressure along height with time under large deformation

极小渗透系数的土体在加载瞬时近似于不排水的条件, 从而形成不可压缩条件的限制。为了进一步验证本文方法在不可压缩问题上的适用性, 图 5 给出了在极小的渗透系数  $k = 10^{-7} \text{ m/s}$  时, 固结初始阶段  $t = 0.001 \text{ s}$  土柱内孔压的分布情况。如图 5 (a) 所示, 虽然此时土柱内的压力并未出现明显的数值振荡, 但采用  $\Delta x = 0.1 \text{ m}$  的粗网格显然已经不能满足计算所需的精度。图 5 (b) 给出了采用  $\Delta x = 0.01 \text{ m}$  的细网格计算所得到的孔压分布, 可以看出此时数值解和理论解已经基本趋于一致, 证明了所提出耦合方案的有效性。

### 3.2 二维饱和地基中波的传递

为探究二维不可压缩孔隙介质中 Rayleigh 波的传播方式, Breuer<sup>[32]</sup>在平面应变空间中建立了一个长 21 m、高 10 m 的饱和土地基模型。如图 6 所示, 地基的底部和左右两个边界为不透水层、上部边界为透水层。地基表面的中央位置受到一个宽度为 1 m 的动力荷载  $Q(t)$  作用:

$$Q(t) = 10^5 \sin(25\pi t)H(t - 0.04) \quad (23)$$

式中:  $H(t - 0.04)$  为 Heaviside 阶越函数。本文采用 13440 个间距为 0.125 m 的有限元网格将求解域离散, 并在每个网格内均匀地布置 4 个物质点, 共 53760 个粒子用以表示土体。模型的计算时间步长  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3} \text{ s}$ , 总的求解时间  $T_{\text{total}} = 0.2 \text{ s}$ 。此外, 分别选取地基中的  $A(5, 10)$ ,  $B(8, 8)$  两点用于分析具体的位移和孔压时呈变化。考虑到 Markert 等<sup>[33]</sup>使用有限元方法对上述模型的计算结果通常被视为基准解, 因此这里将其作

为验证半隐式耦合算法的一个参考。

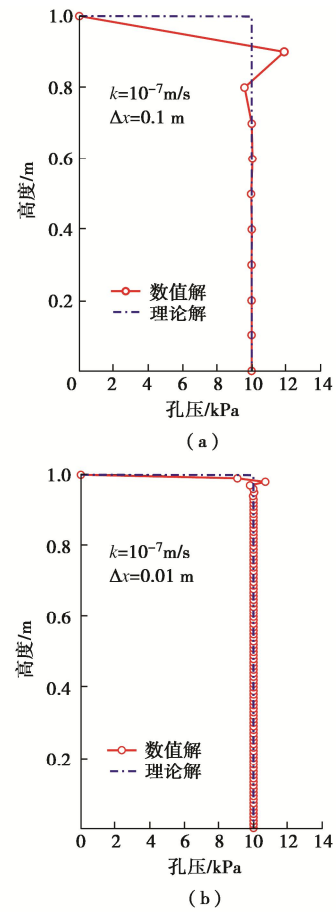


图 5 小渗透系数下初始固结阶段孔压的分布

Fig. 5 Distribution of pore pressure at initial consolidation stage with small permeability coefficient

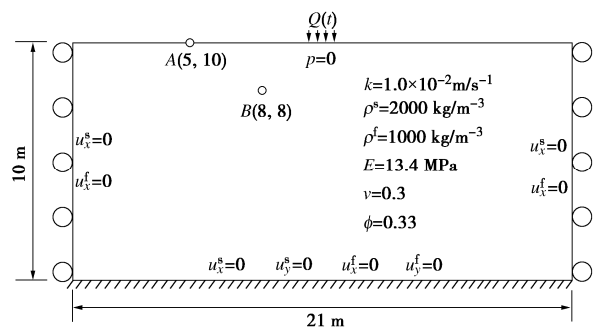


图 6 二维饱和土地基的示意图

Fig. 6 Geometry and boundary of 2D saturated foundation

图 7 (a) 给出了饱和地基中  $A$  点的位移变化曲线。该曲线总体呈现出典型 Rayleigh 波作用下的椭圆形运动轨迹, 采用半隐式耦合方法的计算结果与 Markert 等<sup>[33]</sup>给出的曲线基本保持一致, 而显式物质点法<sup>[34]</sup>的计算结果则相较于前者有着较大的差别。图 7 (b) 为节点  $B$  处孔隙水压力随时间的变化曲线。在荷载施加的前 0.04 s, 半隐式算法的压力变化与荷载的正弦形式相一致, 而后孔隙水压力在惯性力的作用下先降低再升高, 最后逐渐消散保持在零压力附近, 其结果

