

DOI: 10.11779/CJGE201605023

波散射问题求解中消除多次透射公式漂移失稳的一种措施

唐 晖¹, 李小军^{2, 3}, 周国良¹

(1. 环境保护部核与辐射安全中心, 北京 100082; 2. 北京工业大学建筑工程学院, 北京 100124; 3. 中国地震局地球物理研究所, 北京 100081)

摘 要: 在采用多次透射公式求解结构—地基体系地震反应等波散射问题时, 其稳定性是人们所关注和研究的重要方面。针对其漂移失稳机制的研究表明, 在将总波场分离为入射波场和散射波场从而实现波动输入和多次透射边界条件施加的过程中, 采用连续介质解析解给出的入射波场与计算中的实际入射波场存在较大差别, 会导致漂移失稳现象的出现。基于此, 提出了一种直观的改进措施, 即利用多次透射边界建立边界计算区, 从而获得入射波离散数值解, 并应用于波动的输入过程。数值实验验证了该措施可以有效地消除计算中的漂移失稳现象, 给出更为合理的计算结果。

关键词: 多次透射公式; 散射问题; 波动输入方法; 漂移失稳; 入射波场

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2016)05-0952-07

作者简介: 唐 晖(1978-), 女, 副研究员, 主要从事场地地震反应分析, 核电站结构抗震分析等相关地震工程领域的科研。E-mail: tanghui1978@163.com。

Measure for eliminating drift instability of multi-transmission formula in solution of scattering problems

TANG Hui¹, LI Xiao-jun^{2, 3}, ZHOU Guo-liang¹

(1. Nuclear and Radiation Safety Center, MEP, Beijing 100082, China; 2. College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 3. Institute of Geophysics, China Earthquake Administration, Beijing 100081, China)

Abstract: Using the multi-transmitting boundary formula to solve scattering problems such as seismic response analysis of soil-structure interactive system, and instability of the multi-transmitting boundary formula is an important aspect which is needed to be studied and focused on. The studies on the drift instability mechanism of multi-transmitting boundary formula show that when the total wave field is separated into incident wave field and scattered wave field for wave motion input and applying the multi-transmitting boundary condition, there is difference of incident wave field between the analytical solution in continuous medium and the real one in discrete grids, which may result in drift instability. For this problem, an improvement measure is proposed, that is, the numerical solution of incident wave is obtained by establishing the computation model for the boundary region with the multi-transmitting boundary formula, which is used in wave motion input process. The numerical experiments show that the proposed measure can effectively eliminate the drift instability in the calculation and give more reasonable results.

Key words: multi-transmission formula; scattering problem; wave input process; drift instability; incident wave

0 引 言

在采用直接法开展结构地震反应分析时, 需要设定边界条件来模拟土体无限域。多次透射人工边界(MTF)^[1]作为一种具有普适性强, 易于实现等优点的局部人工边界条件, 得到了广泛地关注和应用, 同时, 其稳定性问题成为了人们研究的重点^[2-13]。

高频振荡和低频漂移是计算过程中可能出现的两种失稳现象。研究表明^[2], MTF无法阻止波动中的零频成分进入计算区域, 因此, 计算中存在漂移失稳的

可能性; 在模拟结构—地基体系地震反应这类波散射问题时, 入射波场采用连续介质解析解值时, 计算入射波场与离散模型中实际入射波场之间的差别可能导致低频漂移失稳^[3]。为了消除和抑制计算过程中漂移

基金项目: 国家科技重大专项课题项目(2013ZX06002001-9); 国家自然科学基金项目(51421005, 91215301); 国家重点基础研究发展计划项目(2011CB013601); 北京市属高等学校创新团队建设提升计划项目

收稿日期: 2015-04-30

失稳现象的出现, 研究人员给出了一些措施, 文献[3]建议采用降低透射阶数的方式以达到稳定计算的目的, 文献[4]提出在边界条件中人为引入修正因子, 文献[5]则提出了在边界施加黏弹性组件来抑制低频失稳的思路。

无论是在人工边界中引入修正因子, 还是施加黏弹性组件, 其参数尚需通过经验试算来确定以减小对人们关心的计算结果的影响^[6], 而降低透射阶数的方式则以降低人工边界计算精度为代价。文献[3]指出了入射波场的有限元离散解与连续介质理论解之间存在一定的差值, 即离散化误差波场是导致低频漂移失稳的主要诱因, 而利用有限元法结合 MTF 模拟工程结构的地震反应^[14-15]时, 不可避免地会遇到入射波场的求解问题。基于此, 本文尝试提出一种直观的改进措施, 即通过建立波动输入边界区的简单模型获得入射波场的数值解, 应用于地震波动输入过程的波场分离, 数值试验验证了这种方式可以有效地消除和抑制漂移失稳。