与 Markert 等的基准解基本符合。然而，显式物质点法对于孔压的计算则出现了明显的震荡。

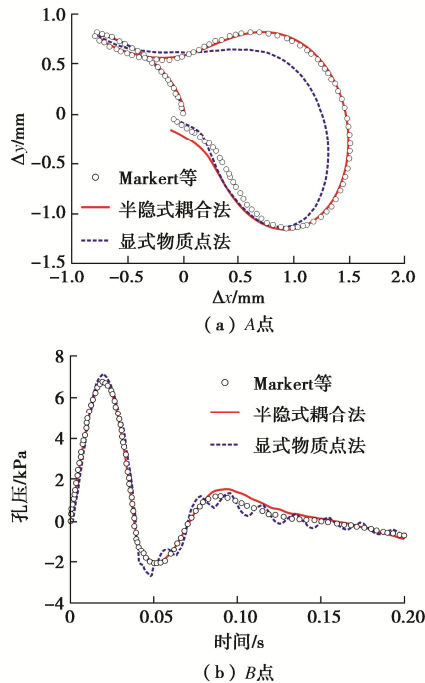


图 7 监测点 A 点和 B 点的时程曲线

Fig. 7 Time-history curves at monitoring points A and B

图 8 分别给出了显式物质点法和半隐式耦合法在  $t$  为 0.05, 0.1, 0.15, 0.2 s 时刻饱和地基中孔隙水压力的分布云图。从图中可以看出孔隙水压力的分布随时间从中间向两边逐渐扩散，采用半隐式耦合法（图 8(a)）计算的结果在不同时刻的轮廓分布清晰。然而，显式物质点法（图 8(b)）的孔压虽然在整体分布规律上与前者大致相同，但是在局部区域会出现明显的棋盘式交错震荡现象<sup>[34]</sup>。

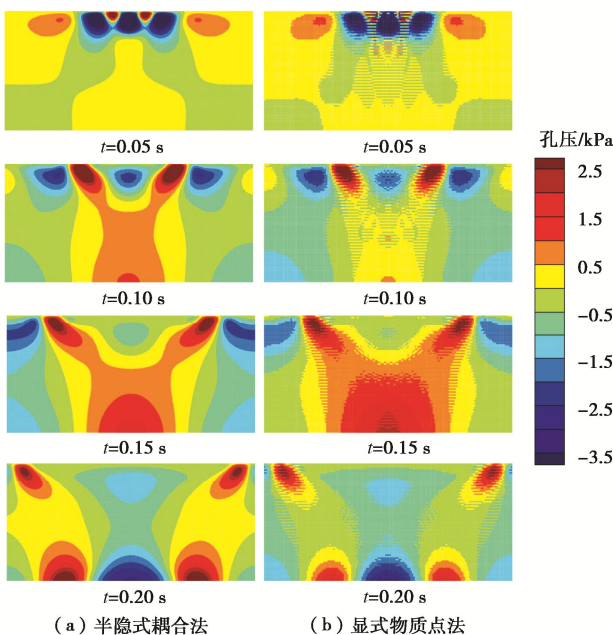


图 8 不同时刻孔隙水压力的分布云图

Fig. 8 Contours of pore water pressure at different time

## 4 结 语

针对传统物质点法在计算饱和孔隙介质时压力震荡、时间步长取值太小、压力边界难以施加的问题，提出了一种物质点和特征有限元耦合的半隐式求解方案。其中，物质点和有限元分别用以描述固相和液相，并将液体视为不可压缩的。通过引入特征分裂（CBS）算法的思想，将包含对流项的液相动量方程采用特征线法时间离散，基于投影法将固、液两相的动量方程分裂成预测和修正两部分，从而实现了固、液相速度和孔隙水压力的分步计算。其中，速度的更新采用显式向前欧拉法；压力则时通过求解泊松方程隐式地获得。

采用两个经典算例验证了算法的有效性。对于一维饱和土柱的固结问题，无论固结应力的多少，节点的孔隙水压力在起始阶段均未出现传统方法中存在的震荡现象，且孔压时程曲线也与理论解相一致。对于二维饱和地基中波的传递问题，计算的位移和孔压时程曲线均与基准计算结果相一致。

基于投影法的求解方案使固、液相速度和压力摆脱了 LBB 条件的限制，解决了采用弱可压泊松方程计算孔压时的压力震荡问题，并且提供了更大的时间步长以节省计算开销；采用有限元计算流体则能够使压力边界条件直接施加在节点上，省去了显式方法中需要查找压力边界单元的过程。

### 参考文献:

- [1] ZIENKIEWICZ O C. Computational geomechanics with special reference to earthquake engineering[M]. Chichester: John Wiley, 1999.
- [2] HUANG M S, YUE Z Q, THAM L G, et al. On the stable finite element procedures for dynamic problems of saturated porous media[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 61(9): 1421-1450.
- [3] 黄茂松, 魏 星. 循环荷载饱和土动力学问题稳定有限元解法[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(2): 173-177. (HUANG Maosong, WEI Xing. Stabilized finite elements for dynamic problems of saturated soil subjected to cyclic loading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(2): 173-177. (in Chinese))
- [4] SULSKY D, CHEN Z, SCHREYER H L. A particle method for history-dependent materials[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 118(1/2): 179-196.
- [5] SOGA K, ALONSO E, YERRO A, et al. Trends in

- large-deformation analysis of landslide mass movements with particular emphasis on the material point method[J]. *Géotechnique*, 2016, **66**(3): 248-273.
- [6] JIN Y F, YIN Z Y, LI J, et al. A novel implicit coupled hydro-mechanical SPFEM approach for modelling of delayed failure of cut slope in soft sensitive clay[J]. *Computers and Geotechnics*, 2021, **140**: 104474.
- [7] WANG L, ZHANG X, ZHANG S, et al. A generalized Hellinger-Reissner variational principle and its PFEM formulation for dynamic analysis of saturated porous media[J]. *Computers and Geotechnics*, 2021, **132**: 103994.
- [8] BUI H H, NGUYEN G D. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) and its applications in geomechanics: From solid fracture to granular behaviour and multiphase flows in porous media[J]. *Computers and Geotechnics*, 2021, **138**: 104315.
- [9] WEN X, ZHAO W, WAN D. An improved moving particle semi-implicit method for interfacial flows[J]. *Applied Ocean Research*, 2021, **117**: 102963.
- [10] LIU X, WANG Y, LI D. Numerical simulation of the 1995 rainfall-induced Fei Tsui road landslide in Hong Kong: new insights from hydro-mechanically coupled material point method[J]. *Landslides*, 2020, **17**: 2755-2775.
- [11] YERRO A, ALONSO E E, PINYOL N M. Run-out of landslides in brittle soils[J]. *Computers and Geotechnics*, 2016, **80**: 427-439.
- [12] YERRO A, ALONSO E E, PINYOL N M. The material point method for unsaturated soils[J]. *Géotechnique*, 2015, **65**(3): 201-217.
- [13] BANDARA S, SOGA K. Coupling of soil deformation and pore fluid flow using material point method[J]. *Computers and Geotechnics*, 2015, **63**: 199-214.
- [14] 张洪武, 王鲲鹏, 陈震. 基于物质点方法饱和多孔介质动力学模拟(I): 耦合物质点方法[J]. *岩土工程学报*, 2009, **31**(10): 1505-1511. (ZHANG Hongwu, WANG Kunpeng, CHEN Zhen. Material point method for dynamic analysis of saturated porous media (I): coupling material point method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, **31**(10): 1505-1511. (in Chinese))
- [15] 张洪武, 王鲲鹏, 陈震. 基于物质点方法饱和多孔介质动力学模拟(II): 饱和多孔介质与固体间动力接触分析[J]. *岩土工程学报*, 2009, **31**(11): 1672-1679. (ZHANG Hongwu, WANG Kunpeng, CHEN Zhen. Material point method for dynamic analysis of saturated porous media (II): dynamic contact analysis between saturated porous media and solid bodies[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, **31**(11): 1672-1679. (in Chinese))
- [16] 张洪武, 王鲲鹏. 基于物质点方法饱和多孔介质动力学模拟(III): 两相物质点方法[J]. *岩土工程学报*, 2010, **32**(4): 507-513. (ZHANG Hongwu, WANG Kunpeng. Material point method for dynamic analysis of saturated porous media (III): two-phase material point method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, **32**(4): 507-513. (in Chinese))
- [17] BECACHE E, RODRIGUEZ J, TSOGKA C. The finite element method with Lagrangian multipliers[J]. *Numerische Mathematik*, 1973, **20**(3):179-192.
- [18] YANG J, YIN Z Y, LAOUAFA F, et al. Three-dimensional hydromechanical modeling of internal erosion in dike-on-foundation[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2020, **44**(8): 1200-1218.
- [19] YANG J, YIN Z Y, LAOUAFA F, et al. Analysis of suffusion in cohesionless soils with randomly distributed porosity and fines content[J]. *Computers and Geotechnics*, 2019, **111**: 157-171.
- [20] GAWIN D, SCHREFLER B A, GALINDO M. Thermo-hydro-mechanical analysis of partially saturated porous materials[J]. *Engineering Computations*, 1996, **13**(7): 113-143.
- [21] SCHREFLER B A, ZHAN X Y, SIMONI L. A coupled model for water flow, airflow and heat flow in deformable porous media[J]. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 1995, **5**(6): 531-547.
- [22] PAN S Y, YAMAGUCHI Y, SUPPASRI A, et al. MPM-FEM hybrid method for granular mass-water interaction problems[J]. *Computational Mechanics*, 2021, **68**(1): 155-173.
- [23] HEINRICH J C, HUYAKORN P S, ZIENKIEWICZ O C, et al. An 'Upwind' finite element scheme for two-dimensional convective transport equation[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1977, **11**(1): 131-143.
- [24] HEINRICH J C, ZIENKIEWICZ O C. Quadratic finite element schemes for two-dimensional convective-transport problems[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1977, **11**(12): 1831-1844.
- [25] LÖHNER R, MORGAN K, ZIENKIEWICZ O C. The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the