1 透射边界漂移失稳机制

透射边界的基本思想是直接模拟外行波射出边界的过程^[15]。多次透射人工边界公式 (MTF) 通过与边界点相邻的内部点的现在时刻以及前几个时刻的运动给出边界点在下一时刻的运动量:

$$u_0^{p+1} = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N u_j^{p+1-j}, \quad (1)$$

其中, u_j^p 代表计算区域内与边界相距 jc_a 处在时刻 $p\Delta t$ 的位移, C_j^N 是 N 个数中选取 j 个数的组合数, N 代表透射阶数, j, p 均为整数。将传递因子 B_m^n :

$$B_m^n u_j^p = u_{j+m}^{p-n}, \quad (2)$$

引入式 (1), MTF 可表示为

$$(B_0^0 - B_1^1)^N u_0^{p+1} = 0. \quad (3)$$

对于弹性波动而言, 满足内域的波动传播形式可表述为

$$u_j^p(\omega) = u_0^0(\omega) \exp(i\omega p\Delta t - ikj\Delta x). \quad (4)$$

按照 GKS 准则可知, 计算中不出现漂移失稳的充分条件是: 任何满足内域内行波动解, 不同时满足边界条件。因此, 将式 (4) 代入式 (3) 可得到代表该条件的不等式:

$$(1 - \exp(i\omega\Delta t + k\Delta x))^N \neq 0. \quad (5)$$

容易看出, 波动中零频成分不满足该不等式, 即零频成分可以从边界条件进入计算内域, 从而引起漂移失稳。

另一方面, 在采用透射边界模拟包括结构地震反

应等散射问题时, 漂移失稳的可能性还来源于波动输入过程中入射波的误差。为了利用透射边界模拟散射波场, 需要将总波场分离为入射波场和散射波场:

$$U = U_I + U_p, \quad (6)$$

$$U = U_{IC} + U_{PC}, \quad (7)$$

式中, U, U_I, U_p, U_{IC} 和 U_{PC} 分别为总波场, 真实的入射波场和散射波场以及计算中采用的入射波场和散射波场, 然后, 利用透射边界模拟散射波射出边界的过程, 最后, 将入射波与散射波求和获得总波场。当采用波动在连续介质解析解作为已知的入射波场时, 理论解与网格中真实的入射波场之间是存在误差的:

$$\Delta U = U_I - U_{IC}, \quad (8)$$

将式 (8) 代入式 (6) 和式 (7) 可以得到

$$U_{PC} = U_p + \Delta U. \quad (9)$$

即计算的散射波场中除了包含真实的散射波场 U_p 以外, 还包含了由入射波引入的误差波场 ΔU 。而在计算模型存在如瑞利阻尼等阻尼时, 容易判断误差波场存在以下情况:

$$0 \geq \Delta u_0^p > \Delta u_1^p > \dots > \Delta u_m^p, \quad \Delta u_i^p > \Delta u_{i-1}^{p-1}, \quad (10)$$

$$\Delta u_0^p - \Delta u_1^p < \Delta u_1^p - \Delta u_2^p < \Delta u_2^p - \Delta u_3^p, \quad (11)$$

将式 (10), 式 (11) 代入式 (1) 可以得到

$$\Delta u_0^{p+1} > \Delta u_0^p. \quad (12)$$

可见透射边界会使由入射误差波引入的漂移失稳趋势继续, 并随着透射边界阶数的增加而更为显著。

2 波动输入改进措施

基于上文对采用透射边界模拟结构地震响应时失稳机制的分析, 笔者尝试通过获得实际的入射波场, 改进计算过程中波动输入方式, 从而抑制和消除低频漂移失稳。

在利用透射边界求解如图 1 所示的场地地震反应等散射问题时, 需要采用波场分离技术实现波动输入。以二维为例, 人工边界区包括为左侧人工边界区、右侧人工边界区和底部人工边界区, 地震波由左下侧传入计算区域时, 对于各边界区:

(1) 左侧人工边界区

考虑到地震波由左下侧进入计算区, 左侧边界区内的总波场由入射波场和散射波场组成。入射波场包括两部分: 一部分是从人工边界左下侧射入计算区的入射波, 另一部分是由左侧自由表面经反射后射入计算区的反射波。

(2) 底部人工边界区

底部人工边界计算区的波场也可以分离为入射波场和散射波场, 入射波即为从人工边界底侧射入计算

区的波动。

(3) 右侧人工边界区

右侧边界区内波动均为散射波。

基于上述波场分离方法，在左边界区和底边界区内入射波已知的前提条件下，实现波场输入的步骤为：

- ①假定已知时刻 p 及之前时刻的总波场和入射波场，即相应时刻的散射波场亦已知；
- ②基于已知时刻 p 及之前时刻的散射波场，利用 MTF 可以得到 $p+1$ 时刻的散射波场在边界上的值；
- ③整个计算区域内除边界以外的下一时刻 $p+1$ 的总波场可以由递推公式获得，对于边界上的节点，将获得的 $p+1$ 时刻散射波与已知 $p+1$ 时刻的入射波相加，可以得到总波场。

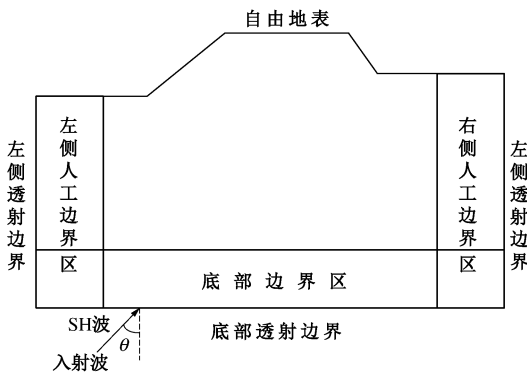


图 1 二维场地地震反应分析模型示意图

Fig. 1 Two-dimensional site response analysis model

上述计算步骤中，需要已知入射波场，常见的方法是采用连续介质中的解析解，其与离散计算中入射波场的差值会导致漂移失稳的产生。针对这个问题，下文给出了改进措施，尝试在计算中采用网格中的实际计算入射波，以达到抑制和消除漂移失稳的目的，具体方法如下。

(1) 左侧边界区

左侧边界区内入射波包括两部分：①由左下侧直接入射的波动，②由自由地表反射进入的入射波。针对这两部分入射波，分别建立如图 2 所示的计算模型，首先划分一定大小的左侧人工边界区，对于直接进入的入射波，由于已知左侧边界和底边界的入射波以及入射角，将上部边界和右侧边界采用透射边界模拟，获得该部分入射波的实际计算数值；对于经地表反射进入的入射波，采用同样的方法，将底边界和右边界设为透射边界，通过计算获得该部分入射波的实际值。两者叠加就可以得到左侧人工边界区的入射波场。

(2) 底部边界区

同样，建立如图 3 所示计算模型，可以获得从左下侧射入计算区的底部人工边界区内入射波场。

需要特殊指出的是，对于 P 波和 SV 波入射，可以采用同样的思路获得入射波场。

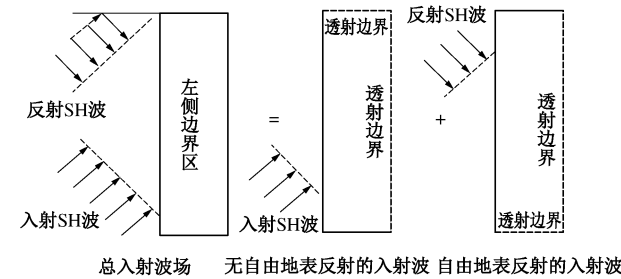


图 2 左侧边界区入射波场求解示意图

Fig. 2 Solution of incident wave field in left boundary region

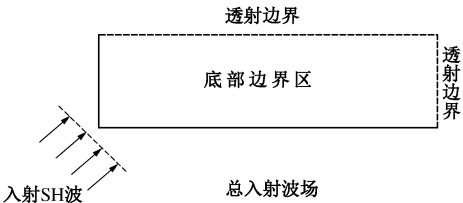


图 3 底部边界区入射波场求解示意图

Fig. 3 Solution of incident wave field in bottom boundary region

3 算 例

选取分别代表二维均匀水平地形，梯形地形，凸形地形，复杂凹陷地形的 4 个场地为算例，采用波动显式有限元法结合多次透射公式 (MTF) 模拟其地震响应，SH 波位移脉冲由场地左下侧入射，其位移时程曲线如图 4 所示，在计算过程中均采用二阶局部人工透射边界。