- finite element method[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1984, **4**(11): 1043-1063.
- [26] YAMAGUCHI Y, TAKASE S, MORIGUCHI S, et al. Solid-liquid coupled material point method for simulation of ground collapse with fluidization[J]. Computational Particle Mechanics, 2020, **7**(2): 209-223.
- [27] KULARATHNA S, LIANG W J, ZHAO T C, et al. A semi-implicit material point method based on fractional-step method for saturated soil[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2021, **45**(10): 1405-1436.
- [28] CHORIN A J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations[J]. Mathematics of Computation, 1968, **22**(104): 745-762.
- [29] ZIENKIEWICZ O C, TAYLOR R L, NITHIARASU P. The Finite Element Method for Fluid Dynamics[M]. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2014.
- [30] GAN Y, SUN Z, CHEN Z, et al. Enhancement of the material point method using B-spline basis functions[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2018, **113**(3): 411-431.
- [31] KARL T. Theoretical Soil Mechanics[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 1943.
- [32] BREUER S. Quasi-static and dynamic behavior of saturated porous media with incompressible constituents[M]//Porous Media: Theory and Experiments. Dordrecht: Springer Netherlands, 1999.
- [33] MARKERT B, HEIDER Y, EHLERS W. Comparison of monolithic and splitting solution schemes for dynamic porous media problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2010, **82**(11): 1341-1383.
- [34] SOGA K, KULARATHNA S. Solving dynamic soil deformation-fluid flow coupling problems using material point method[M]// Challenges and Innovations in Geomechanics. Cham: Springer International Publishing, 2021.

## 《岩土工程学报》征订启事

《岩土工程学报》创办于1979年，是我国水利、土木、力学、建筑、水电、振动等六个全国性学会联合主办的学术性科技期刊。由南京水利科学研究院承办，国内外公开发行。主要刊登土力学、岩石力学领域中能代表当今先进理论和实践水平的科学研究和工程实践成果等。报道新理论、新技术、新仪器、新材料的研究和应用。欢迎国家自然科学基金项目及其他重要项目的研究成果向本刊投稿，倡导和鼓励有实践经验的作者撰稿，并优先刊用这些稿件。主要栏目有黄文熙讲座、综述、论文、短文、工程实录、焦点论坛、讨论和简讯等。

本刊被《中文核心期刊要目总览》连续多年确认为核心期刊，并在建筑类核心期刊中位于前列；本刊被科技部“中国科技论文统计源期刊”（中国科技核心期刊）及“中国科技论文与引文数据库”收录；本刊被中国科学院“中国科学引文数据库”收录；本刊被“中国知网”全文收录及“中国学术期刊综合评价数据库”收录；本刊被“工程索引 Ei Compendex 数据

库”和“日本科学技术振兴机构数据库 JST”等国际数据库收录。本刊网址（[www.cgejournal.com](http://www.cgejournal.com)）全文发布本刊所有刊载文章。

本刊读者对象为土木建筑、水利电力、交通运输、矿山冶金和油气资源等行业中从事岩土力学与岩土工程专业的科研、设计、施工、监理和学习人员。

本刊为月刊，A4开本，双栏排版，220页，每月中旬出版，每期定价40元，全年定价480元。

本刊国际标准刊号 ISSN 1000-4548，国内统一刊号 CN 32-1124/TU，国内发行代号 28-62，国外发行代号 MO 0520。欢迎广大读者在全国各地邮局订购，也可在编辑部订购（不另收邮费）。编辑部订购地址：南京虎踞关34号《岩土工程学报》编辑部；邮编：210024；联系电话：025-85829534，85829543，85829553，85829556；传真：025-85829555；E-mail: [gc@nhri.cn](mailto:gc@nhri.cn)。

（本刊编辑部）