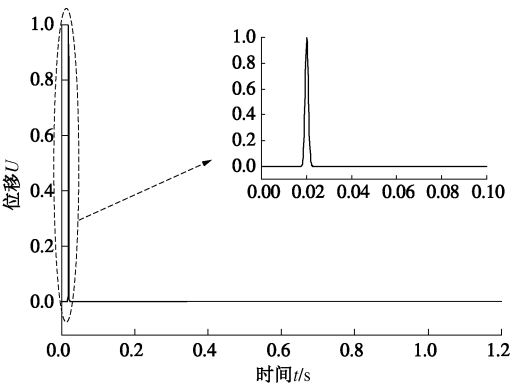


图 4 SH 入射波位移时程

Fig. 4 Time history of displacement of SH wave

3.1 算例一

建立如图 5 所示的二维均匀水平地表场地模型，其整体几何尺寸为 $L_x=19\text{ m}$ ， $L_y=100\text{ m}$ ，采用边长为 2 m 的单元进行空间离散，介质的剪切波速 $C_s=2100\text{ m/s}$ ，阻尼采用质量系数为 0，刚度系数 $\beta=0.001$ 的瑞利阻尼，时间离散步距 $\Delta t=0.0002\text{ s}$ ，SH 波以 $\theta=45^\circ$ 的角度入射，透射边界人工波速为 2970 m/s 。图 6 中

分别为节点 A , B , C 和 D 的位移时程, 其中实线和虚线分别为入射波场采用解析解和本文给出的改进措施的结果。对比计算结果可知, 本文给出的方法能够抑制和消除漂移失稳, 给出更为合理的计算结果, 尤其是在人工边界区附近。

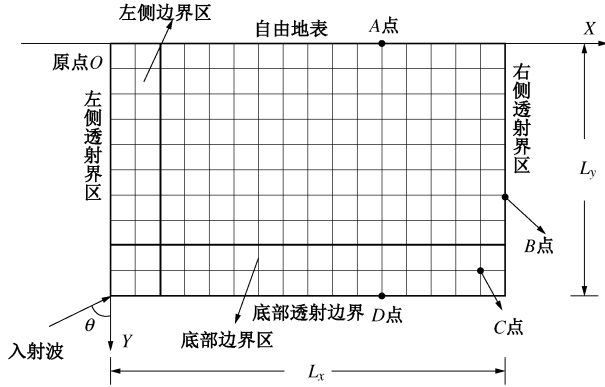
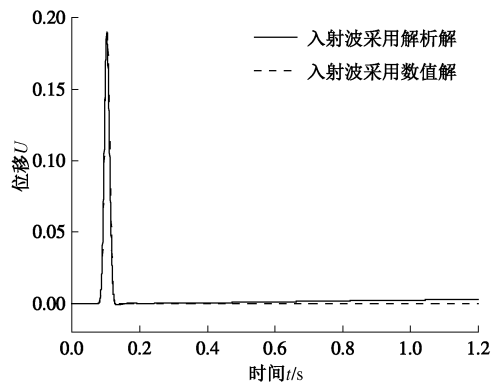
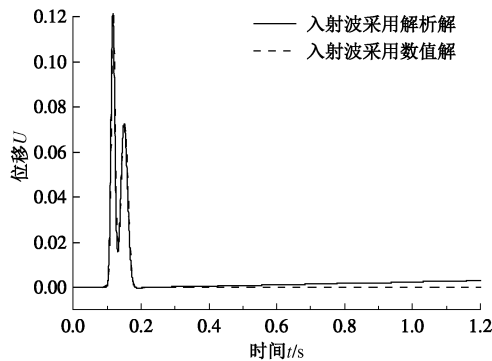


图5 二维均匀水平地表场地计算模型示意图

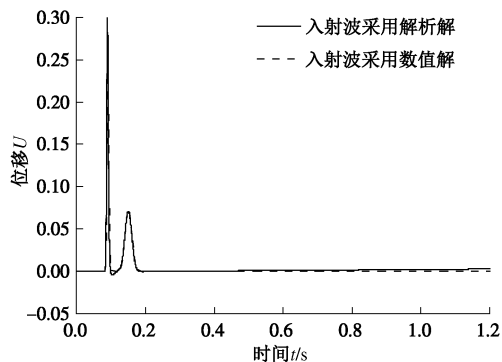
Fig. 5 Model of two-dimensional uniform horizontal surface site



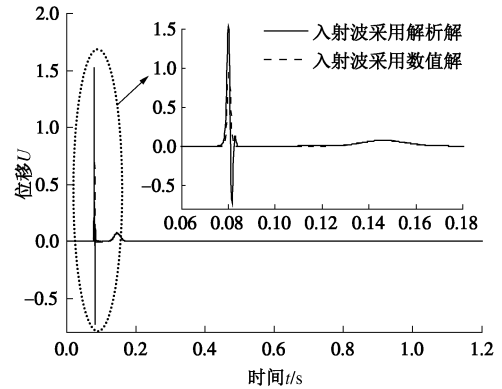
(a) 节点A位移时程



(b) 节点B位移时程



(c) 节点C位移时程



(d) 节点D位移时程

图6 节点 A , B , C 和 D 的位移时程

Fig. 6 Time histories of displacement at points A , B , C and D

3.2 算例二

建立如图7所示的二维梯形地形场地计算模型, 整体大小为 $L_x=260$ m, $L_y=100$ m, 左下侧入射的 SH 波角度, 单元尺寸, 时间离散步距, 土体剪切波速, 阻尼以及人工波速与算例一相同。通过计算获得节点 A , B , C 和 D 的位移时程如图8所示, 其中实线和虚线分别为入射波场采用解析解和本文给出的改进措施的结果。明显可以看出, 本文给出的措施起到了抑制和消除低频漂移失稳现象的作用。

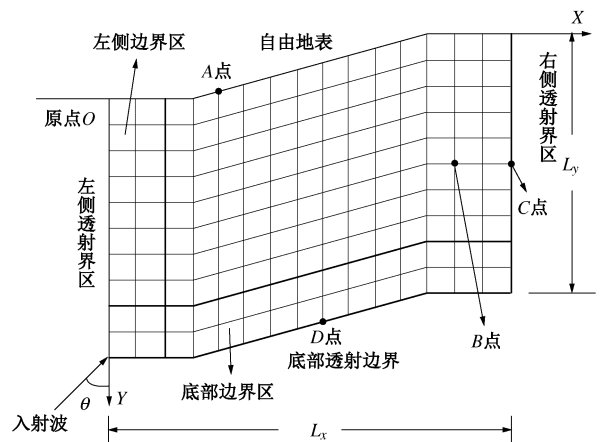
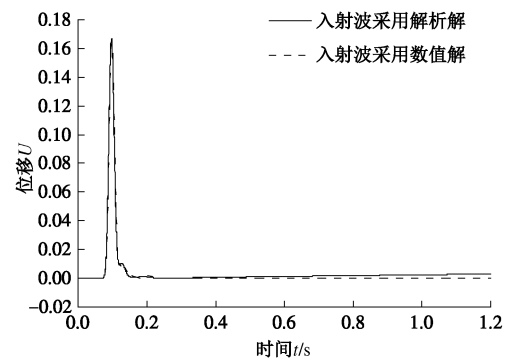


图7 二维梯形地形场地计算模型示意图

Fig. 7 Model of two-dimensional trapezoidal site



(a) 节点A位移时程

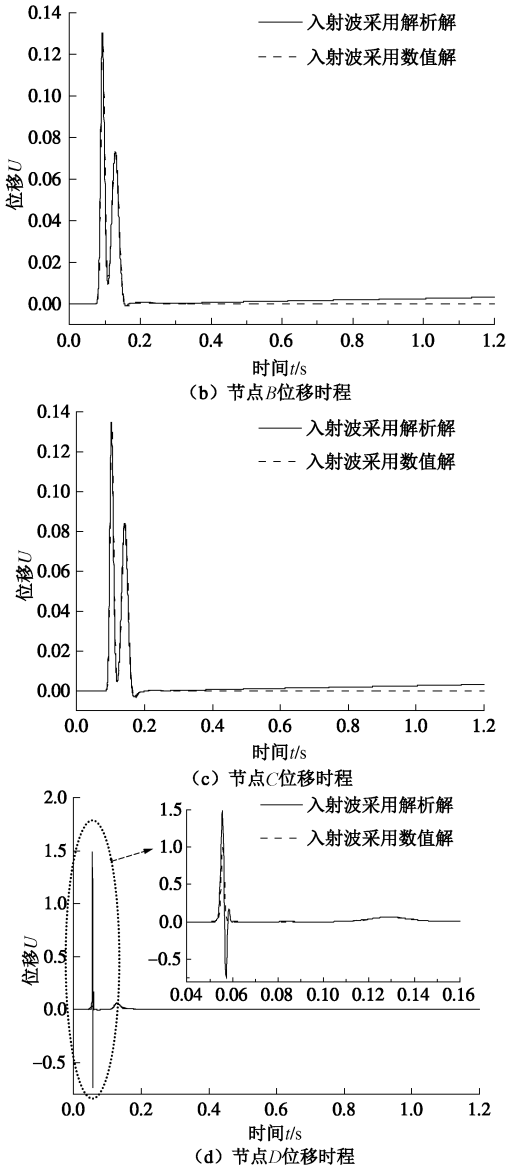


图 8 节点 A, B, C 和 D 的位移时程

Fig. 8 Time histories of displacement at points A, B, C and D

3.3 算例三

建立如图 9 所示的二维凸形场地计算模型，模型尺寸为 $L_x=380\text{ m}$, $L_y=200\text{ m}$ ，其它参数与算例二相同。图 10 中是节点 A, B, C 和 D 的位移时程，容易看出，

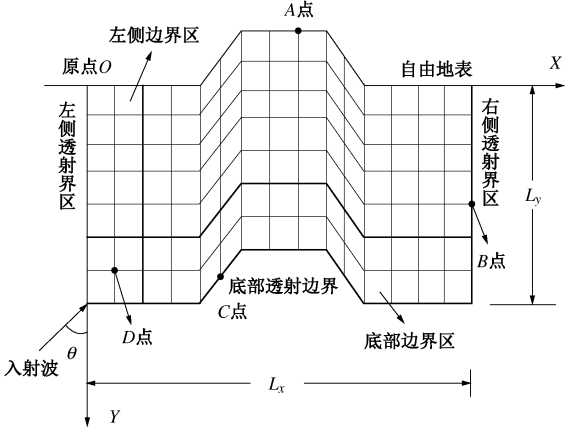


图 9 二维凸形场地计算模型示意图

Fig. 9 Model of two dimensional convex topography site

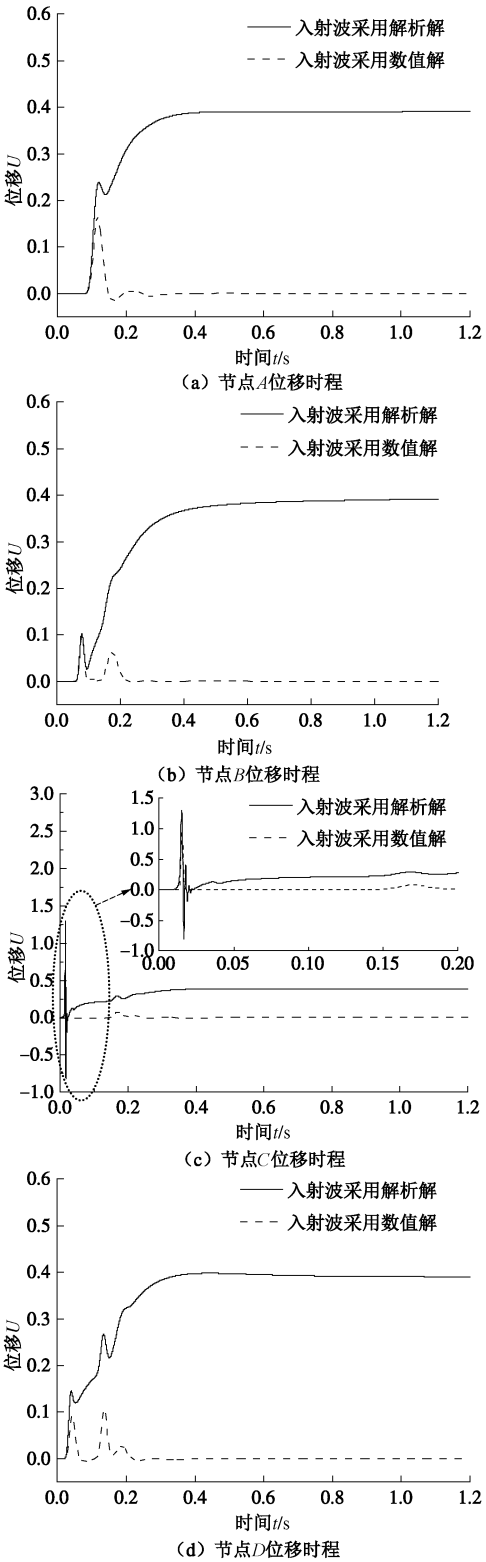


图 10 节点 A, B, C 和 D 的位移时程

Fig. 10 Time histories of displacement at points A, B, C and D
复杂场地相对于简单或变化不大的场地而言，数值计算过程中漂移失稳现象更为明显，而采用本文给出的改进波动输入法可以抑制和消除漂移失稳，获得较为理想的计算结果。

3.4 算例四

建立如图 11 所示二维凹陷地形场地计算模型，整

体空间尺寸为 $L_x=950$ m, $L_y=200$ m, 其余参数取值与上例相同。通过计算得到节点 A , B , C 和 D 的位移时程如图 12 所示。可以看出, 采用计算获得的入射波场, 大大减小了计算中采用的入射波场与实际入射波场间的误差, 明显地抑制和消除了计算中的低频漂移失稳现象。

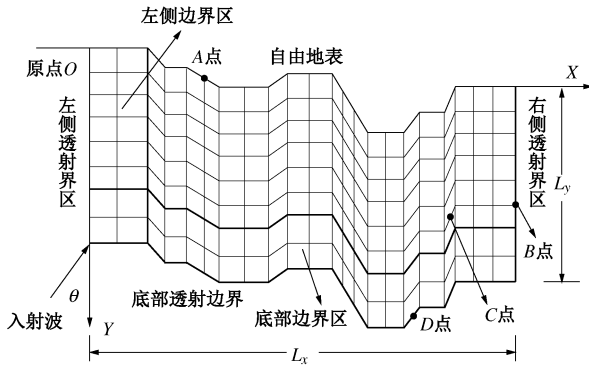
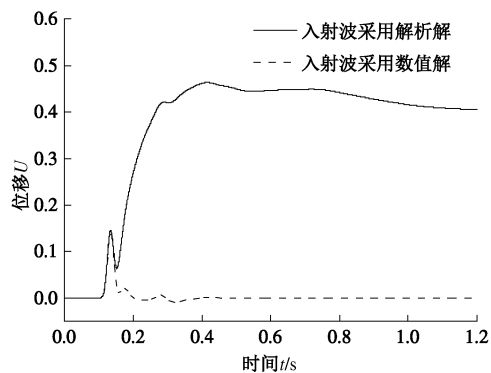
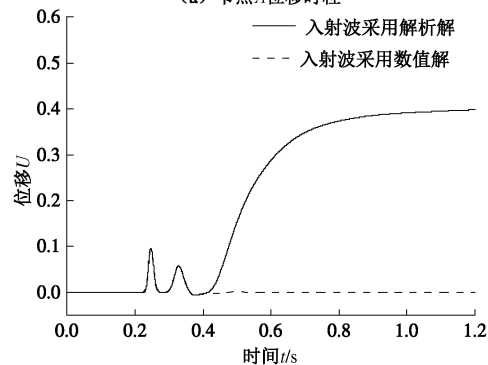


图 11 二维凹陷地形场地计算模型示意图

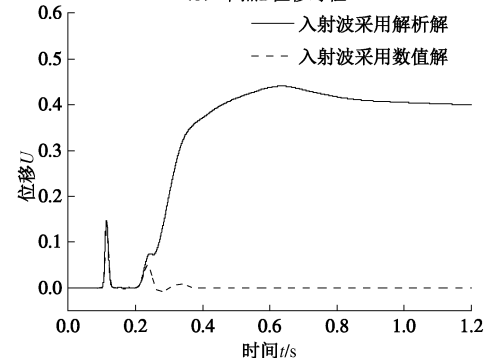
Fig. 11 Model of two-dimensional canyon topography site



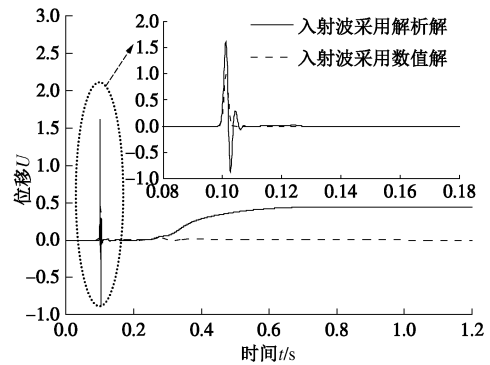
(a) 节点 A 位移时程



(b) 节点 B 位移时程



(c) 节点 C 位移时程



(d) 节点 D 位移时程

图 12 节点 A , B , C 和 D 的位移时程

Fig. 12 Time histories of displacement at points A , B , C and D

4 结 语

在采用透射边界模拟工程结构地震响应等散射问题时, 常采用连续介质解析解作为入射波场, 其与网格中实际入射波场之间的差别会导致低频漂移失稳, 容易想见, 低频失稳在复杂场地条件下更为明显。为了消除漂移失稳, 本文给出了一种改进措施, 即在波动的输入过程中, 入射波不再采用解析解而是采用离散数值解, 从而减小计算入射波场与实际入射波场的误差, 达到稳定计算的目的, 并通过数值试验验证了其有效性。关于本文给出的措施消除漂移失稳的机制将另文进行详细探讨。

参考文献:

- [1] LIAO Z P, WONG H L. A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1984, 3(4): 174 - 183.
- [2] 廖振鹏, 周正华, 张艳红. 波动数值模拟中透射边界的稳定实现[J]. 地球物理学报, 2002, 45(4): 533 - 545. (LIAO Zhen-peng, ZHOU Zheng-hua, ZHANG Yan-hong. Stable implementation of transmitting boundary in numerical simulation of wave motion[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2002, 45(3): 533 - 545. (in Chinese))
- [3] 李小军, 廖振鹏. 时域局部透射边界的计算漂移失稳[J]. 力学学报, 1996, 28(5): 627 - 632. (LI Xiao-jun, LIAO Zhen-peng. The drift instability of local transmitting boundary in time domain[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1996, 28(5): 627 - 632. (in Chinese))
- [4] 周正华, 廖振鹏. 消除多次透射公式漂移失稳的措施[J]. 力学学报, 2001, 33(4): 550 - 554. (ZHOU Zheng-hua, LIAO Zhen-peng. A measure for eliminating drift instability of the

- multi-transmitting formula[J]. Chinese Journal of theoretical and applied mechanics, 2001, **33**(4): 550 - 554. (in Chinese))
- [5] 李小军, 杨宇. 透射边界稳定性控制措施探讨[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(4): 641 - 645. (LI Xiao-jun, YANG Yu. Measures for stability control of transmitting boundary[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2012, **34**(4): 641 - 645. (in Chinese))
- [6] 杨宇, 李小军, 贺秋梅, 等. 散射问题中消除多次透射边界漂移失稳措施比较分析[J]. 地震工程与工程振动, 2014, **34**(5): 1 - 6. (YANG Yu, LI Xiao-jun, HE Qiu-mei, et al. Comparison of measures for eliminating drift instability of transmitting boundary in scattering problems[J]. Earthquake Engineering and Engineering Dynamics, 2014, **34**(5): 1 - 6. (in Chinese))
- [7] 景立平, 廖振鹏, 邹经相. 多次透射公式的一种高频失稳机制[J]. 地震工程与工程振动, 2002, **22**(4): 7 - 14. (JING Li-ping, LIAO Zhen-peng, ZOU Jing-xiang. A high-frequency instability mechanism in numerical realization of multi-transmitting formula[J]. Earthquake Engineering and Engineering Dynamics, 2002, **22**(4): 7 - 14. (in Chinese))
- [8] 景立平, 吴兆营, 邹经相. 近场波动数值模拟稳定性问题分析[J]. 地震工程与工程振动, 2002, **22**(2): 17 - 21. (JING Li-ping, WU Zhao-ying, ZOU Jing-xiang. Stability analysis for numerical simulation of near-field wave motion[J]. Earthquake Engineering and Engineering Dynamics, 2002, **22**(2): 17 - 21. (in Chinese))
- [9] 李小军, 唐晖. 结构体系动力方程求解的显式积分格式的能耗特性[J]. 工程力学, 2007, **24**(2): 28 - 33. (LI Xiao-jun, TANG Hui. Numerical dissipation property of an explicit integration scheme for dynamic equation of structural system[J]. Engineering mechanics, 2007, **24**(2): 28 - 33. (in Chinese))
- [10] 唐晖, 李小军, 亢兴军, 等. 动力方程求解的显式积分格式对数值模拟波动特性的影响分析[J]. 地震学报, 2009, **31**(5): 526 - 536. (TANG Hui, LI Xiao-jun, QI Xing-jun, et al. Effect of an explicit integration formula for dynamic equation on wave property of numerical simulation[J]. Acta Seismologica Sinica, 2009, **31**(5): 526 - 536. (in Chinese))
- [11] 唐晖, 李小军, 李真. 显式积分格式对局部透射边界高频失稳的抑制和消除作用[J]. 世界地震工程, 2010, **26**(4): 50 - 54. (TANG Hui, LI Xiao-jun, LI Zhen. The effect of the explicit integration for depressing and eliminating the high-frequency instability induced by Local Transmitting Boundary[J]. World Earthquake Engineering, 2010, **26**(4): 50 - 54. (in Chinese))
- [12] 谢志南, 廖振鹏. 多次透射公式在波动数值模拟中的一种实现方案[J]. 固体力学学报, 2010, **31**(4): 422 - 426. (XIE Zhi-nan, LIAO Zhen-peng. An implementation of multi-transmission formula for numerically simulating wave motions[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2010, **31**(4): 422 - 426. (in Chinese))
- [13] 谢志南, 廖振鹏. 透射边界高频失稳机理及其消除方法——SH 波动[J]. 力学学报, 2012, **44**(4): 745 - 752. (XIE Zhi-nan, LIAO Zhen-peng. Mechanism of high frequency instability caused by transmitting boundary and method of its elimination——SH wave[J]. Chinese Journal of theoretical and applied mechanics, 2012, **44**(4): 745 - 752. (in Chinese))
- [14] 李小军, 廖振鹏, 关慧敏. 黏弹性场地地形对地震动影响的显式有限元-有限差分方法[J]. 地震学报, 1995, **17**(3): 362 - 369. (LI Xiao-jun, LIAO Zhen-peng, Guan Hui-min. The explicit finite element - finite difference method for viscoelastic site seismic response analysis[J]. Acta Seismologica Sinica, 1995, **17**(3): 362 - 369. (in Chinese))
- [15] 廖振鹏. 工程波动理论导论[M]. 北京: 科学出版社, 2002. (LIAO Zhen-peng. Introduction to wave motion theories for engineering[M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese))