

DOI: 10.11779/CJGE201601001

土体稳定与承载特性的分析方法

黄茂松^{1, 2}

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 结合研究团队多年的研究积累, 分别从砂土与饱和软黏土两个方面阐述了在土体失稳与承载特性分析方法方面的理论研究成果。排水条件下密砂在到达峰值强度前可能会出现应变局部化失稳, 而饱和松砂则可能出现分散性失稳; 建立了基于三维非共轴塑性理论的变形分叉分析方法, 分析了砂土平面应变试验和真三轴试验的应变局部化现象, 进一步分析了各向异性砂土的强度特性和应变局部化现象, 以及砂土的状态相关特性对应变局部化的影响; 建立了基于状态相关本构模型的砂土应变局部化失稳弹塑性有限元分析方法, 探讨了复合体理论和非局部塑性理论在消除有限元网格依赖性问题方面的可行性; 建立了基于二阶功准则和状态相关本构模型的饱和砂土分散性失稳数值分析方法。提出了基于临界状态理论的饱和软黏土各向异性不排水强度理论公式, 以及基于循环累积塑性应变的强度弱化公式, 形成了适合低渗透性饱和软黏土的弹塑性静动力有限元分析方法; 建立了非均质与各向异性软黏土地基稳定性问题的极限分析上限方法, 进一步提出了不排水地基承载特性的虚拟加载上限分析方法, 形成了分析地基承载特性循环弱化的弹塑性有限元法和虚拟加载上限法。所建立的分析方法将为砂土与饱和软黏土地基稳定性和承载特性的理论预测提供重要的技术手段。

关键词: 砂土; 饱和软黏土; 土体稳定; 承载特性; 分析方法

中图分类号: TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 4548(2016)01 - 0001 - 34

作者简介: 黄茂松(1965 -), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 从事岩土工程方面的科研和教学工作。E-mail: mshuang@tongji.edu.cn。



Analysis methods for stability and bearing capacity of soils

HUANG Mao-song^{1, 2}

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: By summarizing years of theoretical research achievements gained by the author and his research team members, the analysis methods to study the instability and behaviors capacity of soils were concluded from two aspects, sands and saturated soft clays, respectively. Under drained loading conditions, the deformation of dense sand may accompany with strain localization before reaching the plastic limit, but that of saturated loose sand may accompany with diffusive instability. The phenomenon of strain localization in plane strain tests and true triaxial tests of sands was studied by the bifurcation analysis based on the three-dimensional non-coaxial plasticity theory. Further, the strength properties and strain localization of anisotropic sands were analyzed, including the strain localization analysis using a state-dependent constitutive model for sands. In addition, the feasibility to overcome the mesh-size dependence problems with the homogenization procedure and the non-local regularization was explored in the finite element analysis. By using the state-dependent constitutive model, the elasto-plastic finite element procedure accounting for the strain localization of drained sands and diffusive instability of saturated sands was proposed. For the saturated soft clays, a simplified formula for calculating their anisotropic undrained shear strength was put forward based on the critical state theory, and the undrained shear strength degradation was also predicted according to the plastic strain accumulated during cyclic loading. Additionally, a rational static and dynamic finite element analysis method for analyzing the saturated soft clays with low permeability was proposed, which effectively solves the problem caused by the incompressible condition. The upper

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(50825803); 国家自然科学基金项目(11372228, 51579177)
收稿日期: 2015 - 12 - 10

bound limit analysis theory was applied in analyzing foundation stability problems considering the strength nonhomogeneity and anisotropy of saturated soft clays. Furthermore, the fictitious loading upper bound limit analysis approach for undrained soft clay, through which the ultimate bearing capacity and load-displacement relationship can be obtained simultaneously, was also proposed. Besides, the elasto-plastic finite element method and fictitious loading upper bound limit analysis approach, which are capable of analyzing the degradation of the ultimate bearing capacity, were formed. The established analysis methods will serve as important means in estimating the ground stability and bearing behaviors of both the sands and saturated soft clays.

Key words: sand; saturated soft clay; soil stability; bearing capacity; analysis method

0 引言

地基承载力和土坡稳定是岩土工程中土体稳定性的两个常见问题,许多学者开展了大量的研究工作。这两类问题通常采用简单实用的极限平衡法,而极限平衡法是假设破坏面上土体同时达到极限强度,但这对于具有应变软化特性的密砂、超固结黏土和结构性黏土是不适合的,现有的计算分析方法无疑需要进一步的改进,对于这些传统的土体承载特性和稳定性问题需要更为合理的分析方法。实际工程中除了上述两个问题以外,还常常遇到一些更为复杂的土体承载特性和稳定性问题。中国沿海地区广泛分布着饱和软弱土,地下空间工程建设规模庞大,软土地下工程开挖引起的失效事故时有发生,诸如软土地基基坑抗隆起稳定性和隧道开挖面稳定性及其失稳破坏模式是工程界十分关注的。另外锚板广泛应用于输电线塔、海洋浮式结构、边坡挡土墙等,对于实际工程中广泛应用的螺旋锚、埋置管线和抗拔基础等抗拔承载力问题,也可以间接地简化为锚板的力学模型。为了应对日益增加的能源需求和开发洁净的再生能源,海上风电开发进入了一个大发展阶段,大直径钢管桩被大量采用作为海洋风电基础型式。由于受风荷载、波浪荷载和风机机组工作荷载等的长期作用,大直径钢管桩的水平承载特性以及长期循环荷载作用下的承载力衰减规律是必须要解决的关键技术难题。

涉及岩土工程土体稳定性的分析方法主要有极限平衡法、极限分析法、滑移线法和弹塑性数值方法。虽然极限平衡法在工程实践中得到了广泛的应用,在理论研究方面也取得显著的进展^[1-5],尽管有少量问题可以得到精确解,但绝大多数问题并不清楚所得到的解是偏安全还是偏不安全。滑移线法根据边界条件对土体微分极限平衡方程求解,由于未考虑机动条件,常被认为是可能的下限解,也只能求出简单受力和几何边界条件下极限荷载解析解,当然有限差分滑移线法的引入可以扩大滑移线法的应用范围以及提高计算精度^[6]。

弹塑性数值分析方法^[7]虽然从理论严格性程度上要高于其它几种方法,且无论在工程应用和设计规范

中都有一定的地位,但其面临着非线性迭代收敛性、离散网格依赖性、土体本构模型以及庞大计算工作量等问题,这些问题无疑严重制约了弹塑性数值方法在工程中的应用,尤其是在土体承载特性和稳定性方面的应用。从理论上来说,极限分析法^[8]比极限平衡法和滑移线法都要严格,但不如弹塑性数值方法,然而在工程应用方面却远远不如极限平衡法和弹塑性数值方法。究其原因主要是由于塑性力学上下限定理的严格性,要构造一个合理但又相对简单的静力许可解析应力场或运动许可解析速度场是十分不容易的。随着计算机软硬件技术的飞速发展,应用数值方法求解上下限解问题已成为十分活跃的领域,取得显著进展的极限分析数值方法包括极限分析有限元方法^[9]和多块体上限法^[10-12]。就上限法而言,尽管这两种引入数值技术的方法在运动许可速度场的构造方面已有很大的改进,而且精度很高;但从工程实践来说,数值实现编程还是过于复杂,另外这两种极限分析方法也无法得到土体承载问题的荷载位移曲线。弹塑性数值方法虽然能够得到失稳前的变形和应力,包括土体承载问题的荷载位移曲线,但要得到合理的极限承载力(相比于极限分析法而言)往往需要特殊的有限元单元技术和改进的非线性迭代技术。而对于诸如土坡稳定分析等重力场问题,还需要结合强度折减技术^[13-15]。

在土体稳定与承载特性分析中,合理考虑土体的基本力学特性是至关重要的,比如在所有极限类分析方法中至少需要土体的强度,如何合理考虑真三维状态下土体的强度、强度的各向异性以及循环荷载作用下土体强度的弱化等是必须要回答的问题。为了合理获得失稳前的应力和变形以及失稳时的极限值,比如土体承载力问题的荷载位移曲线和极限承载力,需要采用合理但又不是太复杂的本构模型。对于砂土问题,需要进一步考虑砂土的剪胀性、各向异性、应变局部化甚至非共轴现象,这些复杂现象的考虑对有限单元法提出了更高的要求,需要建立有效的土体应变局部化失稳的有限元分析方法。对于饱和软黏土问题,可以用总应力分析方法或基于Biot固结理论的有效应力分析方法,土体的特性需要进一步考虑黏土强度的非

均质特性和各向异性、循环加载特性等现象，也涉及到饱和多孔介质有限元方法的改进。

在不排水饱和软黏土地基稳定的极限分析中，土体的强度非均质和各向异性可以在解析机构中得到考虑，但选择合理的解析机构是必要的条件。研究表明，摩擦块与剪流区相结合的解析机构往往能够得到比较合理的结果，而纯摩擦块或纯剪流的解析机构一般难以得到满意的极限值，当然纯摩擦机构可以通过上限有限元法或多块体上限法来大大提高精度，但正如前面提到的，这两种方法往往需要复杂的计算机编程。纯剪流机构可以利用所分析问题的弹性力学解析解来构造，但解析解往往不是容易得到的，而容易用商业化有限元程序计算得到的弹性力学解为纯剪流机构的实用化提供了一条可能的途径。同时研究表明基于纯剪流机构的虚拟加载上限分析方法还可以为不排水饱和软黏土地基的分析提供可靠的荷载位移曲线，并可以推广应用于循环加载问题中。

本文结合笔者研究团队多年来在土体稳定与承载特性分析方法方面的研究积累，分别针对砂土与饱和软黏土，对土体稳定与承载特性分析中所涉及的弹塑性有限元分析方法和极限分析上限方法进行了总结评价，介绍了最新的研究进展，尤其强调了土体的基本力学特性和本构模型在这些分析方法中的应用，以及极限分析上限法与弹塑性数值方法的对比。

1 砂土失稳机理与承载特性

1.1 真三维应力状态下砂土的应变局部化

引起土体失稳的变形局部化现象，普遍存在于边坡、堤坝、地基、锚板和挡土墙等岩土工程领域。室内试验中可以清楚地观察到，土样在剪切过程中伴随着变形局部化现象并最终表现为宏观的剪切带。有关变形分叉现象的研究自 20 世纪 70 年代，一直是岩土力学的焦点问题。研究内容集中在两个方面：①土体变形局部化的产生条件，也是变形局部化的基本问题。②土体失稳后的应力应变反应，本质上可归结于模拟软化现象的边值问题。

(1) 土体分叉的应变局部化理论

目前土体应变局部化的理论体系主要建立在 Hill^[6]判别材料失稳的基本框架上。Rudnicki 等^[17]提出了确定单相固体介质的应变局部化准则。土体应变局部化最常见的现象就是宏观剪切带的出现，剪切带通常描述为一个有一定宽度的带状应变集中区域，区域内外变形场是连续，但是变形率是不连续的，速度场通过剪切带发生跳跃，并认为该跳跃速度和速度梯度在平行于剪切带方向仍保持均匀。

根据 Rudnicki 等^[17]的推导过程，可以得到土体应变局部化产生的判别条件，即：

$$\det(n_i D_{ijkl}^{\text{ep}} n_j) = 0 \quad (1)$$

式中， n_i 为剪切带平面的法向矢量 \mathbf{n} 的分量，

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \sin \alpha, \\ n_2 &= \cos \alpha \cos \beta, \\ n_3 &= \cos \alpha \sin \beta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中， α 为剪切带法线与大主应力作用面夹角， β 为剪切带法线在大主应力作用面上的投影与中主应力夹角（图 1）。若令 $\beta = \pi/2$ ，则 $\mathbf{n} = \{\sin \alpha, 0, \cos \alpha\}^T$ ，即简化为目前通常采用的二维应变局部化判别准则。

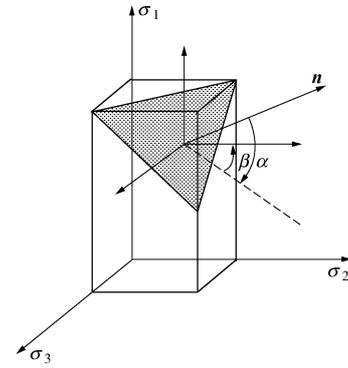


图 1 三维应力状态下剪切带示意图

Fig. 1 Schematic illustration of a shear band under 3D stress condition

不同本构模型对应变局部化分析有较大影响，由于本文重点不是本构模型，因此可以采用相对简单的广义 Mohr-Coulomb 模型，其具体的屈服函数和塑性势函数为

$$F = q - M \cdot g(\theta_\sigma) \cdot p = 0 \quad (3a)$$

$$Q = q + M_c \cdot g(\theta_\sigma) \cdot \ln(p/p_0) = \text{const} \quad (3b)$$

式中， $p = I_1/3$ ， $q = \sqrt{3J_2}$ ， M_c 为状态转换应力比， p_0 为初始围压， $I_1 = \sigma_{ii}$ ， $J_2 = s_{ij}s_{ij}/2$ ， $J_3 = s_{ij}s_{jk}s_{ki}/3$ ， $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ ，Lode 角 $\theta_\sigma = \sin^{-1}[-3\sqrt{3}J_3/(2J_2^{3/2})]/3$ ， $g(\theta_\sigma) = (3 - \sin \varphi)/[(3 - \sin \varphi) + \sqrt{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \sin \theta_\sigma}]$ ， $(-\pi/6 \leq \theta_\sigma \leq \pi/6)$ 。

硬化准则采用全量双曲线形式：

$$M = M_f \frac{\varepsilon_s^{\text{cp}}}{A + \varepsilon_s^{\text{cp}}} \quad (4)$$

式中， $M_f = 6 \sin \varphi_f / (3 - \sin \varphi_f)$ ， A 为材料参数， φ_f 为三轴状态测得的峰值内摩擦角， $\varepsilon_s^{\text{cp}}$ 为广义塑性应变，

$$d\varepsilon_s^{\text{cp}} = \sqrt{\frac{2}{3}} d\varepsilon_{ij}^{\text{cp}} d\varepsilon_{ij}^{\text{cp}}, \quad d\varepsilon_{ij}^{\text{cp}} = d\varepsilon_{ij}^{\text{cp}} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\varepsilon_{kk}^{\text{cp}}$$

(2) 三维非共轴塑性理论

土体的分叉特性强烈依赖于其本构模型。传统塑性理论的流动法则是建立在 Drucker 材料性公设的基

基础上，隐含了塑性应变率 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ 与当前应力 σ_{ij} 的共轴性。然而，试验研究表明流动法则只是一种近似的假定，Roscoe 等早期的试验结果表明，土体的流动法则只有在比例加载的条件下才近乎合理的。大量试验表明，塑性应变率方向还与当前的应力率方向相关。此外，普遍存在的应力主轴旋转所引起的土体塑性变形也说明了传统共轴本构模型的局限性。

应力和应变率的非共轴特性强烈影响土体失稳的变形分叉状态。Rudnicki 等^[17]首先引入带角点的屈服面来反映土体塑性变形的非共轴特性。Rudnicki 等的研究表明，引入非共轴塑性流动法则，弱化了土体的剪切模量，使得应变局部化理论预测结果与试验观察更为一致。引入非共轴流动法则的必要性也被不少学者通过平面应变双轴试验和相应的理论研究得到了证实^[18-22]。

基于 $p-q$ 应力空间，Rudnicki 等定义非共轴塑性应变率为

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{np} = \frac{1}{H_t} \hat{s}_{ij}^n = \frac{1}{H_t} \left(\hat{s}_{ij} - \frac{\hat{S}_{kl} S_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} s_{ij} \right), \quad (5)$$

式中， $\hat{s}_{ij}^n = \hat{s}_{ij} - \frac{\hat{S}_{kl} S_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} s_{ij}$ 为非共轴应力率，分别

正交于 δ_{ij} 和 s_{ij} ，上标 $\hat{\cdot}$ 表示 Jaumann 客观应力率， H_t ($H_t > 0$) 表示屈服面切线方向的塑性硬化模量，下标 $i, j, k, l, m, n=1, 2, 3$ ，下文同。

可以得到二维状态下纯非共轴塑性柔度张量：

$$C_{ijkl}^{np} = \frac{1}{H_t} \left(\frac{\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}}{2} - \frac{\delta_{kl} \delta_{ij}}{\delta_{mn} \delta_{mn}} - \frac{s_{ij} s_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} \right). \quad (6)$$

文献[23, 24]已证明在三维应力空间中，式(5)定义的非共轴塑性应变率含有共轴塑性应变率而不再有效。

基于三维共轴应力空间，考虑第三应力不变量的影响，可以求得非共轴应力率为^[23-24]

$$\hat{s}_{ij}^n = \hat{s}_{ij} - \frac{\hat{S}_{kl} S_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} s_{ij} - \frac{\hat{S}_{kl} S_{kl}}{S_{kl} S_{kl}} S_{ij}, \quad (7)$$

式中， $S_{ij} = s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} - \frac{3}{2} J_3 s_{ij}$ ，其主方向与 σ_{ij} 主方向共轴， \hat{s}_{ij}^n 分别正交于 δ_{ij} ， s_{ij} 和 S_{ij} 。类似于 Rudnicki 等在 $p-q$ 应力空间定义的“角点结构”，基于三维应力空间定义纯非共轴塑性的本构关系，这里仍采用线性形式：

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{np} = \frac{1}{H_t} \left(\hat{s}_{ij} - \frac{\hat{S}_{kl} S_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} s_{ij} - \frac{\hat{S}_{kl} S_{kl}}{S_{mn} S_{mn}} S_{ij} \right), \quad (8)$$

式中， $H_t = \infty$ 表示共轴塑性理论。这样可以得到三维状态下纯非共轴塑性的柔度张量：

$$C_{ijkl}^{np} = \frac{1}{H_t} \left(\frac{\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}}{2} - \frac{\delta_{kl} \delta_{ij}}{\delta_{mn} \delta_{mn}} - \frac{s_{ij} s_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} - \frac{S_{ij} S_{kl}}{S_{mn} S_{mn}} \right). \quad (9)$$

(3) 砂土平面应变试验分析

图 2~4 为基于上述非共轴形式和三维广义 Mohr-Coulomb 模型对 Han 等^[20]的各向同性 Ottawa 砂土平面应变排水试验结果进行的应变局部化分析成果^[23]。相比较试验结果，尽管二维非共轴理论预测效果得到明显的改善，但与试验观察仍有一定的偏差，显然三维非共轴理论的预测效果最好。

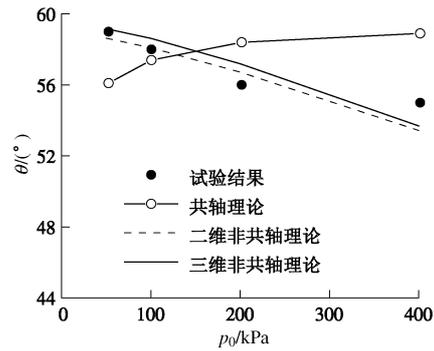


图 2 初始围压 - 剪切带倾角

Fig. 2 Relationship between initial confining pressure and inclination angle of shear band

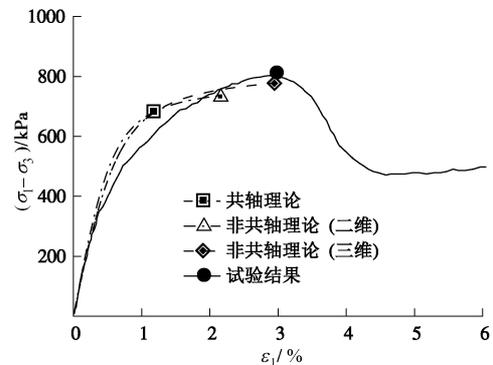


图 3 轴向应变 - 应力差

Fig. 3 Relationship between axial strain and stress difference

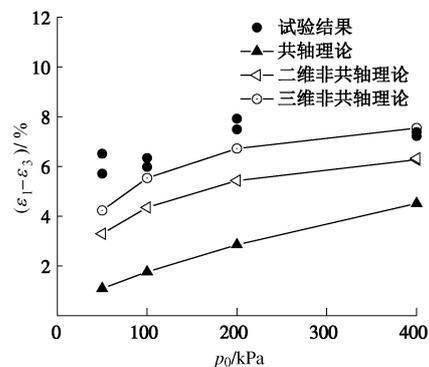


图 4 分叉时的围压 - 剪应变

Fig. 4 Relationship between shear strain and confining pressure at the inception of shear band

这里需要特别指出的是, 试验结果表明剪切带角度随着围压增加而减小, 而传统共轴理论的预测结果却与试验规律相反。这仅仅是因为采用了共轴理论还是需要更为合理的本构模型, 无疑值得进一步研究。

有必要说明的是, 尽管 Papamichos 等^[21]在 Rundnicki 等建议的非共轴流动理论基础上进一步引入了运动硬化准则, 也合理地模拟了上述试验中的剪切带角度和分叉时的应变。然而, 却在非共轴塑性流动准则的基础上增加了运动硬化准则, 而本质上两种准则都是描述土体各向异性的塑性理论。因此, 在非共轴塑性流动理论基础上再增加运动硬化准则缺乏直接的试验和理论依据, 使得分别描述非共轴特性和运动硬化特性的两个参数的物理意义难以区别, 也很难通过有效的室内试验手段分别加以量测。可以看出, Papamichos 等在选取非共轴模型的参数时具有相当程度的人为性。Qian 等^[25]从组构演化的角度引入了具有非共轴特性的背应力来描述运动硬化, 将土体非共轴行为归结为应力诱发的组构各向异性, 较好地预测了砂土平面应变试验的应变局部化现象, 而其中的各向异性参数可以通过细观分析来确定。但值得指出的是, 其背应力形式还远远不够完善, 需要进一步的探讨。

(4) 真三轴试验砂土强度及变形分叉影响

在岩土工程领域广泛采用的 Mohr-Coulomb 准则, 由于忽略了中主应力影响, 常只能预测土体强度的下限, 低估了土体在平面应变状态及一般应力状态的强度。另一方面, 当前普遍认为土体强度由平滑峰值强度决定, 然而平滑峰值强度代表的是土体的强度极限, 只在土体均匀变形假定下破坏时成立。然而大多数土体, 如中密砂等, 常发生应变局部化非均匀变形现象, 土体强度得不到充分发挥, 因而平滑峰值强度准则常过高估计了土体实际强度。

目前关于应变局部化的理论和试验分析大多是在平面应变状态下进行的。然而理想化的平面应变状态已无法满足复杂工程实际的需要, 而且砂土的真三轴排水试验已充分揭示了应变局部化现象与三维应力状态有关^[26-28]。Lade 等^[27]的一系列固定 b 值 ($b=(\sigma_2-\sigma_3)/(\sigma_1-\sigma_3)$ 为中主应力比) 条件下的真三轴试验表明: 当 $b=0$ 状态时不会产生应变局部化现象, 而在 $b=1$ 状态却表现出明显的应变软化 (局部化) 现象。这一系列真三轴试验研究表明, 土体失稳随中主应力比呈规律性变化, 不同中主应力比条件下土体的失稳机理不尽相同。但对于中主应力对应变局部化到底有何影响, 也就是说真三轴试验中的分叉现象, 需要理论上的合理解释。

为了更加合理地模拟真三轴试验结果, 有必要对

上述广义 Mohr-Coulomb 模型中的 π 面屈服形态函数 $g(\theta_\sigma)$ 进行改进。首先采用了 William 和 Warnke 提出的一种椭圆形式的形状函数, 函数中包含了一个附加参数 β , β 为 $b=1.0$ 和 $b=0.0$ 试验条件下广义应力比的比值^[29]。然后结合三维非共轴理论, 对 Wang 等^[28]的 Santa Monica Beach 密砂的真三轴排水试验进行了模拟, 模拟结果如图 5 ($b=0.8$, 其它 b 值结果见文献^[29]) 和图 6 所示。总的看来, 非共轴理论的预测结果明显优于共轴模型的预测结果, 与试验结果更相符。

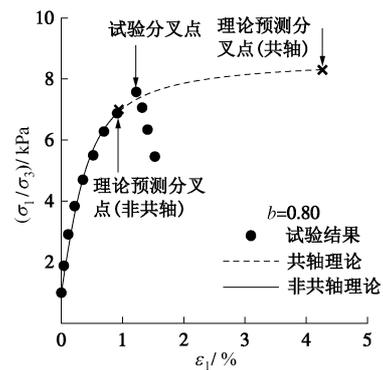


图 5 大主应变 - 应力比

Fig. 5 Relationship between major principal strain and stress ratio

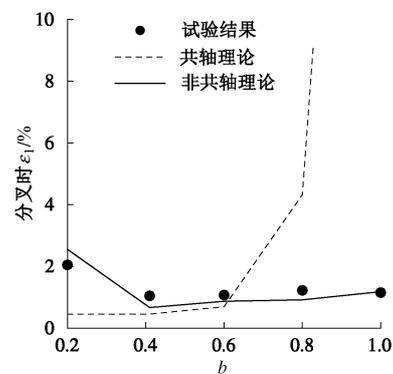


图 6 分叉时的大主应变与中主应力比的关系

Fig. 6 Relationship between major principal strain at bifurcation and intermediate principal stress ratio

对砂土的三维强度描述, Lade-Duncan 准则是一个公认较合理的强度准则。Ochiai 等^[30]对于 Cambria 松砂的真三轴试验, 其破坏强度基本上可以用 Lade-Duncan 强度准则描述; 但 Wang 等^[28]对 Santa Monica Beach 密砂的真三轴试验, Lade-Duncan 破坏准则却无法合理预测其峰值强度。鉴于 Mohr-Coulomb 准则更为工程界所接受, 采用椭圆插值的角隅函数对广义 Mohr-Coulomb 强度准则进行修正, 可以证实其与 Lade-Duncan 准则的相似性。图 7 为采用修正广义 Mohr-Coulomb 准则对 Lade 等^[27]的

Santa Monica Beach 密砂真三轴试验应变局部化预测结果,从峰值内摩擦角与中主应力比 b 的关系可以看出,基于非共轴模型在 $0 < b \leq 1$ 均预测到应变局部化发生,预测的土体强度由分叉强度决定,且预测值更符合试验结果^[29]。

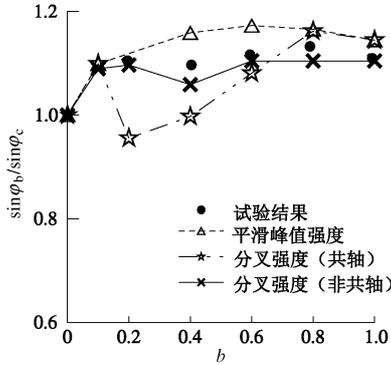


图7 峰值内摩擦角与中主应力比 b 的关系

Fig. 7 Relationship between peak friction angle and intermediate principal stress ratio

1.2 砂土各向异性强度特性与应变局部化

受天然沉积等多种因素影响,实际工程中砂土的强度常表现出各向异性特性,因此如何合理描述真三轴以及主应力方向旋转条件下各向异性砂土的强度特性和应变局部化现象是需要解决的难点问题。Ochiai 等^[30]的 Cambria 砂真三轴试验结果表明了应力状态和各向异性对砂土强度的影响,在同一象限内,主要表现为应力状态即中主应力比 b 的影响,不同象限之间,当中主应力比相同时(比如 $b=1.0$),其差别则来自各向异性。

Lade 等^[31]的试验结果表明,当砂土存在各向异性时,空心圆柱扭剪试验(内外压相等)得到的强度特性在 $0.2 < b \leq 1.0$ 范围时与真三轴试验有很大的差别。这是因为当内外压相等时, $b = \sin^2 \delta$, b 从 0 变化到 1 的时候, δ 同时将从 0° 变化到 90° ,当 $\delta = 90^\circ$ 时,实际上已变化到第 III 象限,此时应力状态和各向异性均为影响强度的主要因素,必然导致空心圆柱扭剪试验结果中 b 接近 1 条件下的强度低于真三轴。

层状各向异性强度准则与各向同性强度准则的差异主要表现为在偏平面形状的不同,修正后的角隅函数可表示为^[32-33]

$$g'(\theta) = g(\theta_\sigma)[1 + a \sin^2(\theta/2)] \quad (10)$$

根据主应力方向与土体沉积面的关系, $\theta = \pi/6 - \theta_\sigma$ (第 I 象限), $\theta = \pi/2 + \theta_\sigma$ (第 II 象限), $\theta = 5\pi/6 - \theta_\sigma$ (第 III 象限)。这种修正方法可以用于真三轴试验的模拟,但不能合理描述主应力方向变化对砂土强度参数的影响。参考 Pietruszczak 等^[34]、Rodriguez 等^[35]的方法,考虑沉积砂土大主应力方向与沉积面关系的影响,

在椭圆型角隅函数中引入一个反映各向异性特性的项,得到了适合于主应力轴旋转条件下的三维各向异性 Mohr-Coulomb 准则^[36]:

$$F = q - M_{f_0}(1 + \Omega - 3\Omega l^2)g(\theta_\sigma)p = 0, \quad (11)$$

式中, l 为反映组构张量与主应力方向关系的量, Ω 为各向异性系数。

对 Lade 等^[31]的 Santa Monica Beach 砂以及 Lade 等^[37]的 Nevada 砂空心圆柱剪切试验的模拟结果如图 8, 9 所示,模拟结果与试验结果的规律基本一致。

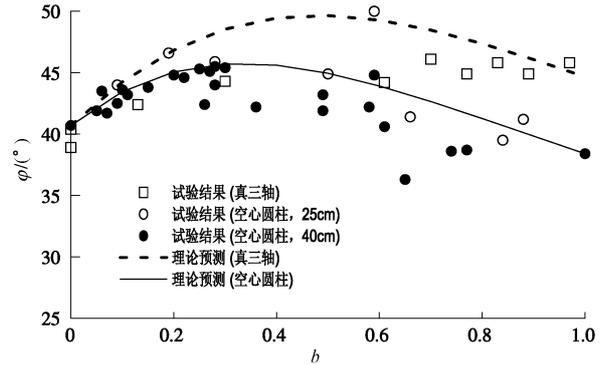


图8 空心圆柱扭剪试验及真三轴试验预测结果对比

Fig. 8 Comparison of predicted results between hollow cylinder tests and true triaxial tests

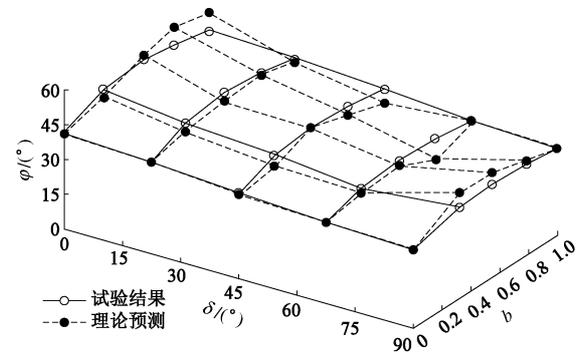


图9 中主应力比及加载方向对内摩擦角的影响预测

Fig. 9 Influence of intermediate principal stress ratio and loading direction on prediction of internal friction angle

对 Oda 等^[38]的各向异性 Toyoura 砂土平面应变试验结果进行应变局部化模拟。当加载方向与沉积面法线夹角为 45° 条件下,采用各向同性及各向异性强度准则建立的弹塑性本构模型预测的应力应变关系如图 10 所示,变形分叉分析结果如图 11 所示,基于常规共轴理论预测的分叉过早,而基于非共轴理论预测的分叉点晚于共轴理论,但与试验分叉点符合较好。分析表明,加载方向夹角增大对应变局部化有一定延迟作用。变形分叉点对应的峰值剪应力随夹角的变化如图 12 所示,共轴模型预测结果低于非共轴结果,基于各向异性准则建立的非共轴弹塑性本构模型预测结果

与试验结果符合较好。

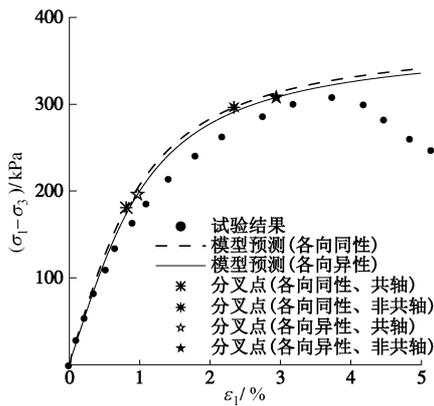


图 10 大主应变 - 偏应力 ($\delta = 45^\circ$)

Fig. 10 Relationship between major principal strain and deviatoric stress

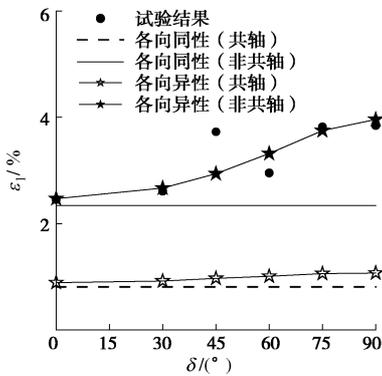


图 11 分叉时的大主应变与加载方向角的关系

Fig. 11 Relationship between major principal strain at bifurcation and loading angle

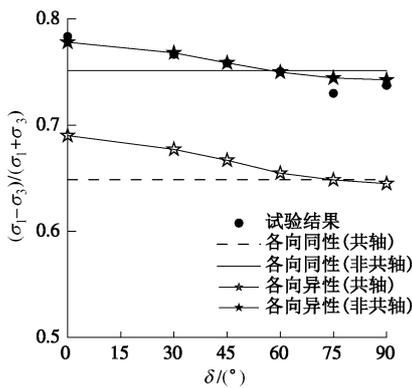


图 12 分叉时的应力比与加载方向角的关系

Fig. 12 Relationship between stress ratio at bifurcation and loading angle

对 Abelev 等^[39]的各向异性砂土真三轴试验结果进行模拟。试样为 Santa Monica Beach 密砂，相对密实度 $D_r=90\%$ ，试样初始围压为 50 kPa。当中主应力比为 $b=0.26$ 时，采用各向异性非共轴弹塑性本构模型预测的应力应变关系如图 13 所示。变形分叉点对应的

峰值应力比随中主应力比 ($0 \leq b \leq 1.0$) 的变化规律如图 14 所示。总体而言，本模型能够合理反映中主应力变化对应力比的影响。变形分叉分析表明，除 $b=0$ 外，其它中主应力比条件下均预测到了应变局部化发生。由此可见，变形分叉明显降低了土体的峰值应力比。同时，相对于 Lu 等^[40]的预测结果，本文的预测结果更符合试验结果。

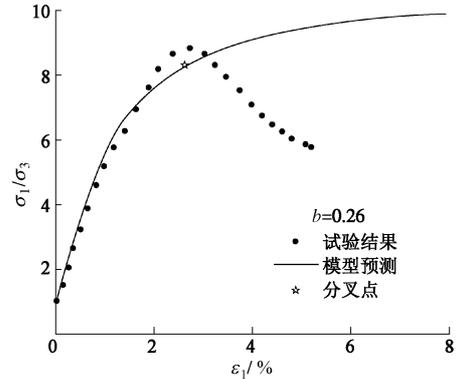


图 13 大主应变 - 应力比

Fig. 13 Relationship between major principal strain and stress ratio

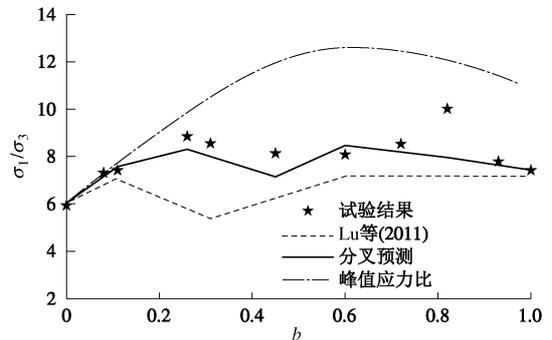


图 14 分叉时的应力比与中主应力的关系

Fig. 14 Relationship between stress ratio at bifurcation and intermediate principal stress

1.3 砂土的状态相关特性与应变局部化

长期以来，对砂土力学特性的模拟是将不同密实度的同一种砂看作为不同的材料，现在国际上的通用做法是引入状态相关的临界状态理论，实现同一种砂土的本构模型中采用统一的一套材料参数。建立砂土状态相关临界状态理论的关键是引入状态参数 ψ ，而这个状态参数与砂土的密实度和有效平均应力相关，比较常用的表达形式为^[41]

$$\psi = e - e_c \quad (12)$$

式中， e 为当前孔隙比， e_c 为相同压力下的临界孔隙比。对于 Toyoura 砂， $e_c = e_r - \lambda_c (p/p_a)^\xi$ ^[41]；对于 Hostun 砂， $e_c = e_r - \lambda_c \ln p$ ^[42]， e_r 和 λ_c 为模型参数。

状态相关本构模型的关键是将峰值应力比 M_p 和状态转换线斜率 M_d 与上述的状态参数建立关系。对于 Toyoura 砂, $M_p = M_{cs} \exp(-k_p \psi)$, $M_d = M_{cs} \exp(k_p \psi)$; 对于 Hostun 砂, $M_p = M_{cs} (1 + k_p < -\psi >)$, $M_d = M_{cs} (1 + k_p \psi)$ 。另外还需对前述的广义 Mohr-Coulomb 模型作一些修改, 包括引入增量双曲线形式的应力比 M 的硬化规律, 以及在剪胀性的描述上采用了更广义的形式:

$$D = \frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_s^p} = \frac{d_0}{M_c} [M_d g(\theta) - \eta] \quad (13)$$

式中, d_0 为模型参数, $\eta = q/p$ 。采用此模型对不同密实度和初始围压条件下 Toyoura 砂和 Hostun 砂的三轴试验进行了合理的模拟^[43-44]。

砂土强度依赖于砂土的密实度和围压, 尽管可以直接采用上述状态相关的砂土临界状态本构模型进行边值问题的有限元分析, 但从工程实用角度仍然希望能够最大程度地利用经典的 Mohr-Coulomb 准则, 为此建立砂土的峰值摩擦角和临界状态摩擦角的经验关系是必要的。

Bolton^[45]基于破坏时的平均有效应力和相对密度建立了砂土峰值摩擦角和临界状态摩擦角的经验关系式, 但基于状态参数 ψ 的相关性应该更符合本构模型的本质。参考 Yang 等^[46]的方法, 针对 Toyoura 砂, 利用状态相关的砂土本构模型可以得到最大剪胀角 θ_{max} 与初始状态参数 ψ_0 以及峰值摩擦角 φ_p 与临界状态摩擦角 φ_c 的经验关系式 (图 15, 16):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_p - \varphi_c &= 0.6\theta_{max} \\ \theta_{max} &= -70.777\psi_0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

这个经验表达式可以应用于砂土地基稳定性分析中, 并与基于完整本构模型的计算结果进行比较。

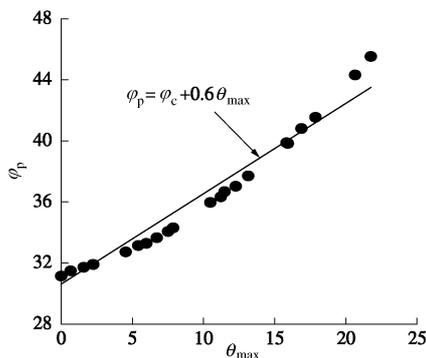


图 15 峰值摩擦角与最大剪胀角的关系

Fig. 15 Relationship between peak friction angle and maximum dilatant angle

尽管 Papamichos 等^[21]以及钱建固等^[22-23]运用非共轴流动理论对 Han 等的平面应变试验结果重新进行了分析, 对剪破角随初始有效围压的变化规律作出了

合理的解析, 但仅仅引入非共轴理论还是不够的。最为重要的一点是现有的用于应变局部化分析的本构模型在正确描述砂土的剪胀特性上是远远不够的, 因此无法反映剪切带形成的全过程, 更不能反映土的密度和有效体积应力对剪破角的综合影响。图 17, 18 为采用基于材料状态相关理论的砂土共轴本构模型对 Hostun 砂的平面应变排水试验的应变局部化分析结果^[43]。分析结果表明, 采用材料状态相关共轴本构模型虽然预测的剪破角远远小于试验观察得到的结果, 但能够描述出剪破角随初始围压增加而减小的这一规律, 这是传统砂土本构理论做不到的。当然如果进一步引入非共轴流动理论加以改进, 则模拟结果就会得到明显的改善, 如图 17, 18 所示。

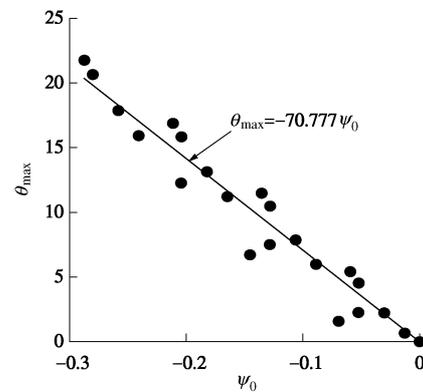


图 16 最大剪胀角与初始状态参数之间的关系

Fig. 16 Relationship between maximum dilatant angles and initial state parameters

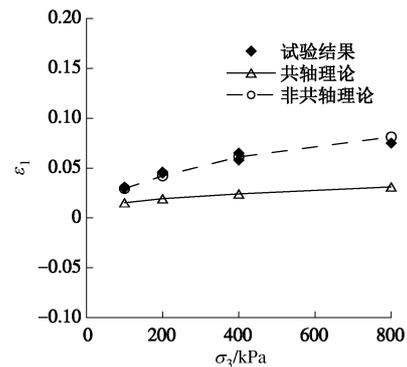


图 17 分叉时的围压 - 轴向应变

Fig. 17 Relationship between axial strain and confining pressure at inception of shear band

对于考虑状态相关各向异性砂土的本构模型描述, 需要重新定义各向异性临界状态线表达式。具体可通过采用组构张量考虑砂土的微观结构分布特征, 基于组合应力张量引入各向异性状态变量 A ^[47-49] 进行实现。各向异性临界状态线的有关参数可以通过常规三轴压缩和三轴拉伸试验得到, 然后据此重新确定状

态参数 ψ 以及峰值应力比 M_p 和状态转换线斜率 M_d , 这样就可以建立状态相关的砂土各向异性本构模型。

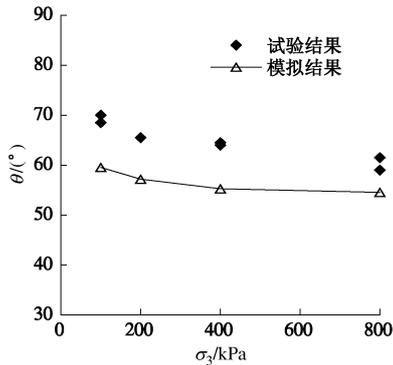


图 18 初始围压 - 剪破角

Fig. 18 Relationship between initial confining pressure and inclination angle of shear band

笔者等^[49]对不同沉积角度 Toyoura 砂平面应变试验的应变局部化现象进行了模拟, 李学丰等^[50]进一步基于非共轴理论分析了各向异性砂土的应变局部化。

1.4 考虑砂土状态相关特性的土体稳定弹塑性有限元分析

目前砂土的土体稳定与承载特性分析大多采用各向同性的刚塑性或理想弹塑性的本构理论, 在工程实践中往往采用相关联流动法则, 没有合理地考虑土体的剪胀性。而实际的剪胀角 θ 往往是介于 0 和摩擦角 φ 之间; 如假定 $\theta = 0^\circ$, 则会得到比较保守的结果, 而假定 $\theta = \varphi$, 这样就会过高估计土体的体积应变且土体的强度也会有所提高。Drescher 等^[51]采用 Davis 提出的等效摩擦角方法, 在极限分析上限法中考虑了剪胀角的影响。然而, Yin 等^[52]在条形基础地基承载力分析中, 通过与基于非相关联理想弹塑性数值方法的对比, 发现等效摩擦角方法与数值方法仍存在较大的差别。实际上, 基于非相关联理想弹塑性本构模型也并不能完全真实地反映土体的剪胀特性。

事实上砂土的剪胀性是比较复杂的, 其影响体现在两个方面, 首先不同密实度的砂土剪胀角不同, 在有限元分析中若将剪胀角当作砂土的材料常数而未充分考虑密实度变化的影响, 计算结果可能与实际有较大差异; 其次, 砂土的峰值强度也与密实度有关, 比如密砂在剪切过程中的剪胀现象会令其剪切强度随着密实度的减小而减小, 即出现一定程度的软化现象。这种密实度变化造成的软化现象很难在常规的分析方法中给予合理的考虑, 因此, 有必要采用基于状态相关砂土本构模型的弹塑性数值分析方法来更为合理地考虑砂土的剪胀特性。另外, 砂土的各向异性也是一个重要的影响因素, 有必要在弹塑性数值分析方法中考虑它的影响。

对于土坡稳定分析, 由于土坡稳定性弹塑性有限元分析通常采用强度折减技术, 而且基于强度折减技术的弹塑性有限元方法可用于非饱和、非稳定渗流以及含软夹层等情况^[53-54], 因此十分方便。但是砂土状态相关本构模型中土的峰值摩擦角是状态参数的函数, 极限强度隐含在多个模型参数当中, 进行强度折减的时候会改变土体的刚度, 从而影响边值问题的刚度分配, 进而改变应力分布规律。因此, 通常的强度折减技术不适用于采用砂土状态相关本构模型的有限元法, 只能利用弹塑性有限元计算结果和极限平衡法相结合的方法。至于抗滑力的计算, 可采用基于峰值强度的 Mohr-Coulomb 强度公式, 也可以利用应变局部化判别公式进行, 此值与由有限元插值得到的滑动力之比即为安全系数。由于纯砂土的黏聚力一般为零, 坡面即为安全系数最低的滑动面, 因此不同的分析方法得到的安全系数相差不大。必须指出的是, 对于其他土类可能会有很大的区别。

(1) 砂土上条形基础地基承载力分析

对于不同密实度砂土上浅基础地基承载力或砂土中锚板抗拔承载力问题可以采用 3 种分析方法: ①基于状态相关砂土本构模型的常规弹塑性有限元分析; ②基于状态相关强度参数的地基极限承载力解析形式; ③基于应变局部化和复合体理论的渐近破坏有限元分析。有关基于应变局部化和复合体理论的分析将在后面介绍, 这里主要介绍前面两种方法的区别。

下面以砂土上条形基础的地基承载力为例, 计算模型见图 19 所示, 基础宽度 $B=5\text{ m}$, 地基土为 Toyoura 砂。图 20 为计算得到的不同密实度砂土地基条形基础基底反力与竖向位移的关系曲线, 在沉降为 0.1 倍基础宽度时, 对于较为密实的砂土地基 (如相对密实度为 90% 和 70%) 基本上出现了峰值, 而对于较为松散的砂土 (如相对密实度为 50%, 30% 和 10%) 仍未出现明显峰值。表 1 给出了弹塑性有限元计算结果 (方法①) 与太沙基极限承载力公式计算结果 (方法②) 的对比。

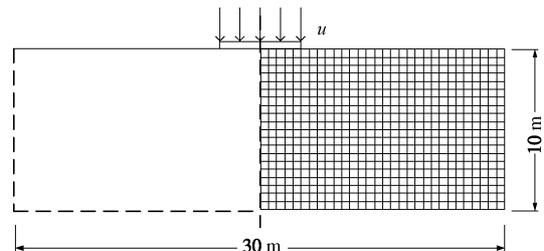


图 19 地基承载问题计算模型

Fig. 19 Schematic diagram of bearing capacity of strip foundation

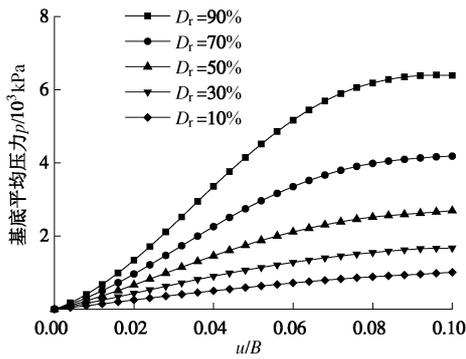


图 20 条形基础基底平均反力与竖向位移关系曲线

Fig. 20 Curves of average reaction force versus vertical displacement of strip foundation

表 1 地基承载力有限元计算与太沙基公式对比

Table 1 Comparison of bearing capacities by finite element method and Terzaghi formula

	kPa				
相对密实度	90%	70%	50%	30%	10%
有限元法	6396	4183	2689	1670	1007
太沙基公式	8723	4939	2957	1742	1073

从表 1 中可以看出对于松砂, 虽然沉降为 $0.1B$ 时未达到峰值, 但此时基底反力随位移的增长速率已经较缓, 因此可以判断两者结果会比较接近。而对于密砂, 由于剪胀性软化的影响, 采用状态相关本构模型的有限元承载力峰值明显低于太沙基极限承载力公式结果。当采用太沙基地基承载力公式时, 取 1 倍基础宽度深度处的初始围压和初始孔隙比计算初始状态参数, 然后根据式 (14) 计算出相应的峰值摩擦角 ϕ_p 。

砂土的各向异性也是影响地基承载力的重要因素。Azami 等^[55]开展各向异性砂土地基承载力的 1g 物理模型试验, 试验得到极限承载力与沉积面角度 α 的关系, 可以发现当 $\alpha=0^\circ$ 时极限承载力最大, 而 $\alpha=60^\circ$ 时最小, 且 $\alpha=90^\circ$ 与 $\alpha=60^\circ$ 时极限承载力接近。Azami 等^[55]还进一步利用 Pietruszczak 等^[34]提出的各向异性砂土强度准则(基于广义 Mohr-Coulomb 准则)对模型试验的荷载位移曲线进行了弹塑性有限元模拟。从计算结果可以发现, 如果不考虑应变局部化现象, 当 $\alpha=0^\circ$ 和 90° 时计算得到的极限承载力比较接近(尽管荷载位移曲线存在较大差异), 当 $\alpha=45^\circ$ 时计算得到的极限承载力最低, 但与 $\alpha=60^\circ$ 时比较接近, 这与模型试验有较大的差别, 因此有必要考虑应变局部化的影响。

(2) 砂土地基中锚板抗拔承载力分析

下面再以砂土地基中条形锚板抗拔承载力问题为例, 计算模型见图 21 所示, 埋深 $H=10\text{ m}$, 宽度 $B=1, 2, 4, 10\text{ m}$, 地基土为 Toyoura 砂。图 22 为相对密实度为 90% 的密砂中不同埋深比的条形锚板平均反力与

竖向位移的关系曲线, 可以看出密砂中的锚板埋深比 $H/B < 5$ 时, 都出现了明显的荷载峰值和随后的软化现象。图 23 给出了与 Koutsabeloulis 等^[56]提出的锚板抗拔承载力系数 N_γ 简化公式的比较, 为考虑砂土的剪胀性, 取埋深一半处的土体围压和初始孔隙比计算状态参数, 并根据式 (14) 计算出相应的峰值摩擦角和最大剪胀角, 可以发现对于松砂和中密砂两者吻合较好, 但对于密砂, 由于该简化公式来自剪胀角较小的有限元计算, 因此计算结果较为保守。

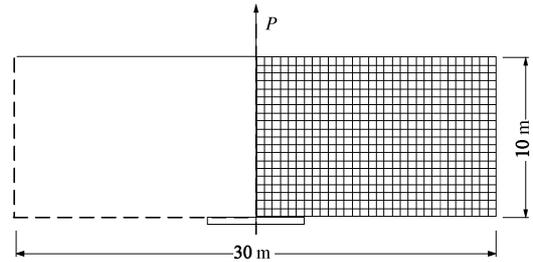


图 21 抗拔锚板计算模型

Fig. 21 Schematic diagram of horizontal anchor

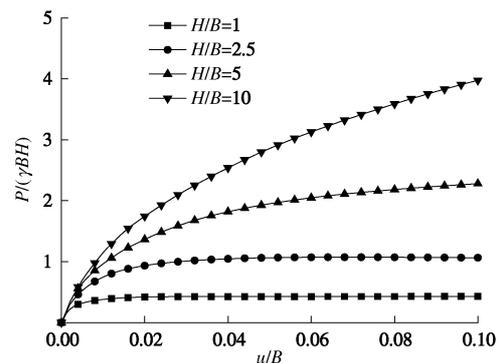


图 22 $D_r=90\%$ 砂土中锚板平均反力与竖向位移关系曲线

Fig. 22 Curves of average reaction force versus vertical displacement of horizontal anchor embedded in sand ($D_r=90\%$)

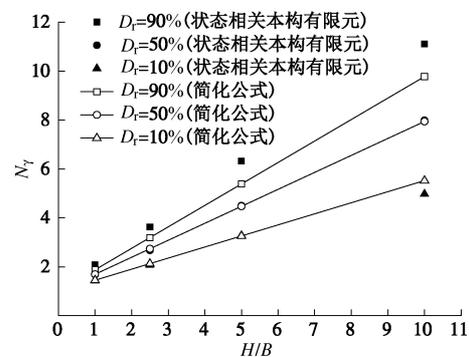


图 23 状态相关本构有限元计算结果与简化公式结果比较

Fig. 23 Comparison among calculated results by state-dependent finite element methods and simplified formula

1.5 土体应变局部化失稳的有限元分析方法

应该说应变局部化有限元分析涉及到的问题很多, 其中一个最主要也是国内外学者研究得最多的问题是所谓的单元尺寸敏感性问题。从边值问题的应变局部化数值模拟来看, 大量研究工作已表明基于经典连续介质力学理论的应变局部化数值分析结果是不能令人满意的。原因是当应变局部化产生时拟静力荷载下的控制方程将失去椭圆型, 这种椭圆型的丧失将直接导致数值分析结果病态地依赖有限元单元尺寸。为克服这一难题, 目前国内外学者采用了多种途径, 但大多没有应用于土体应变局部化分析中。目前真正用于土体分析中的主要有采用描述含剪切带土体平均力学特性的复合体理论以及采用非局部塑性模型。下面主要先讨论基于复合体理论和非局部塑性模型的有限元分析方法。

(1) 基于复合体理论的分析方法

a) 砂土分叉后的力学性状 — 复合体理论

一个合理的应变局部化理论框架, 应该具有以下两方面的能力: ①能描述含剪切带土体的宏观力学性质, 模型参数可以通过室内试验来确定; ②能消除应变局部化有限元分析时的单元尺寸敏感性。Pietruszczak 等^[57]提出了应变局部化的复合体理论, 但原来的理论是建立在局部坐标系而不是整体坐标系上的, 而这种基于局部坐标系上的本构理论在推广到三维问题时会遇到一些困难。Huang 等^[58]、黄茂松等^[59-60]通过整体坐标系下的剪切带上下面的速度差值 $\dot{\mathbf{g}}$ 和作用在剪切带上的应力率 $\dot{\mathbf{i}}$ 建立剪切带材料的本构方程:

$$\dot{\mathbf{i}} = [K_{ep}] \dot{\mathbf{g}}, \quad (15)$$

式中, $[K_{ep}]$ 为剪切带材料的弹塑性刚度矩阵。剪切带材料假设为软化型, 由局部化变形开始产生时的应力状态 m_0 降低至剪切带材料的残余应力状态 m_r 。利用剪切带内外接触面上的应力连续条件, 可以推导出含剪切带土体的宏观应力应变关系为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ [D_{ep}] - \mu [D_{ep}] [N] ([D_{ep}] + \mu [N]^T [D_{ep}] [N])^{-1} [N]^T [D_{ep}] \right\} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad (16)$$

$$\text{式中, } [N]^T = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ 0 & n_2 & 0 & n_1 & n_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}, \quad \mu = l / A, \quad l$$

为剪切带的长度, A 为试样的截面积, μ 可以认为是一个特征长度参数 (对应非局部应变理论), $[D_{ep}]$ 为剪切带外土体的弹塑性刚度矩阵。

图 24 为 Han 等^[20]的 Ottawa 干密砂平面应变试验模拟结果, 应该说试验曲线与理论模拟曲线是比较相符的。

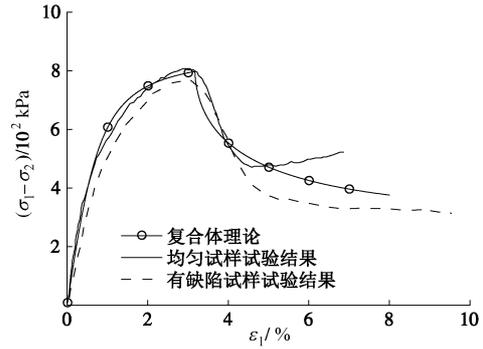


图 24 平面应变压缩试验中干密砂的力学特性

Fig. 24 Mechanical properties of dry dense sand specimens in plane strain biaxial compression tests

b) 含缺陷密砂平面应变试样的有限元分析

考虑一个长宽比为 3 : 1 的平面应变试件, 初始围压为 100 kPa, 材料采用标准 Toyoura 砂, 初始孔隙比为 0.713, 轴向给定一位移, 如图 25 (a) 所示。为了触发应变局部化引入几何缺陷, 其中顶面宽度比底面长 10%。计算采用两种不同尺寸的有限元网格见图 25 (b) 和图 25 (c)。图 26 为分别采用两种不同密度的网格时, 通过常规砂土状态相关本构和复合体理论得到的荷载位移曲线。对于复合体理论, 无论是采用密网格或疏网格的荷载位移曲线几乎完全一致。图 25 (b) 和图 25 (c) 同时也显示了利用局部化判别公式判断会发生局部化的高斯点, 可以看出发生局部化的积分点区域基本相同。

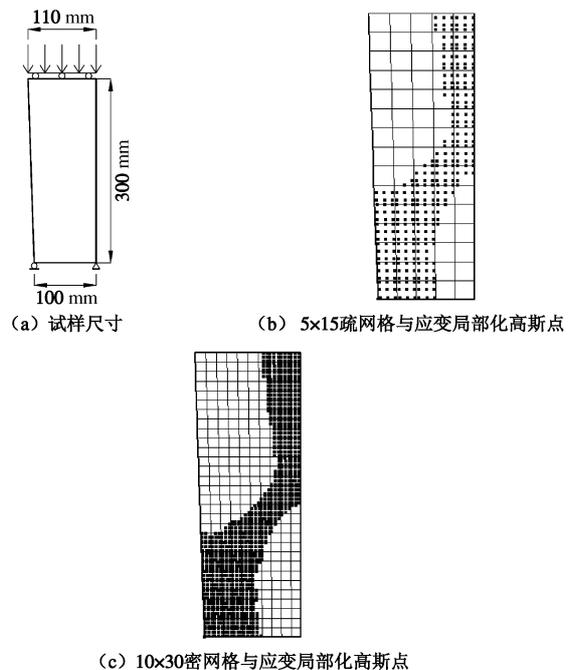


图 25 有几何缺陷的平面应变试件示意图

Fig. 25 Schematic diagram of plane strain specimen with geometric imperfections

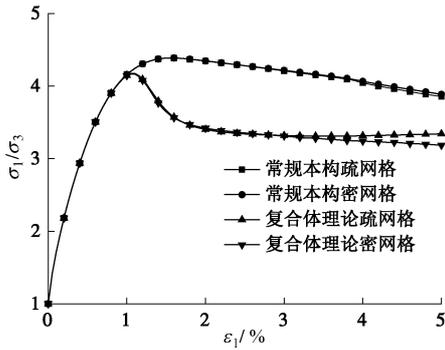


图 26 不同网格计算得到的应力应变关系曲线对比

Fig. 26 Comparison among stress-strain relationships for different meshes

c) 砂土地基上条形基础地基承载力

前面已介绍了基于材料状态相关砂土临界状态本构模型的常规弹塑性有限元分析，但由于应变局部化现象是不可避免的，因此本小节进一步采用了基于应变局部化和复合理论的渐近破坏有限元分析方法。

对图 19 所示的地基承载力问题进一步进行应变局部化分析，砂土的相对密实度为 70%。图 27 为浅基础地基中土体达到应变局部化条件的高斯积分点，图 28 为不同剪切带残余强度 (m_r 值) 时基底反力与竖向位移的关系曲线，可以看出复合理论计算结果明显小于常规状态相关本构模型计算结果，说明地基土中局部区域发生了显著的应变局部化现象，但由于现有复合理论还缺乏剪切带消失、方向旋转等特殊技术，所以对于类似地基承载力问题，剪切带曲线较为复杂的情况，计算很难收敛。

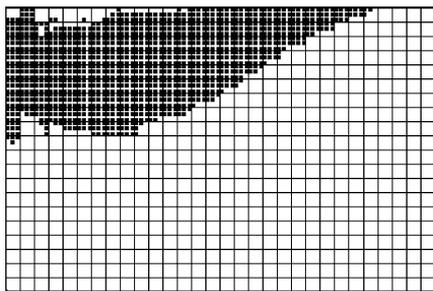


图 27 浅基础地基中土体达到应变局部化条件的高斯积分点

Fig. 27 Gauss integration points of soils that fulfill the strain localization condition in shallow foundation

为进一步考虑各向异性砂土的应变局部化影响，Azami 等^[55]采用复合理论对 1g 物理模型试验进行了应变局部化弹塑性有限元分析。从计算得到的荷载位移曲线可以发现，考虑了应变局部化的模拟结果与试验结果更加接近，即 $\alpha = 60^\circ$ 时极限承载力最小，且 $\alpha = 90^\circ$ 时与其比较接近。

d) 砂土地基中锚板抗拔承载力

采用 3 种不同的网格对图 21 所示的砂土地基中锚板问题进行应变局部化有限元分析，图 29 为锚板地基

中土体达到应变局部化条件的高斯积分点，图 30 为基于 3 种不同网格采用状态相关常规本构和复合理论计算得到的抗拔锚板荷载位移曲线。计算结果表明了从局部到整体的渐近破坏过程，采用复合理论得到的极限承载力低于常规本构的结果，且采用密网格和局部加密网格的结果比较接近，体现了复合理论在消除网格尺寸影响的能力。

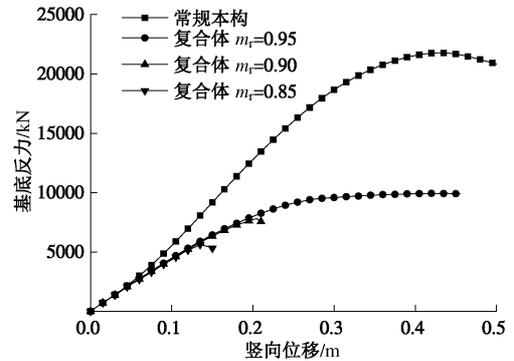
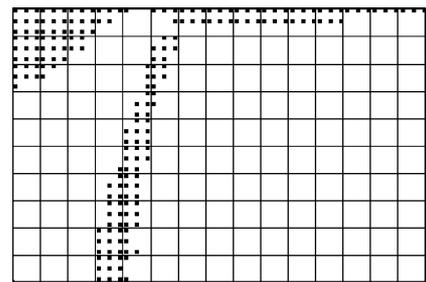
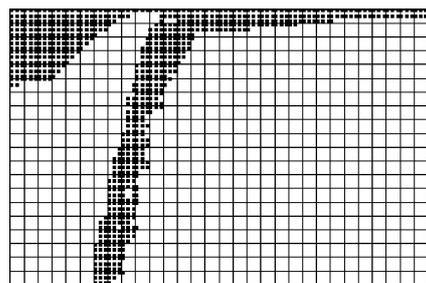


图 28 基底反力与基础竖向位移的关系曲线

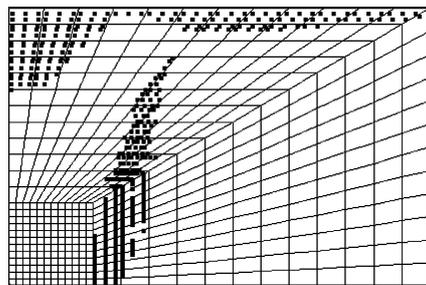
Fig. 28 Curves of average reaction force versus vertical displacement



(a) 疏网格



(b) 密网格



(c) 局部加密网格

图 29 锚板地基中土体达到应变局部化条件的高斯积分点

Fig. 29 Gauss integration points of soils that fulfill the strain localization condition in anchor foundation

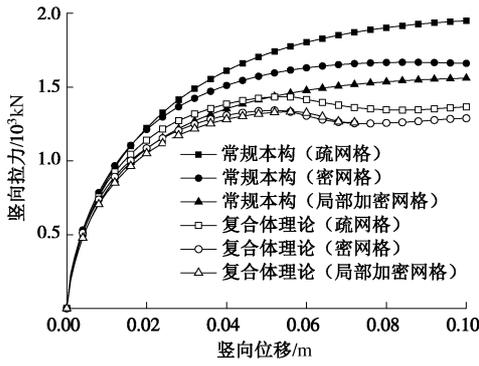


图 30 锚板荷载位移曲线

Fig. 30 Curve of average reaction force versus vertical displacement

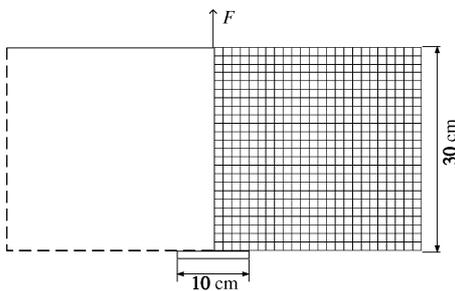


图 31 圆形抗拔锚板计算模型

Fig. 31 Schematic diagram of circular anchor

下面对 Sakai 等^[61]的浅埋圆形锚板抗拔试验 1g 物理模型试验进行模拟, 计算模型如图 31 所示。试验采用密实 Toyoura 砂土, 相对密实度 $D_r=99\%$, 重度 $\gamma=16.1 \text{ kN/m}^3$, 埋深 $H=30 \text{ cm}$, 锚板面积 $A=78.54 \text{ cm}^2$ 。图 32 为分别采用状态相关本构和复合体理论的有限元法计算出的承载力系数与位移的关系曲线。从图中可以看出, 采用复合体理论计算出的抗拔承载力与试验结果十分接近, 而状态相关本构得出的抗拔承载力则要明显偏大很多。说明了应变局部化现象对砂土地基抗拔承载力的影响十分明显, 未考虑应变局部化的有限元法会过高估计密实砂土地基中锚板的抗拔承载力。

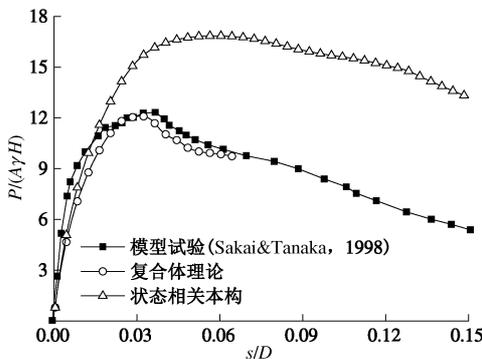


图 32 锚板荷载位移曲线

Fig. 32 Curves of average reaction force versus vertical displacement

(2) 基于非局部塑性模型的分析方法

Bazant 等^[62]最早将非局部理论用于损伤应变局部化模拟, 结果表明该理论能克服数值模拟的网格敏感性。然而这种非局部理论对于塑性软化问题却并不适用, Vermeer 等^[63]提出采用过非局部修正解决了这一问题。Stromberg 等^[64]将修正后的非局部理论用于双轴应变局部化问题的有限元模拟。Lu 等^[65-66]通过一维拉杆理论分析及对数值计算中的刚度矩阵谱分析, 分析了非局部理论克服网格敏感性的条件和有效性; Lu 等^[67]通过对双轴平面应变试样的应变局部化问题的有限元数值模拟, 进一步验证了非局部理论在静力应变局部化问题中的正则化效果。

非局部塑性理论认为控制软化的内变量 κ 为非局部量。定义任一点广义内变量 $\hat{\kappa}$ 为

$$\hat{\kappa}(\mathbf{x}) = \frac{\int_V \alpha_\infty(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \kappa(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_V \alpha_\infty(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) d\mathbf{x}}, \quad (17)$$

式中, \mathbf{x}_0 为该点坐标, \mathbf{x} 为该点邻域坐标, α_∞ 为加权平均函数, V 为计算域。

采用过非局部形式的非局部软化参数时, 将该点的局部变量与非局部量再做一次加权平均, 即

$$\hat{\kappa}^m(\mathbf{x}) = (1 - m)\kappa(\mathbf{x}) + m\hat{\kappa}(\mathbf{x}) \quad , \quad (18)$$

式中, m 为大于 1 的权系数。

采用非局部理论, 各向同性硬化准则下的屈服函数可写为

$$F = Y(\boldsymbol{\sigma}) - H\hat{\kappa}^m - Y_0 \quad , \quad (19)$$

式中, H 为硬化模量, Y_0 为屈服应力, $Y(\boldsymbol{\sigma})$ 是应力状态相关的函数。

现有非局部塑性模型的积分算法仅能用于 von Mises 准则, 无法用来进行一般软化土体的应变局部化分析。曲颯等^[68]提出了一种改进的针对非局部模型的全隐式应力回代迭代计算方法, 并将非局部理论推广到 Mohr-Coulomb 弹塑性模型中, 使其能用来分析土体稳定性问题。分析一个条形基础的地基承载力问题, 基础宽度为 8 m, 有限元模型尺寸为 20 m×50 m, 地基土假设为塑性软化材料, 通过引入非局部塑性模型, 两种不同密度 (80×200 或 40×100 个单元) 的有限元网格得到的基础荷载位移曲线十分接近 (见图 33), 显示出采用非局部塑性模型正则化效果明显。如何将非局部塑性模型应用于砂土状态相关本构中将是下一步研究的重点。

前面介绍的几种方法能够解决应变局部化有限元分析中的单元尺寸依赖性, 但土体应变局部化分析中还存在有限元网格锁定问题。自适应网格技术^[69-71]或引入非连续的形函数, 包括弱非连续形式 (即应变非连续) 和强非连续形式 (即位移非连续) 可以为解决

这些问题提供可能,黄茂松等^[72]讨论了有关方法之间的关联。限于篇幅,本文不作详细讨论。

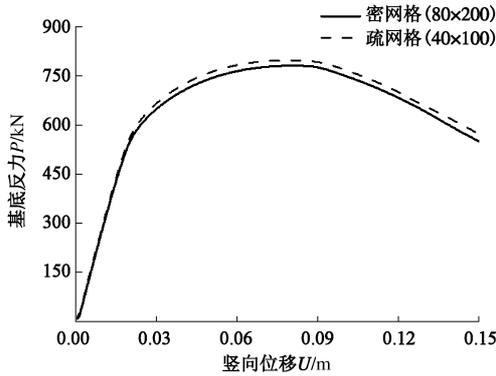


图 33 荷载 - 位移曲线 (非局部模型)

Fig. 33 Relationship between load and displacement (non-local plastic model)

1.6 基于状态相关本构的饱和砂土静态液化失稳有限元分析

传统理论认为,只有在当应力状态达到塑性极限时土体才会破坏,其峰值强度可通过 Mohr-Coulomb 准则描述,且其摩擦角为峰值内摩擦角。然而对于饱和松砂或粉细砂而言,静态液化导致土体达到峰值内摩擦角即已失稳。为从理论上预测静态液化发生, Lu 等^[73-74]以及吕玺琳等^[75]基于二阶功原理建立了土体失稳判别准则。在小变形条件下,根据二阶功原理,要保证材料的稳定,需满足:

$$d^2w = d\sigma' : d\epsilon > 0, \forall \|d\epsilon\| \neq 0 \quad (20)$$

式中, d^2w 为二阶功, $d\sigma'$ 为有效应力增量, $d\epsilon$ 为相应的应变增量。

上式表明,若存在一个加载路径,使得二阶功变为负,在该应力路径下土体将失稳,其失稳条件为

$$d^2w = d\sigma' : d\epsilon \leq 0, \exists \|d\epsilon\| \neq 0 \quad (21)$$

将本构关系式代入式 (21) 可得

$$d\epsilon : D^{ep} : d\epsilon \leq 0, \exists \|d\epsilon\| \neq 0 \quad (22)$$

要使式 (22) 成立,需满足:

$$\det(D_{sym}^{ep}) \leq 0 \quad (23)$$

土体在加载过程中,一旦式 (23) 成立,土体即进入潜在失稳状态,亦即式 (23) 给出了土体失稳的必要条件,但土体静态液化是否触发还取决于应力路径和加载方式。在应变增量控制混合模式加载条件下,需满足二阶功小于 0,即满足式 (21),静态液化才得以触发。

Lu 等^[73-74], 吕玺琳等^[75]对等向固结和 K_0 固结不排水三轴条件下的静态液化和应变局部化失稳模式进行了理论分析,图 34 给出了 Chu 等^[76] K_0 固结砂土三轴试验有效应力路径的预测结果,图 35 为计算得到的

二阶功。4 组试验中,除最密的一组外,加载过程中广义剪应力出现了峰值,二阶功均变负,亦即土体发生了静态液化失稳。

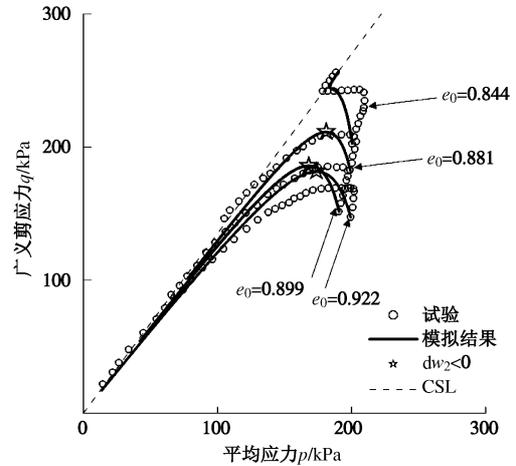


图 34 K_0 固结三轴试验应力路径

Fig. 34 Stress paths of K_0 -consolidated undrained triaxial tests

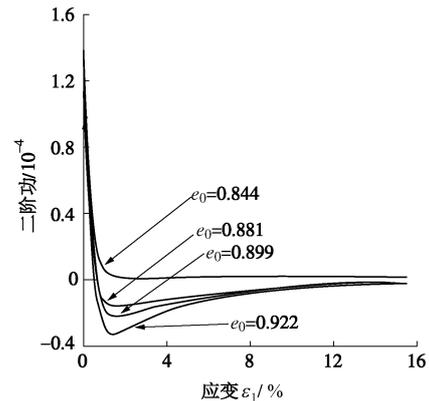


图 35 二阶功变化情况

Fig. 35 Evolution of second-order work

对于松散砂土边坡而言,需要采用能够反映砂土静态液化特性的稳定性分析,才能够对其安全性进行合理评估。黄茂松等^[77]推导了状态相关砂土本构的隐式积分计算方法,以二阶功为负作为液化判别准则,分析并对比了不排水条件下松砂平面应变试验试样在快速加载和慢速加载情况下的静态液化现象。对于快速准静态加载情况,由图 36, 37 可知,荷载在峰值处虽然土样发生失稳(二阶功变负),但是并无明显的剪切带,随着加载继续,剪切带产生。

海底人工堆积砂土边坡常常只有很缓的坡度,但失稳事故仍然会出现。黄茂松等^[77]考虑了在海面人工堆积过程中的粉质砂土边坡由于堆积荷载导致的静态液化现象,计算模型如图 38 所示。若土坡四周排水条件较差,且堆积过程较快,可假定此过程中土坡处于

不排水状态。失稳时土坡的二阶功为负分布即静态液化区域，如图 39 所示。

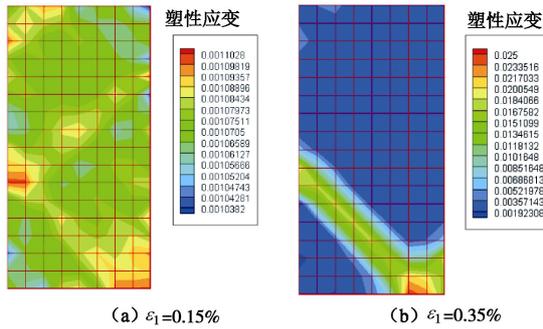


图 36 塑性剪应变分布云图

Fig. 36 Distribution of plastic shear strain

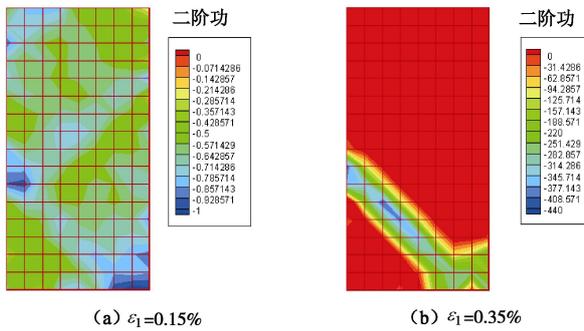


图 37 二阶功分布云图

Fig. 37 Distribution of second-order work

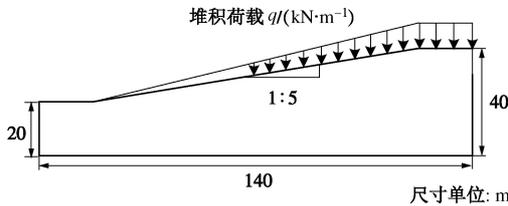


图 38 水下砂土边坡受堆积荷载示意图

Fig. 38 Schematic diagram of submarine sand slope subjected to a construction load



图 39 当堆积荷载 q 达到 46 kN/m 时二阶功为负区域

Fig. 39 Region of negative second-order work under construction load q of 46 kN/m

2 饱和软黏土强度特性与地基稳定性

2.1 K_0 固结饱和软黏土的不排水抗剪强度

合理确定饱和软黏土尤其是 K_0 固结饱和软黏土的不排水抗剪强度对岩土工程实践而言尤为重要。众所周知，固结不排水剪切试验可以确定总应力强度参

数 c_{cu} 和 φ_{cu} ，也可以确定有效应力强度参数 c' 和 φ' 。从土力学原理来说，固结不排水剪切试验得到的总应力强度参数 c_{cu} 和 φ_{cu} 不宜直接使用，应该根据原位的有效固结压力换算成不排水强度 c_u ，然后按 $\varphi_u = 0$ 的方法进行分析^[78-79]。

等向正常固结黏土的不排水抗剪强度也可由临界状态理论进行推导，根据修正剑桥模型的屈服函数，可以得到不排水抗剪强度的表达式^[80]。准确描述原位土体在 K_0 固结状态下的不排水抗剪强度更加重要，另外由于开挖等原因形成的超固结应力历史也对饱和黏土的不排水抗剪强度造成很大的影响。有不少学者开展了 K_0 固结天然结构性黏土的变形、强度和本构模型的研究，魏星等^[81]，Huang 等^[82]建立了天然结构性黏土的三维各向异性界面模型，如不考虑黏土的结构性，其屈服面方程如下：

$$f = (p - p_c) \left(p + \frac{R-2}{R} p_c \right) + (R-1)^2 \frac{q_\alpha^2}{\chi} = 0 \quad (24)$$

式中， $q_\alpha = \sqrt{3J_{2\alpha}}$ ， $J_{2\alpha} = \frac{1}{2} s_{ij}^\alpha s_{ij}^\alpha$ ， $s_{ij}^\alpha = s_{ij} - \sigma_{kk} \alpha_{ij} / 3$ ， $\chi = (M - \alpha)[2\alpha(R-1)^2 + M - \alpha + \sqrt{4\alpha(R-1)^2 M + (M - \alpha)^2}] / 2$ ， $\alpha = \sqrt{3\alpha_{ij} \alpha_{ij}} / 2$ 。其中， α_{ij} 为各向异性张量，表征土体各向异性的程度， α 为 $p - q$ 空间中屈服面的倾斜角，为 α_{ij} 的第二不变量， s_{ij}^α 为折减应力偏量， q_α 为折减等效剪应力， R 为形状参数， M 为临界状态应力比。 M 可由折减的应力 Lode 角 θ_α 定义如下^[82]：

$$M(\theta_\alpha) = M_c \left[\frac{2m^4}{(1+m^4) - (1-m^4)\sin 3\theta_\alpha} \right]^{1/4} \quad (25)$$

式中， m 为土性参数，表示 $p - q$ 平面内轴对称拉伸应力状态 ($b = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3) = 1$) 的临界状态线斜率 M_c 与轴对称压缩应力状态 ($b = 0$) 的临界状态线斜率 M_c 之比，即 $m = M_c / M_c$ 。

在各向同性压缩条件下， p_c 的硬化规律为

$$\dot{p}_c = \frac{p_c \varepsilon_v^p}{(\lambda^* - \kappa^*)} \quad (26)$$

式中， $\lambda^* = \lambda / (1 + e_0)$ ， $\kappa^* = \kappa / (1 + e_0)$ ， e_0 为初始孔隙比， ε_v^p 为塑性体应变， $d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_{ii}^p$ ， λ 和 κ 分别为 $e - \ln p$ 空间中正常固结线和回弹曲线的斜率。 α_{ij} 的旋转硬化规律详见文献^[81, 82]，其第二不变量 α 的初始值可由试验得到的初始屈服面的对称轴确定。

尽管有不少学者开展了 K_0 固结三轴不排水剪切试验研究，但从理论上建立 K_0 固结黏土不排水抗剪强度计算公式的研究并不多见，黄茂松等^[83]利用各向异性本构模型推导了 K_0 正常固结土的不排水抗剪强度公式，假设了初始屈服面关于正常固结 K_0 线对称，但上海软黏土的试验结果并非如此，可以取 $\alpha = A_0 \eta_{K_0nc}$ ，

$\eta_{K_{0nc}} = 3(1 - K_{0nc}) / (1 + 2K_{0nc})$, A_0 为土性参数。

对于 K_0 超固结黏土, 上述研究的另外一个问题是将以有效上覆压力表示的回弹线斜率 $\tilde{\kappa}$ 作为一个常数来处理, 事实上由于静止土压力系数 K_0 随超固结比 OCR 的显著变化, $\tilde{\kappa}$ 显然是与 OCR 密切相关。为此, 纠永志^[84]根据上海软黏土的试验结果给出了一个修正表达式:

$$\frac{(c_u / \sigma'_{v0})_{OC}}{(c_u / \sigma'_{vm})_{NC}} = OCR^{1 - \frac{\tilde{\kappa}}{\lambda}} = OCR^{1 - \tilde{\beta} \frac{\kappa}{\lambda}} \quad (27)$$

对于正常 K_0 固结土 ($OCR = 1$),

$$\left(\frac{c_u}{\sigma'_{vm}} \right)_{NC} = \frac{1 + 2K_{0nc}}{3} \frac{M}{2} \left[\frac{M^2 + \eta_{K_{0nc}}^2 - 2\alpha\eta_{K_{0nc}}}{2M(M \pm \alpha)} \right]^{\frac{\lambda - \kappa}{\lambda}}, \quad (28)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\ln \left(\frac{1 + 2K_{0nc}}{1 + 2K_{0oc}} \right) + \ln(OCR)}{\ln(OCR)}, \quad (29)$$

式中, $\tilde{\kappa}$ 为有效上覆压力表示的回弹线斜率, 不是常数, 应该与 OCR 有关。

对于 K_0 正常固结黏土, 如近似取 $A_0 = 1.0$, $\alpha = \eta_{K_{0nc}}$, 这样不排水抗剪强度的表达式可简化为

$$\left. \begin{aligned} c_u &= \zeta \cdot y, \\ \zeta &= \frac{1 + 2K_0}{3} \gamma' \cdot \frac{M}{2} \left(\frac{M \pm \alpha}{2M} \right)^{\frac{\lambda - \kappa}{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

式中, γ' 为有效重度, y 为土层深度。上述公式体现了原位不排水抗剪强度的非均质性。

Huang 等^[82]、柳艳华^[85]通过上海天然软黏土的空心圆柱不排水剪切试验得到了不排水抗剪强度随主应力轴旋转角度的变化规律。尽管可以采用复杂的旋转硬化弹塑性界面模型进行模拟^[85], 但从饱和黏土地基稳定性角度来说需要一个简单实用的公式。黄茂松等^[83, 86]根据 Casagrande 等^[87]提出的黏性土各向异性强度计算公式, 并定义各向异性系数 $k = c_{uh} / c_{uv}$, 可得到 K_0 固结黏土的各向异性强度表达式:

$$\left. \begin{aligned} c_u(\beta) &= \left[k + (1 - k) \cos^2 \beta \right] \frac{1 + 2K_0}{6} M \left(\frac{M + \alpha}{2M} \right)^{\frac{\lambda - \kappa}{\lambda}} \gamma' y, \\ k &= \left(\frac{M - \alpha}{M + \alpha} \right)^{\frac{\lambda - \kappa}{\lambda}}, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

式中, β 为大主应力方向与竖直方向的夹角。

上述公式与 Ladd^[88]的 Boston Blue 黏土的直剪试验结果、柳艳华等^[89]的上海软黏土空心圆柱扭剪试验结果以及 Hong 等^[90]的空心圆柱扭剪试验结果的对比如图 40 所示, 可以发现计算结果与试验数据有着较好的一致性, 说明了上述黏土各向异性强度公式的适用性。

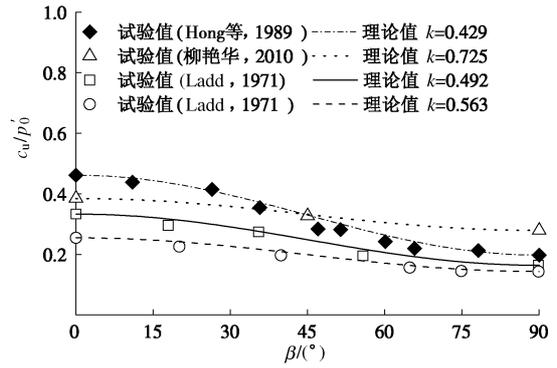


图 40 各向异性强度公式与试验结果的对比

Fig. 40 Comparison between calculated results by anisotropy strength formula and experimental data

2.2 饱和软黏土强度的循环弱化特性

黄茂松等^[91]、柳艳华等^[89]在映射准则的定义中采用映射中心可移动的方法, 建立了一个可以描述循环荷载下结构性饱和软黏土力学特性的各向异性弹塑性模型。对于循环荷载作用下的软黏土地基问题, 虽然采用边界模型或套叠屈服面模型可较为真实地反映土体应力应变特性, 但由于采用传统的小步长积分方法来模拟一个循环加载过程, 对于长期循环加载计算难以实现。

长期往复荷载作用下, 饱和软黏土强度和刚度的衰减是近海桩基础设计必须考虑的。黄茂松等^[92]利用带弯曲元的循环三轴仪开展了相关的试验研究, 图 41 给出了未受循环荷载作用前与受循环荷载作用后的不排水静力三轴试验的有效应力路径, 从图中可以看出临界状态线的唯一性。

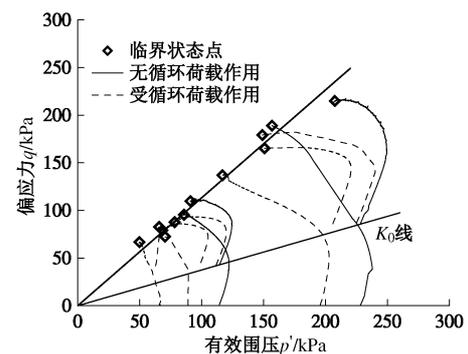


图 41 不排水三轴试验有效应力路径

Fig. 41 Effective stress paths of undrained monotonic triaxial tests

为了合理描述饱和软黏土的长期循环加载特性, 引入动偏应力水平 D_d , 定义为 $D_d = q_d / q_{ult}$, 其中 q_d 为动应力峰值, $q_{ult} = 2c_u$, c_u 为不排水抗剪强度。循环加载后不排水抗剪强度的衰减可以用动偏应力水平 D_d 来描述, 图 42 为抗剪强度衰减量 Δ (循环 5000 次) 与动偏应力水平的关系曲线, D_d 可以反映饱和和黏

土循环荷载作用后不排水抗剪强度弱化的特性。

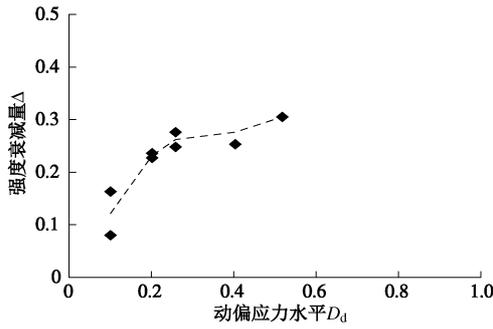


图 42 抗剪强度衰减量与动偏应力水平关系

Fig. 42 Relationship between undrained shear strength degradation and dynamic deviatoric stress level

为了便于在实际工程应用中考虑循环荷载作用下饱和软黏土强度的弱化特性以及在有限元数值分析中的实现,可以采用轴向累积塑性应变 ϵ^p 来描述循环荷载作用下饱和黏土不排水抗剪切强度和剪切模量的衰减,如图 43 所示。强度衰减比的具体表达式为

$$\delta = c_u / c_{u\max} = \delta_{\text{res}} + (1 - \delta_{\text{res}}) e^{-b\epsilon^p}, \quad (32)$$

式中, $c_{u\max}$ 为黏土初始不排水抗剪强度, c_u 为循环加载后衰减的不排水抗剪强度, b 为衰减系数, δ_{res} 为残余衰减比。

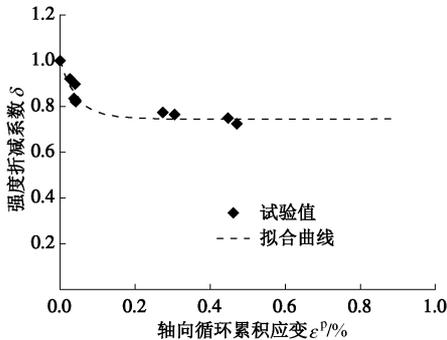


图 43 强度衰减比和轴向循环累积应变的关系

Fig. 43 Relationship between strength reduction ratio and cyclic cumulative axial strain

饱和软黏土的循环弱化也可以直接利用循环累积变形进行分析,有限元分析方法详见 2.3 节。因此,建立循环荷载下饱和软黏土累积变形的显式模型也是必要的,已有不少学者提出了考虑各种影响因素的经验模型,但模型参数的物理意义往往不够明确,且缺乏足够的试验验证。引入动偏应力水平 D_d ,饱和软黏土循环加载下轴向累积塑性应变 ϵ^p 可表示为

$$\epsilon^p = a D_d^m (p_c / p_a)^c N^b, \quad (33)$$

式中, p_c 为有效围压, N 为循环次数, a , b , c 和 m 为模型参数。此模型已在各种应力路径下的循环加载试验中得到验证^[93-95]。

2.3 饱和软黏土弹塑性静动力有限元分析方法

饱和软黏土弹塑性静动力有限元分析方法包括不排水弹塑性有限元方法和排水弹塑性有限元方法。

(1) 不排水弹塑性有限元分析方法

饱和软黏土弹塑性有限元分析可以采用以下 4 种本构模型: ①基于总应力的经典弹塑性模型,比如 Tresca 和 von Mises 模型,再加上不排水循环累积变形的经验公式或不排水强度循环弱化的经验公式; ②基于总应力的动力弹塑性模型,比如基于运动硬化准则的套叠屈服面模型 (Prevost^[96]; 王建华等^[97]), 这类模型的屈服面方程仍然是基于 Tresca 或 von Mises 准则,只是采用运动硬化的概念来模拟不排水循环累积变形; ③基于有效应力的经典弹塑性模型,比如 Mohr-Coulomb 模型、Drucker-Prager 模型或修正剑桥模型再加上不排水循环累积变形和排水循环累积体变的经验公式,排水循环累积体变也可以利用不排水循环累积孔压来计算 (Zienkiewicz 等^[98]); ④基于有效应力的修正剑桥模型的扩展形式,比如边界面模型和套叠屈服面模型等。

对于不排水动力弹塑性有限元分析,如采用第①种总应力的本构模型: $d\sigma = D_T(d\epsilon - d\epsilon^u)$, 其中不排水循环累积形变 $d\epsilon^u = \{d\epsilon_1^u, -d\epsilon_1^u/2, -d\epsilon_1^u/2\}^T$, 这样就可以完全按照一般的单相介质来处理。如果采用基于第③种有效应力的本构模型: $d\sigma' = D_T(d\epsilon - d\epsilon^u - md\epsilon_v^d/3)$, 其中 $d\epsilon_v^d$ 为排水循环累积体变; 或 $d\sigma' = D_T(d\epsilon - d\epsilon^u) - mdp_g$, 其中 $dp_g = K_T d\epsilon_v^d$ 为不排水循环累积孔压, K_T 为土骨架体变模量, 这样就必须引入不排水的体积约束条件: $dp = (K_w/n)d\epsilon_v$, $d\sigma = d\sigma' + mdp$, 其中 n 为孔隙率, K_w 为孔隙水体变模量。

(2) 排水弹塑性有限元分析方法

对于排水弹塑性动力有限元分析,需要进一步考虑循环加载产生的累积孔隙水压力消散的固结变形。简单的处理方法是采用拟静力 Biot 固结方程,将动力反应与孔压消散分开进行分析,这样可以采用基于总应力的本构模型进行动力反应分析。而合理的方法是采用动力 Biot 固结理论,因为事实上孔隙水压力的变化过程和动力反应是分不开的,所用的本构模型必须是基于有效应力的,从理论上来说采用修正剑桥模型的扩展形式,比如边界面模型或套叠屈服面模型,能比较完整地模拟循环荷载作用下黏土的变形特性,无疑更加合理。

动力固结分析通常采用以固相位移 u 和孔隙水压力 p 作为基本变量的 $u-p$ 形式,但使用等价近似插值函数的常规有限元方法,在求解渗透系数较小且孔隙水压缩性可以忽略不计的饱和土动力学 $u-p$ 形式

时存在数值上的困难。Zienkiewicz 等^[99]首先基于矢量分解方法提出了一种适合于 $u-p$ 形式的半隐式交叉时域解法（显式-隐式交叉），但此方法对不可压缩问题的有效性非常依赖于所使用的时间步长，这对于弹塑性问题或不均匀网格情况会导致孔隙水压力计算值的严重数值震荡，为此 Huang 等^[100]进一步提出基于矢量分解的隐式-隐式交叉解法，不仅仅是由于它的无条件稳定性，与 Huang 等^[101]提出的隐式-隐式交叉解法的稳定性一致，而且还因为可以引入单元分解因子 δ ，但事实上隐式-隐式交叉解法的稳定性要求将限制单元分解因子 δ 的选择。Zienkiewicz 等^[102]、Huang 等^[103]以及黄茂松等^[104]提出了一种对孔隙水流动守恒方程直接修正的稳定方法（直接 α 方法）。

以上讨论的是动力分析方法，而对于静力问题或拟静力问题，可以采用 von Mises 或 Tresca 模型将饱和黏土视为单相介质进行不排水分析；也可以采用 Mohr-Coulomb 模型、Drucker-Prager 模型或修正剑桥模型等将饱和黏土视为两相介质，并结合 Biot 固结理论进行排水和不排水分析。下面通过两个算例说明不同本构模型的应用。

（3）饱和软黏土地基承载力特性与循环弱化分析

本算例主要是为了说明基于 Tresca 或 von Mises 模型与基于修正剑桥模型的不排水分析的区别，当采用 Tresca 或 von Mises 模型时将利用修正剑桥模型参数通过式（30）确定与上覆有效应力有关的不排水抗剪强度的非均质特性。假设修正剑桥模型的参数为： $\lambda = 0.212$ ， $\kappa = 0.046$ ， $M = 1.277$ ， $e_r = 1.885$ ；其它材料参数为：有效重度 $\gamma' = 6.8 \text{ kN/m}^3$ ， $K_0 = 0.6$ ，泊松比 $\nu = 0.35$ 。对于 Tresca 理想弹塑性和 von Mises 运动硬化模型，根据初始 K_0 固结应力状态和修正剑桥模型计算初始孔隙比，然后计算体变模量 $K = (1 + e_0)p' / \kappa$ ，再根据泊松比计算出剪切模量，并利用不排水单相介质的泊松比（ $\nu = 0.5$ ）计算不排水单相介质的杨氏模量。而不排水抗剪强度的非均质可表示为深度 y 的关系，即 $c_u = c_{u0} + \zeta y$ （图 44），其中 c_{u0} 为地表处的不排水抗剪强度（对正常固结黏土 $c_{u0} = 0$ ），取修正系数 $A_0 = 0.844$ ，由式（30）可计算得 $\alpha = 0.46$ ， $\zeta = 2.35 \text{ kPa/m}$ 。另外 von Mises 运动硬化模型的初始屈服面取 $0.2q_{\max} = 0.2\sqrt{3}c_u$ ，在不排水单相介质有限元计算中取泊松比 $\nu = 0.499$ 。

分析模型中取条形基础宽度 $B = 2 \text{ m}$ ，模型宽度和深度分别为 $10B$ 和 $5B$ 。在饱和多孔介质计算中，取很小的渗透系数，所有边界均设为不排水。图 45 为采用上述 3 种模型计算得到的荷载位移曲线，可以发现获得的地基极限承载力是基本一致的，说明了在不排水

单相介质计算中考虑不排水抗剪强度非均质性的必要性。

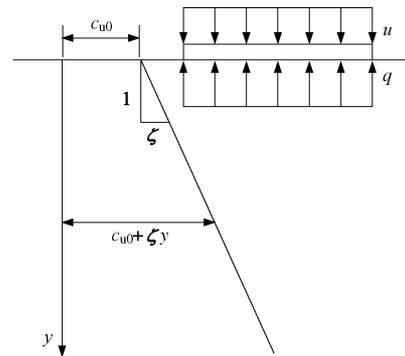


图 44 地基承载力与强度非均质描述

Fig. 44 Problem definition of bearing capacity of strip foundations and variation pattern of undrained shear strength

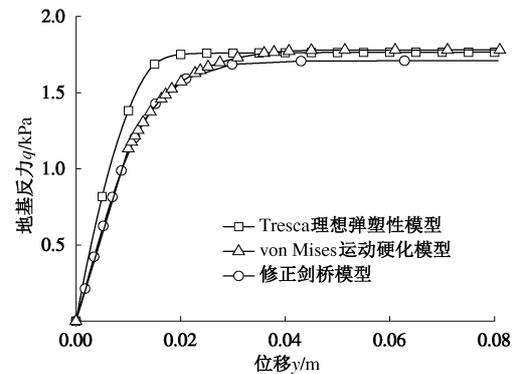


图 45 各种模型计算得到的地基承载力

Fig. 45 Comparison among bearing capacities obtained by different models under undrained condition

下面讨论不同排水条件时循环荷载作用下饱和软黏土地基承载力的衰减。事实上饱和软黏土地基在长期循环加载过程中是不可能完全不排水的，因此可以采用基于有效应力的边界面弹塑性本构模型和 Biot 动力固结理论进行饱和软黏土循环加载分析，从而获得累积变形和孔压的分布情况，然后再进行不排水静力弹塑性分析得到循环弱化后的极限承载力，这样的分析方法在理论上无疑是最合理的。地基土有关材料参数同上，其他边界模型参数不再一一列出。循环荷载 q_c 分别为 $0.2q_u$ ， $0.3q_u$ 和 $0.4q_u$ （ q_u 为不排水地基极限承载力），荷载频率为 1 Hz ，循环次数为 100 次，有限元分析模型尺寸为 $10 \text{ m} \times 20 \text{ m}$ 。图 46 给出完全不排水和顶部排水（渗透系数为 $1 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ ）条件下地基承载力的循环弱化规律，可见排水条件的明显影响。

上述分析方法可以扩展应用于考虑排水固结影响的大直径单桩承载力的长期循环弱化特性分析，这方

面的研究正在进行中。

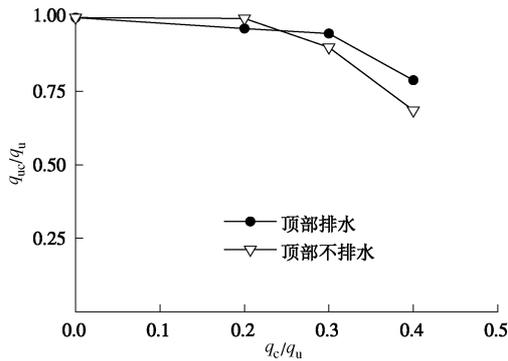


图 46 不同排水条件下地基承载力循环弱化

Fig. 46 Degradation of bearing capacity under cyclic loading for different drainage conditions

(4) 不排水软黏土中大直径单桩循环加载分析

由于波浪力、风力和风机机组运行的荷载作用，海上风电的桩基会承受长期循环往复荷载作用，从而会引起桩基承载力的衰减和累积变形。针对黏土不排水条件，土体模型采用基于修正 Tresca 屈服准则的理想弹塑性模型，通过累积塑性应变考虑循环荷载作用下桩周土体不排水抗剪强度的弱化，刘莹等^[105]利用有限元法对循环荷载作用下海上风电单桩基础竖向承载力的循环弱化进行了分析。

俞剑^[106]进一步对饱和 Kaolin 黏土中的大直径单桩水平循环加载离心模型试验进行了数值模拟，模型桩原型尺寸桩长 14 m，入土部分为 12 m，直径 2 m，图 47 为 T-bar 贯入试验得到的不排水抗剪强度剖面，据此可以确定强度循环弱化参数。图 48 为计算得到的桩顶滞回曲线，图 49 为循环位移幅值 0.1D 时桩顶反力衰减试验结果与有限元方法分析结果的对比，二者之间承载力弱化规律基本一致，表明了有限元方法的合理性。

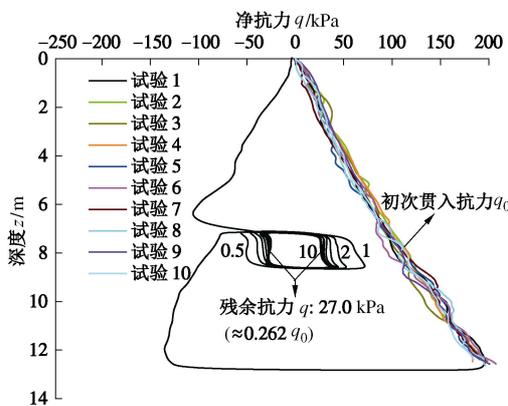


图 47 T-bar 贯入试验结果

Fig. 47 Results of T-bar penetration tests in saturated Kaolin clay

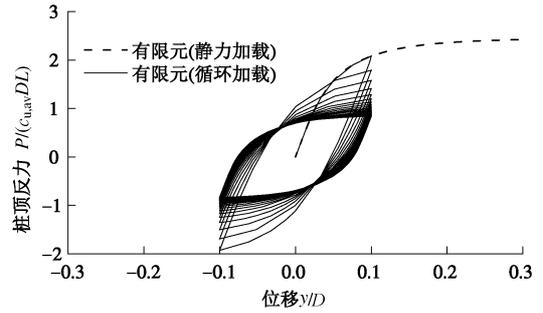


图 48 桩顶滞回曲线

Fig. 48 Hysteresis load-displacement curves at pile tip

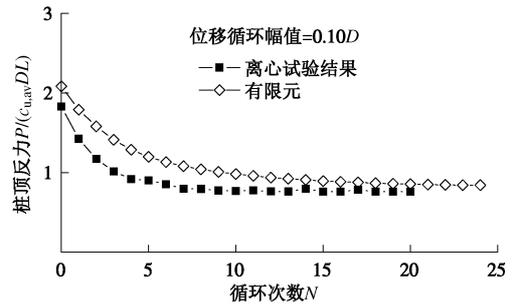


图 49 桩顶反力循环衰减曲线

Fig. 49 Degradation of reaction force at pile tip with respect to cycle number

为克服理想弹塑性 Tresca 模型存在的不足，在各向同性的硬化准则中引入了以等效塑性变形为变量的弱化规律，采用非线性运动硬化准则描述土体的循环滞回特性，同时考虑土体刚度的弱化。此运动硬化总应力模型为 ABAQUS 内置材料模型，而材料刚度的弱化可以利用用户子程序 USDFLD 中场变量实现。为了验证该本构模型用于循环荷载下单桩承载力特性分析的有效性，黄茂松等^[107]、Huang 等^[108]提出了基于非线性运动硬化准则的饱和软黏土循环弱化模型，并对 Poulos^[109]双向循环荷载作用下饱和黏土单桩的 1g 物理模型试验进行了模拟，验证了分析方法的合理性。

这里还进一步对 Zhang 等^[110]的饱和 Kaolin 黏土中刚性短桩水平循环加载离心模型试验进行三维弹塑性有限元模拟。不排水强度弱化参数同样可以由 T-bar 循环贯入试验确定。图 50 为有限元法得到的不同循环位移幅值下桩顶水平反力衰减与循环次数的关系，通过与相应离心试验结果对比可以发现二者的规律基本一致。图 51 为不同循环荷载幅值 P_c 下有限元计算得到的循环后桩顶水平极限反力 P_u 的衰减与循环次数的关系。

2.4 非均质与各向异性饱和软黏土地基稳定性分析

这里着重讨论极限分析上限解与弹塑性有限元法之间的比较，以及极限分析上限法与有限单元法的结合。剪流区是内部发生能量耗散，而摩擦块（平动或

转动)只在边界发生能量耗散。通过改变剪切流动区的边界形状,可以有效地控制“流出”速度的大小和方向,在上限法变形机构的构造中,剪流区能很好地实现顺滑地转换速度方向,并可根据需要改变剪流区外边界的形状来控制需要转换后速度的大小等。对于内部速度大小完全一致的圆弧形剪切区,剪流推导方法得到的总能量耗损与平动多块体推导方法是一致的。对于简单的情况,间断摩擦耗能是有表达式的,但是更为复杂的情况间断摩擦无法取极限得到表达式。为了提高摩擦型机构上限解的精度,可以采用数值上限分析方法,比如多块体上限法和极限分析有限元法。从简单的解析形式来说,剪流与摩擦的结合往往会获得比较满意的上限解。

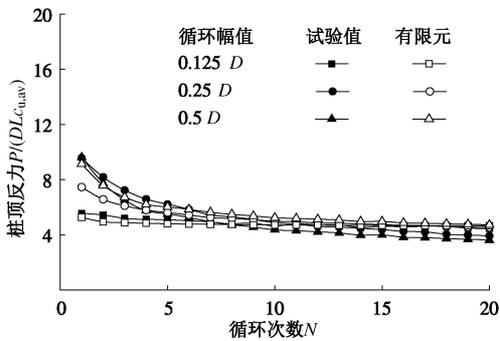


图 50 桩顶反力循环衰减曲线

Fig. 50 Degradation of reaction force at pile tip with respect to cycle number

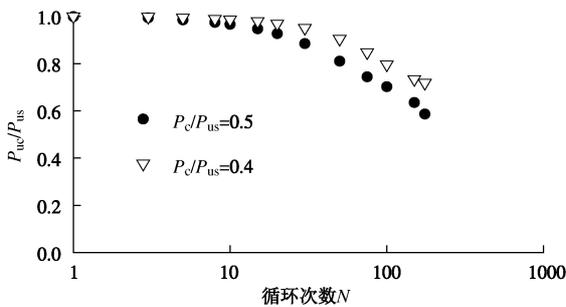


图 51 桩顶极限反力与循环次数的关系

Fig. 51 Relationship between ultimate reaction force at pile tip and cycle number

(1) K_0 固结饱和黏土地基承载力

黄茂松等^[111]、Huang 等^[112]采用平动多块体上限方法分析非均质和各向异性以及双层黏土地基承载力的上限解。这些平动多块体上限解可以作为验证其他简化方法的参考解,但由于多块体方法相对比较复杂,因此并不适用于工程实践。在解析的极限上限分析中,纯摩擦机构的解往往并不令人满意,而摩擦和剪流相结合的破坏机构通常可以获得相当满意的结果。常用

的 Prandtl 和 Hill 机构就是典型的例子,但这两种机构并不适用于非均质与各向异性黏土地基情况。本文在 Kusakabe 等^[113]所提出解析机构的基础上,推广到非均质和各向异性黏土条形基础地基极限承载力分析,图 52 为上限分析所采用的破坏机构,图中的 α , β , γ 三个角度可通过优化得到。

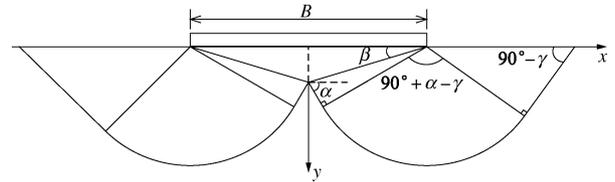


图 52 条形基础的可变破坏机构

Fig. 52 Transformable failure mechanism for strip foundations

首先以强度非均质为例,对本文提出的解析破坏机构进行验证。图 53 为无量纲地基承载力系数的对比,可见传统的 Prandtl 机构无法合理考虑强度非均质引起的承载力非线性变化,过高估计了地基承载力。而本文解析机构所获得的上限值和多块体上限解以及弹塑性有限元分析结果有较好的一致性。图 54 给出在不同非均质参数 ζ 下优化后解析机构和多块体机构的对比,二者的形态和演化趋势都基本一致,都随着非均质系数的增长逐渐收缩,并伴随着基础脚点下的应变(速度)集中加剧,进一步揭示了非均质影响地基极限承载力的作用机理,以及 Prandtl 机构计算误差较大的原因。

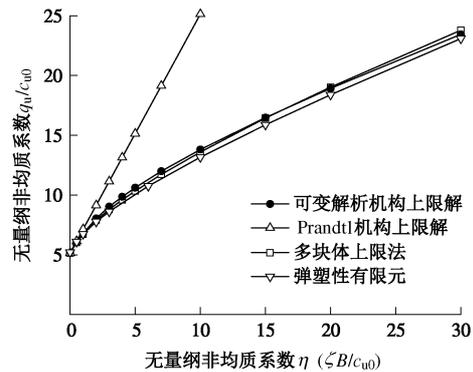


图 53 非均质条件下地基承载力对比

Fig. 53 Comparison among bearing capacities corresponding to various non-homogeneity coefficients

同时考虑非均质和各向异性对 K_0 固结黏土地基承载力的影响是十分必要的,杜佐龙^[114]对非均质和各向异性黏土地基承载力进行了较为全面的弹塑性有限元分析,图 55 给出了本文解析机构上限法、多块体上限法以及弹塑性有限元对非均质和各向异性黏土地基承载力的分析结果,三者基本吻合。

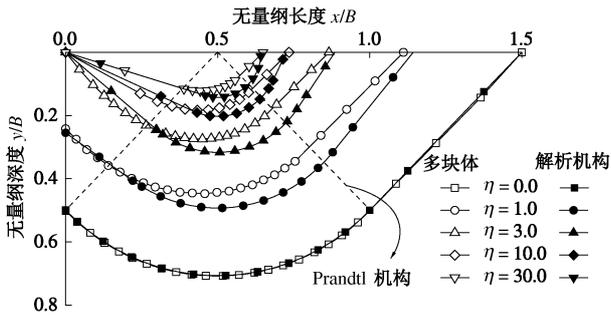


图 54 解析和多块体上限破坏机构对比

Fig. 54 Comparison of failure mechanisms between analytical and multi-block upper bound methods

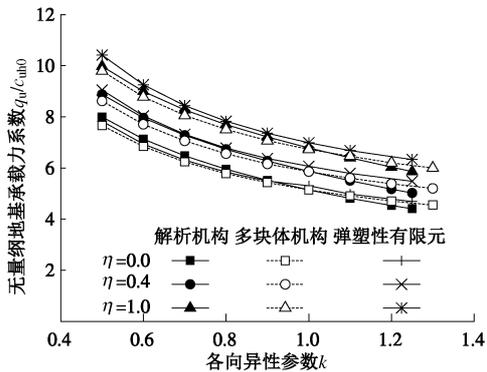


图 55 非均质和各向异性条件下地基承载力

Fig. 55 Bearing capacities under combination of strength non-homogeneity and anisotropy

(2) K_0 固结饱和黏土基坑抗隆起稳定性

秦会来等^[115]建立了黏土基坑抗隆起稳定性分析的平动多块体上限解,并应用于土体强度非均质影响分析;黄茂松等^[116]则进一步利用块体集的方法改进了平动多块体上限解。黄茂松等^[83, 86]提出了 K_0 固结黏土基坑的 Terzaghi 和 Prandtl 机构上限分析方法,但是与多块体方法相比仍然过高地估计了黏土基坑的抗隆起稳定安全系数,因而难以真正应用于工程实践中。黄茂松等^[117]利用强度折减弹塑性有限元 (SSRFEM) 和多块体上限法的分析结果,提出了一种改进的 Prandtl 机构,此机构解决了传统 Prandtl 机构在支护结构入土深度较大时过高估计基坑抗隆起稳定性的问题,但是在土体非均质与各向异性条件下仍然与多块体上限法和弹塑性有限元法有着较大的差距。为此本文进一步提出了一种修正的摩擦与剪流相结合的破坏机构,如图 56 所示,图中的 B_1 , B_2 和 α , β 两个角度可以通过优化得到。

为了验证本文提出的解析机构的适用性,采用以下算例: $H=9\text{ m}$, $c_u=35\text{ kPa}$, $\gamma=20\text{ kN/m}^3$, 支护结构入土深度 $D=0\text{ m}$ 。解析机构上限解与多块体上限法、SSRFEM、Terzaghi 机构以及 Prandtl 机构的计算结果对比如图 57 所示,图中抗隆起稳定系数 $N_c=F_s \gamma H/c_u$, 其中 F_s 为基坑抗隆起安全系数,优化后的解析机构和

多块体机构的对比如图 58 所示。由图 57, 58 可以得知,本文提出的解析机构得到的结果明显优于传统的 Terzaghi 机构和 Prandtl 机构,并且与多块体上限法和弹塑性有限元的结果相当接近,优化后的修正机构也与多块体机构非常接近。

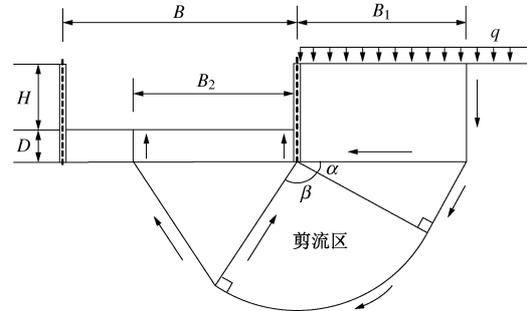


图 56 基坑抗隆起稳定的修正变形机构

Fig. 56 Modified mechanism of basal stability of excavations

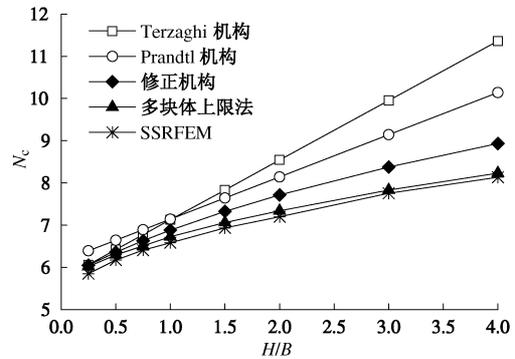


图 57 H/B 对稳定系数的影响

Fig. 57 Effect of H/B on stability factor

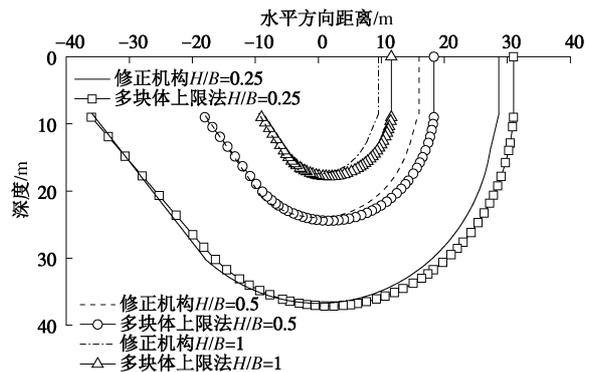


图 58 H/B 对破坏机构的影响

Fig. 58 Effect of H/B on failure mechanisms

为了进一步分析土体非均质性和各向异性对基坑抗隆起稳定性的影响,采用以下算例: $H=6\text{ m}$, $B=12\text{ m}$, $\gamma=18\text{ kN/m}^3$, 不排水抗剪强度 $c_{uh}=c_{uh0}+\zeta z$, $c_{uh0}=8\text{ kPa}$ 。考虑土体非均质性时安全系数随非均质系数 ζ 的变化如图 59 所示, Terzaghi 机构和 Prandtl 机构明显高估了基坑的抗隆起稳定性,而修正机构得到的结果与多块体上限法和弹塑性有限元的结果均比较接

近。杜佐龙^[114]采用强度折减弹塑性有限元分析了非均质和各向异性对基坑抗隆起稳定性的影响。在非均质和各向异性条件下修正机构得到的结果与多块体上限法和弹塑性有限元的结果对比如图 60 所示,计算结果明与多块体方法的结果比较接近,但在各向异性系数小于 1.0 时与弹塑性有限元有一定的差别。

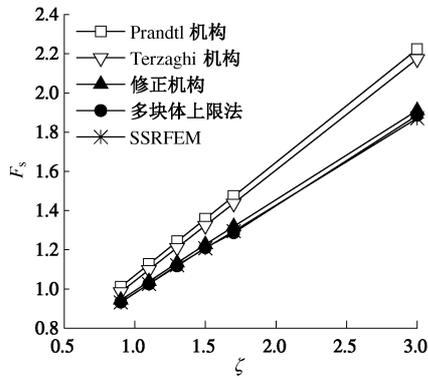


图 59 非均质系数对安全系数的影响

Fig. 59 Effect of non-homogeneity coefficients on safety factor

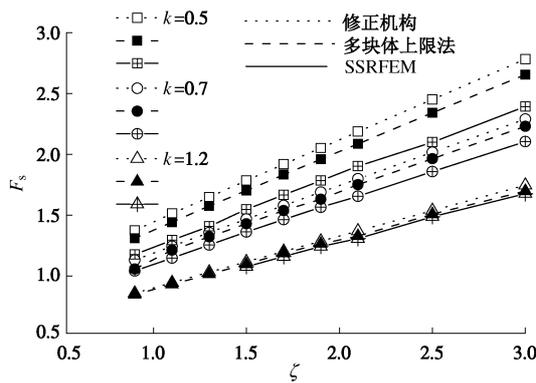


图 60 各向异性系数对安全系数的影响

Fig. 60 Effect of anisotropy coefficients on safety factor

(3) 非均质饱和黏土中二维纵向隧道开挖面稳定
黄茂松等^[118]、Huang 等^[119]建立了非均质黏土地基中二维环向和纵向隧道开挖面稳定分析的多块体上限解。在隧道开挖面二维纵向稳定分析中,目前常用的解析上限解为由 Davis 等^[120]提出的由 3 个块体构成的纯摩擦的破坏机构。为了得到更合理的解析上限解,Huang 等^[119]进一步提出了一种改进的摩擦和剪流相结合的破坏机构(图 61),改进机构由对数螺旋线的剪流区和两个平动块体构成。为提供对比,周维祥^[121]采用逐渐减少支护压力的弹塑性有限元分析方法,分析了非均质饱和黏土地基中隧道开挖面二维环向、二维纵向以及三维稳定性。

为验证所提出的改进简化机构,取埋深比 $C/D=1 \sim 5$, 重度参数 $\gamma D/c_{u0}=0$, 非均质参数 $\zeta D/c_{u0}=0 \sim 1$, 取 $D=6 \text{ m}$, $c_{u0}=6 \text{ kPa}$ 。改进简化机构得到的极限支护压力与多块体上限法、上限有限元法

(Augarde 等^[122])、弹塑性有限元法、Davis 的 3 块体上限解的对比如图 62 所示,可以看出,改进简化机构的结果非常接近多块体上限法的结果,并且明显优于 Davis 的 3 块体上限解。

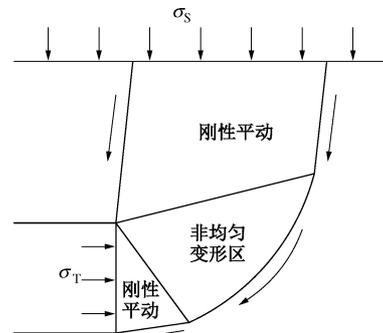


图 61 二维纵向稳定性简化机构

Fig. 61 Simplified mechanism for plain strain heading

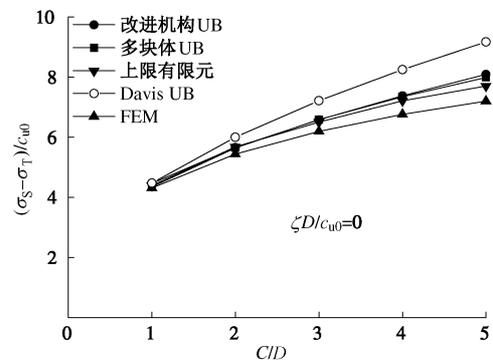


图 62 改进机构上限解与现有解的对比

Fig. 62 Comparison among solutions by modified upper-bound method and existing methods

土体的非均质性对极限支护压力的影响如图 63 所示,改进简化机构的计算结果与多块体上限法、上限有限元法、弹塑性有限元法均比较接近。

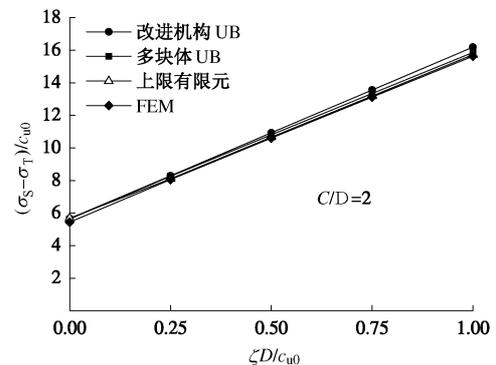


图 63 非均质性对稳定系数的影响

Fig. 63 Effect of non-homogeneity on stability factor

(4) 饱和黏土中三维隧道开挖面稳定
宋春霞等^[123]建立了均质黏土地层中三维隧道开挖面稳定性的多块体上限分析方法,此方法采用截椭圆柱体构造多块体平动破坏模式,克服了现有三维多

块体平动破坏模式与隧道开挖面不完全接触的缺陷，但是三维多块体平动破坏机构需要复杂的构造与优化过程。宋春霞等^[123]提出了剪流与摩擦相结合的剪流-转动简化破坏机构（图 64），剪流-转动简化破坏机构由接近于地表的剪流块体和开挖面附近的转动块体构成。

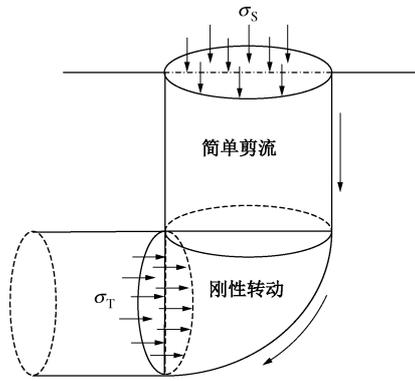


图 64 三维隧道剪流-转动机构

Fig. 64 Shear flow-rotational mechanism for a 3-D tunnel

剪流-转动简化机构的计算结果与平动多块体上限法、弹塑性有限元^[121]以及 Davis 的 3 块体上限法的对比如图 65 所示，可以看出，剪流-转动简化机构不仅大大改善了多块体平动机构的结果，也明显优于 Davis 的 3 块体上限解，并且也接近弹塑性有限元的结果，但与离心试验的结果^[124]仍有差距。上述方法可以用于非均质黏土地基分析中。

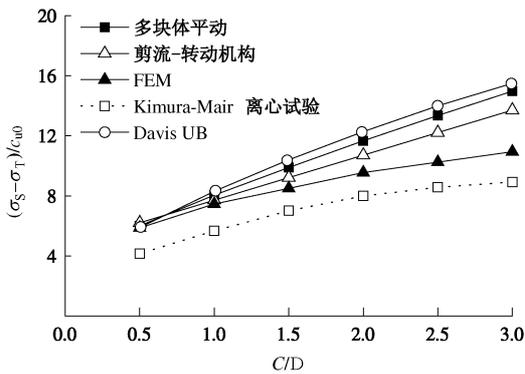
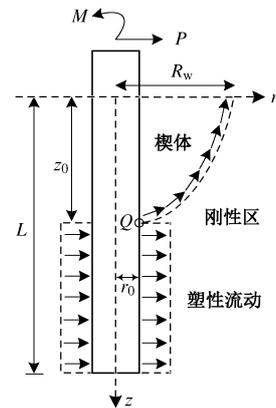
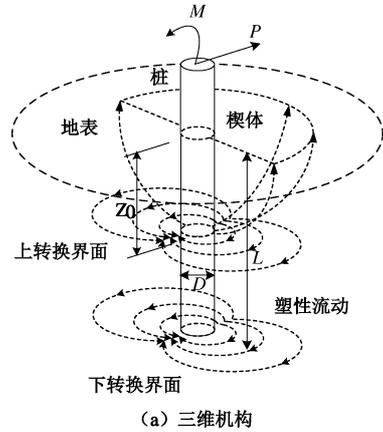


图 65 C/D 对稳定系数的影响

Fig. 65 Effect of C/D on stability factor

(5)饱和黏土中大直径单桩三维水平极限承载力
目前刚性桩侧向极限承载力的三维相容速度场仅有 Murff 等^[125]提出的直线型间断面楔形体机构，但由于楔形体直线破坏面的形式与实际情况不符，因而导致其承载力偏大。为此，Yu 等^[126]采用了如图 66 所示的三维破坏机构，得到了黏土中大直径刚性单桩水平极限承载力的三维上限解。其所采用的破坏机构也包括摩擦区和剪流区的结合，并考虑了深层塑性流动

区和地表处楔形体以及桩底以下未扰动土体（刚块）间转换界面上由摩擦引起的能量耗散，因而其获得的承载力是严格的上限解。图 67 对比了本文方法与 Murff-Hamilton 方法以及 API 规范之间的差别，本文的上限解明显优于 Murff-Hamilton 解。



(b) 对称面上的破坏机构

图 66 破坏机构示意图

Fig. 66 Failure mechanisms

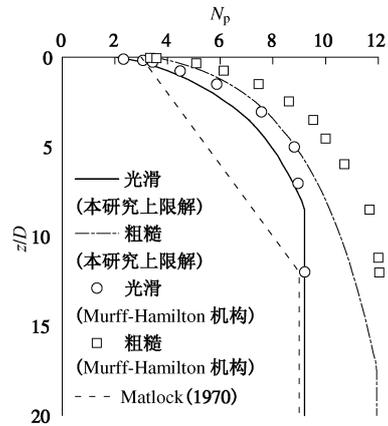


图 67 承载力剖面对比

Fig. 67 Comparison among bearing capacity profiles

与基于刚塑性假设的极限分析方法不同，在不排水条件下进行有限元分析时，泊松比 ν 往往取接近但小于 0.5 的值，那么当变形较大时体积变形将不断累

积在桩后形成明显的孔洞，并在深层产生所谓的空隙流动。而事实上，对不排水饱和黏土不应存在空隙流动。俞剑^[106]在 ABAQUS 中采用任意拉格朗日-欧拉自适应网格 (ALE) 技术对三维水平受荷桩进行了全面的有限元分析。图 68 显示了无重土在不同刚度比下的极限抗力沿深度的分布，在楔形体部分，有限元的承载力和极限分析吻合良好，但在塑性流动区，不同的刚度因子对应着不同的极限承载力，即不同的空隙体积，对于刚度比足够大的情况下，承载力已十分接近上限解。

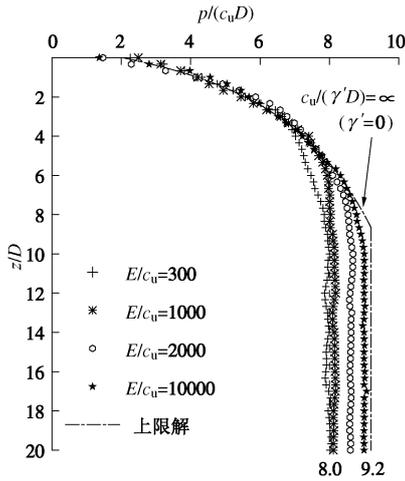


图 68 极限抗力分布随刚度因子的变化

Fig. 68 Profiles of ultimate resistance forces along pile depth under various rigidity coefficients

图 69 显示了有限元和极限分析得到的转换平面深度。当刚度因子较小 ($E_s/c_u = 300$) 时，由于需要更大的竖向应力以形成塑性流动，从而转换平面远低于极限分析的结果。但 $E_s/c_u = 10000$ 时所对应的转换平面深度已和极限分析结果相当接近，这也验证了前述三维破坏机构的合理性。

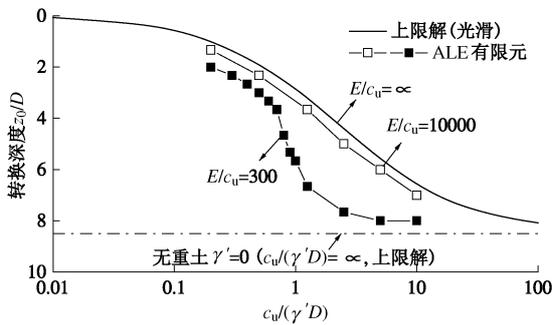


图 69 不同方法得到的转换平面深度对比

Fig. 69 Comparison of transformation depths for failure mechanism obtained by different methods

2.5 不排水黏土地基虚拟加载上限分析方法

极限分析上限法可以有效地获得各类基础工程问题的极限承载力，但其只能获得极限承载力，而无法获得荷载位移曲线，即使采用极限分析有限元法也是

如此。建立能够同时获得极限承载力和荷载位移曲线的分析方法是十分必要的。弹塑性有限单元法具有同时获得荷载位移曲线和极限承载力的能力，但由于受迭代收敛性、本构模型等弹塑性分析复杂性的限制，往往难以在工程实践中得到广泛应用。基于塑性上限理论的 MSD 方法 (Bolton 等^[127])，可通过连续相容的变形场和土单元的应力应变关系获得整个加载过程的荷载位移曲线。但此方法假设变形场在整个加载过程中保持不变且土体强度一致发挥，所以获得的承载力往往明显偏大。Klar 等^[128]将 MSD 法扩展到 EMSD 法，引入虚拟加载步，允许变形场随加载序列而变化，并通过土单元离散考虑了土体内各处强度的不均匀发挥，因此有更高的计算精度，但每个加载步的变形场都需由优化获得，实现过程复杂，计算量相当大。

黄茂松等^[129]在 EMSD 法的基础上提出了一种虚拟总量加载上限方法 (T-EMSD 法)——弹性虚拟加载上限方法，该方法通过一定数学变换，可以将塑性上限定理改写为

$$\int_V 2G[\epsilon_s(\delta\epsilon_{ij})] \delta\epsilon_{ij} \delta\epsilon_{ij} dV = \int T_i^* \delta u_i dS + \int f_i \delta u_i dV, \tag{34}$$

式中， $G[\epsilon_s(\delta\epsilon_{ij})] = \text{Min}[G_s, s_u/\epsilon_s]$ (以理想弹塑性应力应变关系为例)， ϵ_s 为土体内部最大剪应变。若将 $G[\epsilon_s(\delta\epsilon_{ij})]$ 视为弹性剪切模量，则上式在形式上是弹性形式的虚功方程，这样便将求解极限分析上限解的塑性问题转化为求解以 $G(\epsilon_s)$ 为等效剪切弹性模量、 $\nu = 0.5$ 的弹性问题。传统塑性极限分析中不存在弹性模量的概念，但经过上述数学转化后的弹性虚拟加载上限法，在每个加载步中都存在等效剪切模量，这样便可通过平衡方程、位移协调方程和弹性本构方程求得荷载的一个上限，而无需构造速度场。一般工程材料的模量随应变的累积而降低，对其应用弹性虚拟加载上限法时，重复迭代获得的荷载最终将收敛到原问题的最优上限值，即通过迭代计算实现传统上限分析中的最优化过程。俞剑^[106]还提出一种可以计算桩变位后对承载力影响的虚拟总量加载上限方法，但该方法并不是通过迭代，而是优化桩前和桩后两个楔形体。

(1) 基于弹性解析解的虚拟加载上限分析方法

下面针对饱和黏土中的水平受荷桩说明基于弹性解析解的虚拟加载上限分析方法的适用性。Klar^[130]曾通过土体的应力应变关系推导了深层二维情况 $p - y$ 曲线 (MSD 法)，但其通过极限分析上限法得到的桩周应变值估算严重偏大导致其成果仅作为理论上的探讨而无法用于实践。为此，结合刚性圆盘在环状介质中受水平力作用下的弹性力学解，黄茂松等^[129]用刚环将土体分为两个区域 (图 70)，在非线形区中又将土体分为 n 层以区分桩对周围扰动程度的不同。根据

前述与上限分析等价的虚拟加载理论，再应用桩周平均剪应变和土体的应力应变关系得到桩周土体在加载过程中的平均屈服应力即已发挥的土体强度，以此确立二维情况下桩身位移和桩周土反力的关系即 $p-y$ 骨干曲线。

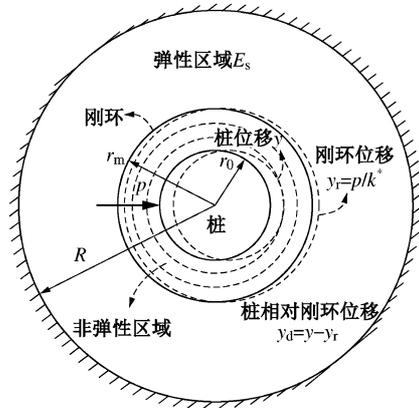


图 70 基于环状弹性介质解的完整和扰动区域模型

Fig. 70 Intact and disturbed zones based on elastic solution to ringed model

图 71 给出虚拟加载上限分析方法 (T-EMSD) 与 EMSD 法 (Klar 等^[128]) 以及有限差分法 (FLAC) 和有限单元法 (ABAQUS) 的对比，可以发现本文方法更加接近弹塑性数值方法，具有良好的一致性。图中 r_0 为桩的半径， c_u 为土体的不排水抗剪强度， G_s 为土体的剪切模量， $I_r = G_s/c_u$ 为无量纲刚度系数，假设桩土界面为完全胶结的情况。

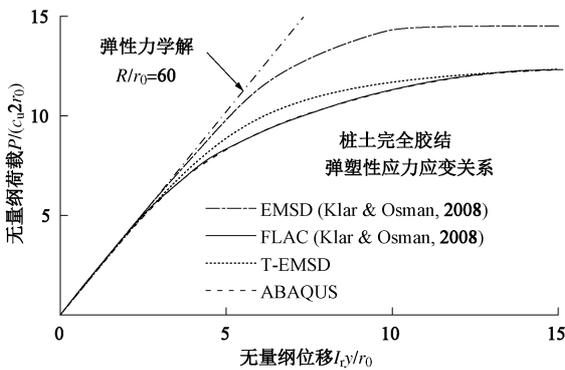


图 71 完全胶结桩各种方法对比 (理想弹塑性模型)

Fig. 71 Comparison of bonded pile among various methods (elastic perfectly plastic model)

图 72 给出了 API 规范的极限承载力和修正 Vesic 模量 (黄茂松等^[129]) 沿桩身的分布规律。这两个参数将直接影响桩周土体平均剪应变的发挥程度，从而影响不同深度 $p-y$ 曲线的发展，最终实现 $p-y$ 曲线从二维到三维的推广。

分别采用 API 承载力系数和 Yu 等^[126]提出的承载力系数 (2.4 节 (5) 条) 对水平受荷桩的三维 $p-y$ 曲线进行分析，并与 ABAQUS 有限元计算结果进行

比较。分析大直径单桩的长径比 $L/D=10$ ，土体刚度因子 $E_s/c_u=500$ ，泊松比 $\nu=0.495$ ，单桩的柔度系数 $K_R = E_p I_p / (E_s L^4)$ 取 1 和 10^{-4} ，图 73 给出了土体强度比 $c_u / (\gamma' D) = 1.5$ 时各种分析方法的计算结果，可以发现采用 Yu 等^[126]承载力系数和虚拟加载上限方法得到的桩顶荷载-位移曲线更接近弹塑性有限元计算结果。俞剑^[106]还对 Kaolin 黏土中的大直径水平受荷桩离心模型试验 (详见 2.3 节 (4) 条) 的桩顶荷载-位移曲线进行模拟。图 74 为离心机模型试验结果、有限元以及虚拟加载上限方法得到的桩顶荷载-位移曲线的对比，充分验证了本文虚拟加载上限方法的合理性。

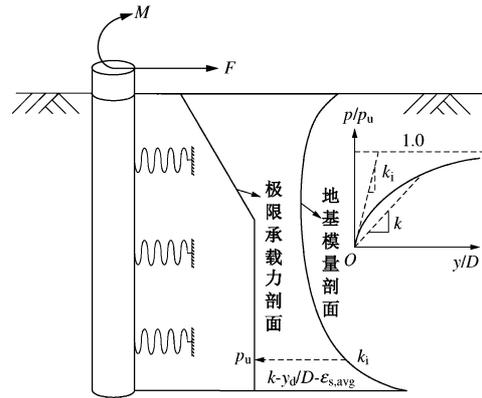


图 72 水平桩地基模量和极限承载力沿深度分布

Fig. 72 Profiles of subgrade modulus and ultimate bearing capacity

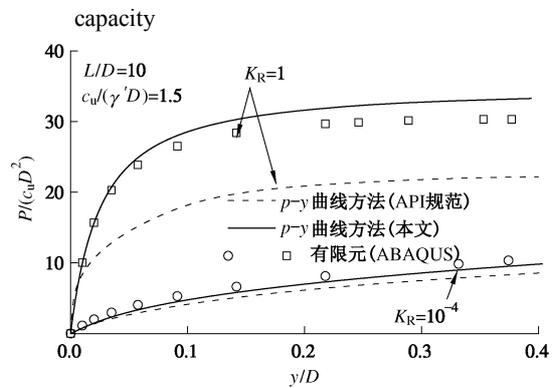


图 73 桩顶荷载位移曲线分析结果

Fig. 73 Load-displacement relationships at pile tip obtained by different methods

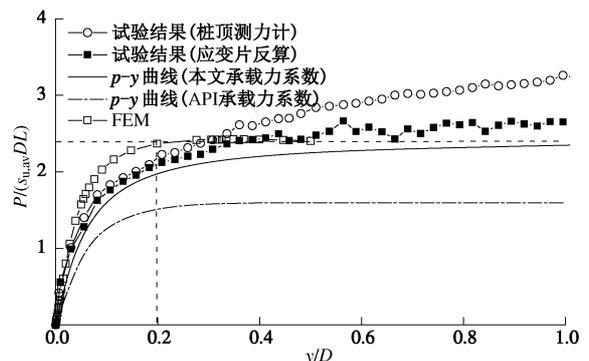


图 74 桩顶荷载位移关系曲线

Fig. 74 Load-displacement relationships at pile tip

(2) 基于弹性有限元的虚拟加载上限分析方法

基于弹性力学解析解的虚拟加载上限法可通过弹性迭代计算获得塑性上限值，但其仍需要提前获得弹性解析解，这大大限制了其推广应用。因弹性问题的解析解难以获得，可通过弹性有限元法获得各类问题的弹性数值解，因此可以很自然地想到通过弹性有限元来实现虚拟加载上限法。图 75 为采用弹性有限元虚拟加载上限法和弹塑性有限元对二维水平受荷桩分析的结果，其分析结果在整个加载阶段与弹塑性有限元有较好的一致性，且在极限段的精度明显优于 EMSD 法而更接近上限值 11.94。图 76, 77 分别给出应用弹性有限元虚拟加载上限法分析双层地基承载力以及考虑强度各向异性的地基承载力，其分析结果和弹塑性有限元以及上限有限元和多块体上限法的计算结果相近，验证了其分析各类复杂问题的有效性。弹性有限元和虚拟加载上限法结合可通过弹性迭代计算可以获得塑性上限值，与传统塑性上限法及 MSD 法相比其真正实现了无需构造速度场或获得弹性解析解，因而可以方便地用于研究各类问题；与弹塑性有限元相比其计算效率和收敛性更优（限于不排水条件）。以弹性有限元虚拟上限法为基础，进而考虑更复杂的情况如循环加载以及多向荷载作用，是其下一步发展的趋势。

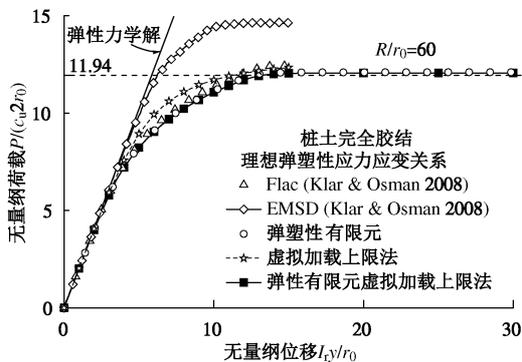


图 75 完全胶结桩荷载位移曲线对比(理想弹塑性模型)
Fig. 75 Comparison of fully bounded pile load-displacement curves (elastic perfectly plastic model)

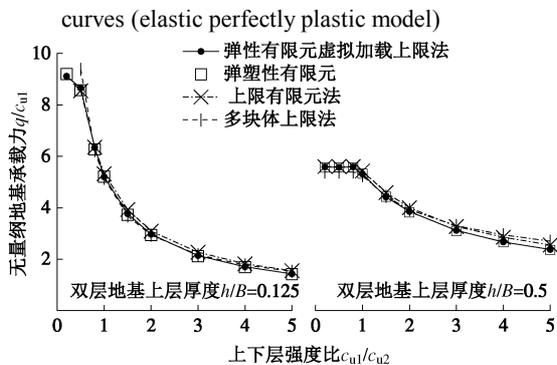


图 76 条形基础双层地基极限承载力

Fig. 76 Ultimate bearing capacity of strip foundation over two layered subgrade

(3) 基于虚拟加载上限方法的三维桩侧静力和循环弱化分析

利用基于土体循环应力应变关系的 $p-y$ 曲线，结合循环弱化公式比较合理地模拟了循环加载下的滞回曲线，从而计算出桩身在加载过程中的承载力退化以及累积变形，但这类方法在计算大循环次数下的桩顶刚度弱化仍需通过滞回圈的精确模拟而得到，显然是比较繁复的。同时离心模型试验中表明，桩身的静承载力随着位移的增大不断提高，在较大的力循环幅值下依然不会出现位移发散的情况，这两个不合常理的现象需要合理解释。

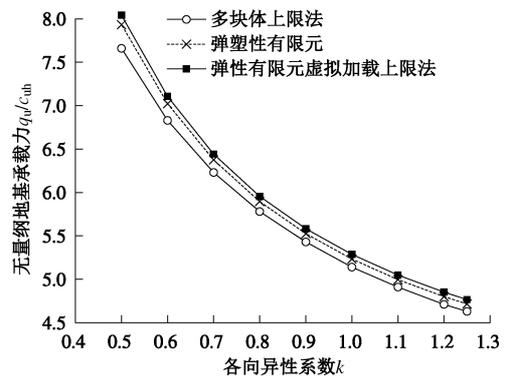


图 77 考虑强度各向异性的地基承载力

Fig. 77 Bearing capacity of clays considering strength anisotropy

传统极限分析上限方法得到的极限承载力是基于结构物和土体处于初始状态，因为极限分析理论基于刚塑性假定。考虑桩身变位对于能量耗散的贡献项，可得考虑桩身变位的桩顶承载力系数 N_0 表达式为

$$N_0 = \frac{P_0}{c_{u,av} DL} = \frac{\int_V 2c_{u0} |\dot{\epsilon}_{max}| dV}{v_0 c_{u0,av} DL} + \frac{\int_A c_{u0} \Delta v_i dA}{v_0 c_{u0,av} DL} + \frac{G_{pile} z_G \dot{\phi} \sin \phi - \int_V f_i v_i dV}{v_0 s_{u0,av} DL}, \quad (35)$$

式中， G_{pile} 为桩的重力， ϕ 和 $\dot{\phi}$ 为桩身变位后的转角以及角速度， z_G 为桩重心到加载点的距离。

考虑桩身变位的速度场如图 78 所示，有关速度场及能量耗散的具体表达式详见文献[106]。图 79 展示了基于桩身变位后速度场的上限加载理论与离心模型试验静力加载结果的对比。由于模型桩在试验时为了测试桩身弯矩而在桩身侧壁贴有应变片并又包裹环氧树脂进行防水处理，且环氧树脂是相对光滑的，因此试验结果更接近虚拟加载上限方法中桩土光滑接触情况的计算结果。

所提出的虚拟加载上限方法是一种可以近似替代大变形弹塑性有限元的简化计算方法，为了进一步验证简化计算方法的合理性，这里采用 ABAQUS 提供的 Coupled Eulerian Lagrangian (CEL) 有限元方法对

离心模型试验进行模拟。前面我们采用 ALE 大变形有限元技术分析了桩在平动情况下的水平极限承载力，然而本次模拟涉及到了桩身的旋转，ALE 技术已无法胜任如此巨大的网格变形，此时 CEL 是一种可供选择的方法。图 79 给出光滑情况下的 CEL 有限元计算结果，CEL 计算结果与虚拟加载上限法结果基本一致。CEL 有限元模型中采用 1497600 个 EC3D8R 单元，桩身采用 2576 个 C3D8R 单元，土体采用 Tresca 材料，泊松比为 0.499。

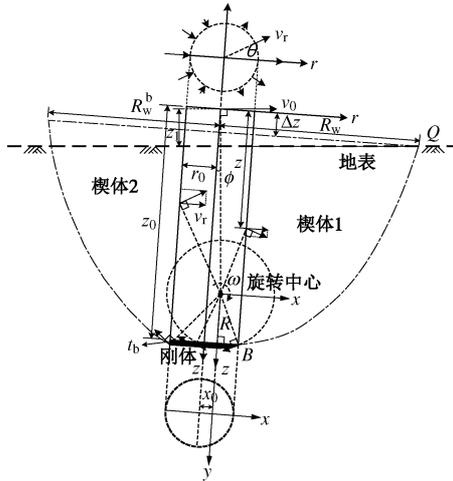


图 78 考虑桩身变位的速度场

Fig. 78 Velocity fields for laterally loaded pile considering pile shaft deformation

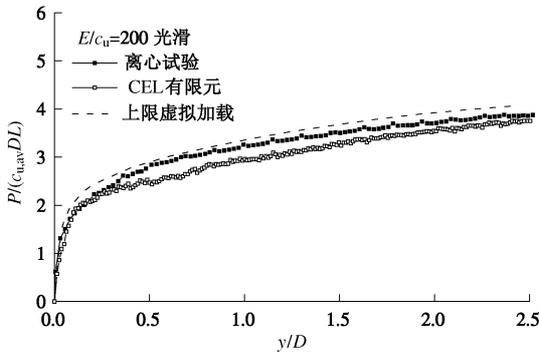


图 79 桩顶反力与桩顶位移的关系

Fig. 79 Load-displacement relationships at pile tip

针对桩侧循环加载弱化分析，关键在于桩身在土体中进行一次加载或卸载时土体中所累积的剪应变 ϵ_{pile} 的计算，这里借鉴了 Einav 等^[131]用于 T-bar 的概念，详见文献[106]。这样进一步采用饱和黏土不排水抗剪强度循环弱化模型，得到位移循环幅值为 0.1D 下的桩顶反力弱化规律，与试验结果的对比如图 80 所示。

上述虚拟加载上限分析方法可以推广应用于隧道开挖面稳定与地表沉降分析, Osman 等^[132]和 Klar 等^[133]

采用了 MSD 方法进行二维环向隧道开挖和三维隧道开挖的分析中，可以预计 T-EMSD 方法的应用将会有效地改善计算的精度，这方面工作有待进一步开展。

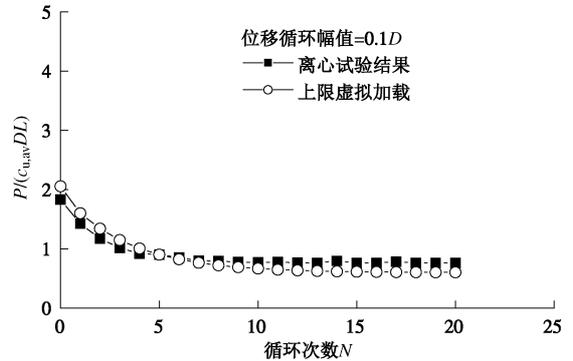


图 80 桩顶反力循环弱化对比

Fig. 80 Comparison of reaction force degradations at pile tip between analyses and test results

3 结 语

本文介绍了砂土失稳机理、砂土地基承载特性和土体稳定性分析方法、饱和软黏土强度特性以及饱和软黏土地基承载特性和稳定性分析方法等方面的研究成果，得到了以下几点认识：①三维非共轴塑性理论的引入有利于合理预测砂土平面应变和真三轴试验的应变局部化失稳；②砂土的各向异性和状态相关特性对应变局部化现象的预测有着显著的影响；③基于砂土状态相关本构模型的应变局部化弹塑性有限元分析方法为合理预测砂土地基的承载特性提供了新思路；④基于状态相关本构模型的饱和砂土分散性失稳有限元分析方法能够合理预测水下较缓边坡的静态液化现象；⑤基于临界状态理论推导的 K_0 固结饱和软黏土不排水抗剪强度公式能合理揭示上覆有效应力引起的强度非均质特性以及不同主应力方向的强度各向异性；⑥建立的饱和软黏土动力固结弹塑性有限元分析方法有效地解决了低渗透性饱和软黏土有限元分析中的不可压缩问题，结合不排水强度循环弱化公式或循环累积变形公式，也可以合理预测循环荷载下饱和软黏土地基承载力和桩侧承载特性的衰减规律；⑦建立有效的极限分析方法可以获得更为可靠的饱和软黏土地基稳定性的计算结果，同时还能考虑强度非均质性和各向异性；⑧提出的不排水软黏土地基总量虚拟加载上限分析方法，可以同时获得合理的极限承载力和荷载位移曲线，并可以预测桩侧承载特性的循环弱化规律。

尽管笔者在土体稳定与承载特性分析方法的研究上取得了一些进展，但系统性和方法验证方面存在着明显的局限性，还需要大量深入的研究工作。限于篇幅，有关工程应用方面也未能作适当的介绍。

致谢: 感谢土力学及岩土工程界各位同仁的信任, 使本人有机会作黄文熙讲座; 感谢同济大学岩土工程学科各位同事的支持和帮助; 感谢钱建固教授、吕玺琳副教授、俞剑博士以及博士研究生曲 颢, 李 森, 陈洲泉, 唐 震和硕士研究生赵 赟为本文的整理工作所做的努力。

参考文献:

- [1] DUNCAN J M. State of the art: Limit equilibrium and finite-element analysis of slopes[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1996, **122**(7): 557 - 596.
- [2] 陈祖煜, 弥宏亮, 汪小刚. 边坡稳定三维分析的极限平衡法[J]. *岩土工程学报*, 2001, **23**(5): 525 - 529. (CHEH Zu-yu, MI Hong-liang, WANG Xiao-gang. A three-dimensional limit equilibrium method for slope stability analysis[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2001, **23**(5): 525 - 529. (in Chinese))
- [3] ZHU D Y, LEE C F, JIANG H D. A numerical study of the bearing capacity factor N_γ [J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2001, **38**(5): 1090 - 1096.
- [4] ZHU D Y, LEE C F, JIANG H D. Generalised framework of limit equilibrium methods and numerical procedure for slope stability[J]. *Géotechnique*, 2003, **53**(4): 377 - 395.
- [5] ZHENG H, THAM L G. Improved Bell's method for the stability analysis of slopes[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2009, **33**(14): 1673 - 1689.
- [6] MARTIN C M. Exact bearing capacity calculations using the method of characteristics[C]// *Proceeding of the 11th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics*. Turin, 2005: 441 - 450.
- [7] POTTS D M. Numerical analysis: a virtual dream or practical reality?[J]. *Géotechnique*, 2003, **53**(6): 535 - 573.
- [8] CHEN W F. *Limit analysis and soil plasticity*[M]. Elsevier: Amsterdam, 1975.
- [9] SLOAN S W. Geotechnical stability analysis[J]. *Géotechnique*, 2013, **63**(7): 531 - 572.
- [10] MICHALOWSKI R L, SHI L. Bearing capacity of footings over two-layer foundation soils[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1995, **121**(5): 421 - 428.
- [11] DONALD I, CHEN Z Y. Slope stability analysis by the upper bound approach: fundamentals and methods[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1997, **34**(6): 853 - 62.
- [12] 陈祖煜. 土力学经典问题的极限分析上、下限解[J]. *岩土工程学报*, 2002, **24**(1): 1 - 11. (CHEN Zu-yu. Limit analysis for the classic problems of soil mechanics[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, **24**(1): 1 - 11. (in Chinese))
- [13] ZIENKIEWICZ O C, HUMPHESON C, LEWIS R W. Associated and non-associated viscoplasticity and plasticity in soil mechanics[J]. *Géotechnique*, 1975, **25**(4): 671 - 689.
- [14] GRIFFITHS D V, LANE P A. Slope stability analysis by finite elements[J]. *Géotechnique*, 1999, **49**(3): 387 - 403.
- [15] 郑颖人, 赵尚毅. 有限元强度折减法在土坡与岩坡中的应用[J]. *岩石力学与工程学报*, 2004, **23**(19): 3381 - 3388. (ZHENG Ying-ren, ZHAO Shang-yi. Application of strength reduction FEM in soil and rock slope[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, **23**(19): 3381 - 3388. (in Chinese))
- [16] HILL R. Acceleration waves in solids[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1962, **10**(1): 1 - 6.
- [17] RUDNICKI J W, RICE J R. Conditions for the localization of the deformation in pressure sensitive dilatant materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1975, **23**(6): 371 - 394.
- [18] VARDOULAKIS I. Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1980, **4**(2): 103 - 119.
- [19] VARDOULAKIS I, GRAF B. Calibration of constitutive models for granular materials using data from biaxial experiments[J]. *Géotechnique*, 1985, **35**(3): 299 - 317.
- [20] HAN C, DRESCHER A. Shear bands in biaxial tests on dry coarse sand[J]. *Soils and Foundations*, 1993, **33**(1): 118 - 132.
- [21] PAPAMICHOS E, VARDOULAKIS I. Shear band formation in sand according to non-coaxial plasticity model[J]. *Géotechnique*, 1995, **45**(4): 649 - 661.
- [22] 钱建固, 黄茂松. 土体变形分叉的非共轴理论[J]. *岩土工程学报*, 2004, **26**(6): 777 - 781. (QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song. Non-coaxiality for deformation bifurcation in soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2004, **26**(6): 777 - 781. (in Chinese))
- [23] 钱建固, 黄茂松, 杨 峻. 真三维应力状态下土体应变局部化的非共轴理论[J]. *岩土工程学报*, 2006, **28**(4): 510 - 515. (QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song, YANG Jun. Non-coaxiality for deformation bifurcation in soils[J].

- Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(4): 510 - 515. (in Chinese))
- [24] QIAN J G, YANG J, HUANG M S. Three-dimensional noncoaxial plasticity modeling of shear band formation in geomaterials[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2008, **134**(4): 322 - 329.
- [25] QIAN J G, YOU Z P, HUANG M S, et al. A micromechanics-based model for estimating localized failure with effects of fabric anisotropy[J]. Computers and Geotechnics, 2013, **50**:90 - 100.
- [26] CHU J, LO S C R, LEE I K. Strain softening and shear band formation of sand in multi-axial testing[J]. Géotechnique, 1996, **46**(1): 63 - 82.
- [27] LADE P V, WANG Q. Analysis of shear banding in true triaxial tests on sand[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2001, **127**(8): 762 - 768.
- [28] WANG Q, LADE P V. Shear banding in true triaxial tests and its effect on failure in sand[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2001, **127**(8): 754 - 761.
- [29] HUANG M S, LU X L, QIAN J G. Non-coaxial elasto-plasticity model and bifurcation prediction of shear banding in sands[J]. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2010, **34**(9): 906 - 919.
- [30] OCHIAI H, LADE P V. Three-dimensional behavior of sand with anisotropic fabric[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1983, **109**(10): 1313 - 1328.
- [31] LADE P V, NAM J, HONG W P. Shear banding and cross-anisotropic behaviour observed in laboratory sand tests with stress rotation[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, **45**: 74 - 84.
- [32] MORTARA G. A hierarchical single yield surface for frictional materials[J]. Computers and Geotechnics, 2009, **36**(6): 960 - 967.
- [33] 吕玺琳, 黄茂松, 钱建固. 层状各向异性无黏性土三维强度准则[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(6): 945 - 949. (LU Xi-lin, HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu. Three-dimensional strength criterion for layered-anisotropic cohesionless soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(6): 945 - 949. (in Chinese))
- [34] PIETRUSZCZAK S, MROZ Z. Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor [J]. Computers and Geotechnics, 2000, **26**(2): 105 - 112.
- [35] RODRIGUEZ N M, LADE P V. Effects of principal stress directions and mean normal stress on failure criterion for cross-anisotropic sand[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2013, **139**(11): 1592 - 1601.
- [36] 吕玺琳, 钱建固, 黄茂松. 考虑主应力方向影响的正交各向异性土体强度[J]. 同济大学学报, 2015, **43**(5): 657 - 661. (LU Xi-lin, QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song. Strength of Cross-anisotropic soils considering influence of principal stress direction[J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2015, **43**(5): 657 - 661. (in Chinese))
- [37] LADE P V, RODRIGUEZ N M, DYCK E J V. Effects of principal stress directions on 3D failure conditions in cross-anisotropic sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2014, **140**: 04013001.
- [38] ODA M, KOISHIKAWA I, HIGUCHI T. Experimental study of anisotropic shear strength of sand by plane strain test[J]. Soils and Foundations, 1978, **18**(1): 25 - 38.
- [39] ABELEV A V, LADE P V. Effects of cross anisotropy on three-dimensional behavior of sand: I Stress-strain behavior and shear banding[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2003, **129**(2): 160 - 166.
- [40] LU X L, HUANG M S, QIAN J G. The onset of strain localization in cross-anisotropic soils under true triaxial condition[J]. Soils and Foundations, 2011, **51**(4): 693 - 700.
- [41] LI X S, DAFALIAS Y F, WANG Z L. State-dependent dilatancy in critical-state constitutive modeling of sand[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, **36**: 599 - 611.
- [42] GAJO A, WOOD M. Severn-trent sand: a kinematic-hardening constitutive model: the $q - p$ formulation[J]. Géotechnique, 1999, **49**(5): 595 - 614.
- [43] 黄茂松, 扈萍, 钱建固. 基于材料状态相关砂土临界状态理论的应变局部化分析[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(8): 1133 - 1139. (HUANG Mao-song, HU Ping, QIAN Jian-gu. Strain localization of sand based on a state-dependent critical state model[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(8): 1133 - 1139. (in Chinese))
- [44] 黄茂松, 李学丰, 贾苍琴. 基于材料状态相关理论的砂土双屈服面模型[J]. 岩土工程学报, 2010, **31**(11): 1764 - 1771. (HUANG Mao-song, LI Xue-feng, JIA Cang-qin. A double yield surface constitutive model for sand based on state-dependent critical state theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **31**(11): 1764 - 1771 (in Chinese))

- [45] BOLTON M D. The strength and dilatancy of sands[J]. *Géotechnique*, 1986, **36**(1): 65 - 78.
- [46] YANG J, LI X S. State-dependent strength of sands from the perspective of unified modeling[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2004, **130**(2): 186 - 198.
- [47] LI X S, DAFALIAS Y F. Constitutive modeling of inherently anisotropic sand behavior[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2002, **128**(10): 868 - 880.
- [48] YANG Z X, LI X S, YANG J. Quantifying and modelling fabric anisotropy of granular soils[J]. *Géotechnique*, 2008, **58**(4): 237 - 248.
- [49] 黄茂松, 李学丰, 钱建固. 各向异性砂土的应变局部化分析[J]. *岩土工程学报*, 2012, **34**(10): 1885-1892. (HUANG Mao-song, LI Xue-feng, QIAN Jian-gu. On Strain localization of anisotropic sands[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2012, **34**(10): 1885 - 1892 (in Chinese))
- [50] 李学丰, 黄茂松, 钱建固. 基于非共轴理论的各向异性砂土应变局部化分析[J]. *工程力学*, 2014, **31**(3): 205 - 211, 246. (LI Xue-feng, HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu. Strain localization analysis of anisotropic sands based on non-coaxial theory[J]. *Engineering Mechanics*, 2014, **31**(3): 205 - 211, 246. (in Chinese))
- [51] DRESCHER A, DETOURNAY E. Limit load in translational failure mechanisms for associative and non-associative materials[J]. *Géotechnique*, 1993, **43**(3): 443 - 456.
- [52] YIN J H, WANG Y J, SELVADURAI A P S. Influence of nonassociativity on the bearing capacity of a strip footing[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2001, **127**(11): 985 - 989.
- [53] HUANG M S, JIA C Q. Strength reduction FEM in stability analysis of soil slopes subjected to transient unsaturated seepage[J]. *Computers and Geotechnics*, 2009, **36**(1): 93 - 101.
- [54] HUANG M S, WANG H R, SHENG D C, et al. Rotational-translational mechanism for the upper bound stability analysis of slopes with weak interlayer[J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, **53**: 133 - 141.
- [55] AZAMI A, PIETRUSZCZAK S, GUO P. Bearing capacity of shallow foundations in transversely isotropic granular media[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2010, **34**(8): 771 - 880.
- [56] KOUTSABELOULIS N C, GRIFFITHS D V. Numerical modeling of the trap door problem [J]. *Géotechnique*, 1989, **39**(1): 77 - 89.
- [57] PIETRUSZCZAK S, NIU X. On the description of localized deformation[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1993, **17**(11): 791 - 805.
- [58] HUANG M S, PIETRUSZCZAK S. Numerical modelling of localized deformation in saturated soils[C]// *Proceeding of the 9th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics*. Rotterdam: Balkema, 1997: 427 - 432.
- [59] 黄茂松, 钱建固, 吴世明. 饱和土体应变局部化的复合体理论[J]. *岩土工程学报*, 2002, **24**(1): 21 - 25. (HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu, WU Shi-ming. A homogenisation approach to localized deformation in saturated soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, **24**(1): 21 - 25. (in Chinese))
- [60] 黄茂松, 钱建固. 平面应变条件下饱和土体分叉后的力学性状[J]. *工程力学*, 2005, **22**(1): 48 - 53. (HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu. Post-bifurcation response of saturated soils under plane strain conditions[J]. *Engineering Mechanics*, 2005, **22**(1): 48 - 53. (in Chinese))
- [61] SAKAI T, TANAKA T. Scale effect of a shallow circular anchor in dense sand[J]. *Soils and foundations*, 1998, **38**(2): 93 - 99.
- [62] BAŽANT Z P. Instability, ductility, and size effect in strain softening concrete[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1976, **102**(2): 331 - 344.
- [63] VERMEER P A, BRINKGREVE R B J. A new effective non-local strain measure for softening plasticity[C]. *Localization and Bifurcation Theory for Soil and Rocks*. Rotterdam: Balkema, 1994: 89 - 100.
- [64] STRÖMBERG L, RISTINMAA M. FE-formulation of a nonlocal plasticity theory[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **136**(1): 127 - 144.
- [65] LU X L, BARDET J P, HUANG M S. Numerical solutions of strain localization with nonlocal softening plasticity[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2009, **198**: 3702 - 3711.
- [66] LU X L, BARDET J P, HUANG M S. Length scales interaction in nonlocal plastic strain localization of bars of varying section[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2010, **136**(8): 1036 - 1042.

- [67] LU X L, BARDET J P, HUANG M S. Spectral analysis of nonlocal regularization in two-dimensional finite element models[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2012, **36**(2): 219 - 235.
- [68] 曲 颢, 黄茂松, 吕玺琳. 基于非局部 Mohr-Coulomb 模型的土体渐进破坏分析[J]. *岩土工程学报*, 2013, **35**(3): 523 - 530. (QU Xie, HUANG Mao-song, LÜ Xi-lin. Progressive failure of soils based on non-local Mohr-Coulomb models[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, **35**(3): 523 - 530. (in Chinese))
- [69] ZIENKIEWICZ O C, HUANG M S, PASTOR M. Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1995, **19**(2): 127 - 148.
- [70] ZIENKIEWICZ O C, PASTOR M, HUANG M S. Softening, localisation and adaptive remeshing-Capture of discontinuous solution[J]. *Computational Mechanics*, 1995, **17**(1-2): 98 - 106.
- [71] 黄茂松, 钱建固, 吴世明. 土坝动力应变局部化与渐进破坏的自适应有限元分析[J]. *岩土工程学报*, 2001, **23**(3): 306 - 310. (HUANG Mao-song, QIAN Jian-gu, WU Shi-ming. An adaptive finite element method for strain localization and progressive failure of earth dam under earthquake[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2001, **23**(3): 306 - 310. (in Chinese))
- [72] 黄茂松, 贾苍琴, 钱建固. 岩土材料应变局部化的有限元分析方法[J]. *计算力学学报*, 2007, **24**(4): 465 - 471. (HUANG Mao-song, JIA Cang-qin, QIAN Jian-gu. Strain localization problems in geomaterials using finite elements[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, **24**(4): 465 - 471. (in Chinese))
- [73] LU X L, HUANG M S, QIAN J G. Prediction of plane strain undrained diffuse and localized instability with non-coaxial plasticity[J]. *Soils and Foundations*, 2014, **54**(12): 1070 - 1080.
- [74] LU X L, HUANG M S. Static liquefaction of sands under isotropically and K_0 -consolidated undrained triaxial conditions[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2015, **141**(1): 04014087.
- [75] 吕玺琳, 钱建固, 黄茂松. 不排水加载条件下 K_0 固结饱和砂土失稳预测[J]. *岩土工程学报*, 2015, **37**(6): 1010 - 1015. (LÜ Xi-lin, QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song. Prediction of instability of K_0 -consolidated saturated sands under undrained loading conditions[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, **37**(6): 1010 - 1015. (in Chinese))
- [76] CHU J, WANATOWSKI D. Instability conditions of loose sand in plane strain[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2008, **134**(1): 136 - 142.
- [77] 黄茂松, 曲 颢, 吕玺琳. 基于状态相关本构模型的松砂静态液化失稳数值分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2014, **33**(7): 1479 - 1487. (HUANG Mao-song, QU Xie, LU Xin-lin. Instability and static liquefaction analysis of loose sands with a state-dependent constitutive model[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2014, **33**(7): 1479 - 1487. (in Chinese))
- [78] 沈珠江. 软土工程特性和软土地基设计[J]. *岩土工程学报*, 1998, **20**(1): 108 - 110. (SHEN Zhu-jiang. Engineering properties of soft soils and design of soft ground[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1998, **20**(1): 108 - 110. (in Chinese))
- [79] 陈祖煜. 深基坑稳定分析中几个问题的讨论[J]. *岩土工程学报*, 2010, **32**(增刊 1): 1 - 8. (CHEN Zu-yu. Discussion on several problems in deep foundation pit engineering[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, **32**(S1): 1 - 8. (in Chinese))
- [80] WROTH C P. The interpretation of in situ soil tests[J]. *Géotechnique*, 1984, **34**(4): 449 - 489.
- [81] 魏 星, 黄茂松. 天然结构性黏土的各向异性界面模型[J]. *岩土工程学报*, 2007, **29**(8): 1225 - 1229. (WEI Xing, HUANG Mao-song. Anisotropic bounding surface model for natural structured clays[J]. *Chinese Journal of Geotechnical and Engineering*, 2007, **29**(8): 1224 - 1229. (in Chinese))
- [82] HUANG M S, LIU Y H, SHENG D C. Simulation of yielding and stress-strain behavior of Shanghai soft clay[J]. *Computers and Geotechnics*, 2011, **38**(3): 341 - 353.
- [83] 黄茂松, 宋晓宇, 秦会来. K_0 固结黏土基坑抗隆起稳定性上限分析[J]. *岩土工程学报*, 2008, **30**(2): 250 - 255. (HUANG Mao-song, SONG Xiao-yu, QIN Hui-lai. Basal stability of braced excavations in K_0 -consolidated soft clay by upper bound method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2008, **30**(2): 250 - 255. (in Chinese))
- [84] 纠永志. 开挖条件下软黏土地基桩筏基础非线性分析[D]. 上海: 同济大学, 2014. (JIU Yong-zhi. Nonlinear analysis of pile-raft foundations during excavation in soft clay[D].

- Shanghai: Tongji University, 2014. (in Chinese))
- [85] 柳艳华. 天然软黏土屈服特性及主应力轴旋转效应研究[D]. 上海: 同济大学, 2010. (LIU Yan-hua. On yielding characteristics and principal stress rotation in natural soft clay[D]. Shanghai: Tongji University, 2010. (in Chinese))
- [86] 黄茂松, 余生兵, 秦会来. 基于上限法的 K_0 固结黏土基坑抗隆起稳定分析[J]. 土木工程学报, 2011, **44**(3): 101 - 108. (HUANG Mao-song, YU Sheng-bing, QIN Hui-lai. Upper bound method for basal stability analysis of braced excavations in K_0 -consolidated clays[J]. China Civil Engineering Journal, 2011, **44**(3): 101 - 108. (in Chinese))
- [87] CASAGRANDE A, CARRILLO N. Shear failure of anisotropic materials[J]. Journal of Boston Society of Civil Engineers, 1944, **31**(4): 74 - 87.
- [88] LADD C C. Strength parameters and stress-strain behavior of saturated clays[R]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1971.
- [89] 柳艳华, 黄茂松, 李 帅. 循环荷载下结构性软黏土的各向异性界面模型[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(7): 1066 - 1071. (LIU Yan-hua, HUANG Mao-song, LI Shuai. An anisotropic bounding surface model for structured soft clay under cyclic loading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(7): 1066 - 1071. (in Chinese))
- [90] HONG W P, LADE P V. Elasto-plastic behavior of K_0 -consolidated clay in torsion shear tests[J]. Soils and Foundations, 1989, **29**(2): 127 - 140.
- [91] 黄茂松, 刘 明, 柳艳华. 循环荷载下软黏土的各向异性界面模型[J]. 水利学报, 2009, **40**(2): 188 - 193. (HUANG Mao-song, LIU Ming, LIU Yan-hua. Anisotropic bounding surface model for saturated soft clay under cyclic loading[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2009, **40**(2): 188 - 193. (in Chinese))
- [92] 黄茂松, 李 帅. 长期往复荷载作用下近海饱和软黏土强度和刚度的弱化特性[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(10): 1491 - 1498. (HUANG Mao-song, LI Shuai. Degradation of stiffness and strength of offshore saturated soft clay under long-term cyclic loading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, **32**(10): 1491 - 1498. (in Chinese))
- [93] 黄茂松, 李进军, 李兴照. 饱和软黏土的不排水循环累积变形特性[J]. 岩土工程学报, 2006, **28**(7): 891 - 895. (HUANG Mao-song, LI Jin-jun, LI Xing-zhao. Cumulative deformation behaviour of soft clay in cyclic undrained tests[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, **28**(7): 891 - 895. (in Chinese))
- [94] 黄茂松, 姚兆明. 循环荷载下饱和软黏土的累积变形显式模型[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(3): 325 - 331. (HUANG Mao-song, YAO Zhao-ming. Explicit model for cumulative strain of saturated clay subjected to cyclic loading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(3): 325 - 331. (in Chinese))
- [95] 姚兆明, 黄茂松, 曹 杰. 主应力轴循环旋转下饱和软黏土的累积变形[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(6): 1005 - 1012. (YAO Zhao-ming, HUANG Mao-song, CAO Jie. Cumulative deformation of saturated soft clay subjected to cyclic rotation of principal stress axis[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(6): 1005 - 1012. (in Chinese))
- [96] PREVOST J H. Mathematical modeling of monotonic and cyclic undrained clay behavior[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1977, **1**(2): 195 - 216.
- [97] 王建华, 要明伦. 软黏土不排水循环特性的弹塑性模拟[J]. 岩土工程学报, 1996, **18**(3): 11 - 18. (WANG Jian-Hua, YAO Ming-Lun. Elastoplastic simulation of the cyclic undrained behavior of soft clays[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, **18**(3): 11 - 18. (in Chinese))
- [98] ZIENKIEWICZ O C, CHANG C T, HINTON E. Nonlinear seismic response and liquefaction[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1978, **2**(4): 381 - 404.
- [99] ZIENKIEWICZ O C, HUANG M S, WU J, et al. A new algorithm for the coupled soil - pore fluid problem[J]. Shock and Vibration, 1993, **1**(1): 3 - 13.
- [100] HUANG M S, WU S M, ZIENKIEWICZ O C. Incompressible or nearly incompressible soil dynamic behavior-a new staggered algorithm to circumvent restrictions of mixed formulation[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2001, **21**(2): 169 - 179.
- [101] HUANG M S, ZIENKIEWICZ O C. New unconditionally stable staggered solution procedures for coupled soil-pore fluid dynamic problems[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1998, **43**(6): 1029 - 1052.
- [102] ZIENKIEWICZ O C, HUANG M S, PASTOR M. Computational soil dynamics - A new algorithm for drained and undrained conditions[C]// Proceeding of the 8th International Conference on Computer Methods and

- Advances in Geomechanics. Rotterdam: Balkema, 1994: 47 - 59.
- [103] HUANG M S, YUE Z Q, THAM L G, et al. On the stable finite element procedures for dynamic problems of saturated porous media[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, **61**(9): 1421 - 1450.
- [104] 黄茂松, 魏 星. 循环荷载饱和土动力学问题稳定有限元解[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(2): 173 - 177. (HUANG Mao-song, WEI Xing. Stabilized finite elements for dynamic problems of saturated soil subjected to cyclic loading[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, **27**(2): 173 - 177. (in Chinese))
- [105] 刘 莹, 黄茂松, 李 帅. 海上风电桩基础竖向承载力循环弱化简化分析[J]. 岩土力学, 2013, **34**(9): 2655 - 2660. (LIU Ying, HUANG Mao-song, LI Shuai. Simplified analysis of cyclic degradation of axial bearing capacity for offshore wind turbine pile foundations[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, **34**(9): 2655 - 2660. (in Chinese))
- [106] 俞 剑. 饱和黏土中大直径单桩水平循环加载特性[D]. 上海: 同济大学, 2015. (YU Jian. Behavior of monopiles in saturated clay subjected to cyclic lateral load[D]. Shanghai: Tongji University, 2015. (in Chinese))
- [107] 黄茂松, 刘 莹. 基于非线性运动硬化模型的饱和黏土桩基础竖向循环弱化数值分析[J]. 岩土工程学报, 2014, **36**(12): 2170 - 2178. (HUANG Mao-song, LIU Ying. Numerical analysis of axial cyclic degradation of a single pile in saturated soft soil based on nonlinear kinematic hardening constitutive model[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2014, **36**(12): 2170 - 2178. (in Chinese))
- [108] HUANG M S, LIU Y. Axial capacity degradation of single piles in soft clay under cyclic loading[J]. Soils and Foundations, 2015, **55**(2): 315 - 328.
- [109] POULOS H G. Development of an analysis for cyclic axial loading of piles[C]// Proceeding of the 3rd International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics. Rotterdam: Balkema, 1979: 1513 - 1530.
- [110] ZHANG C R, WHITE D, RANDOLPH M F. Centrifuge modeling of the cyclic lateral response of a rigid pile in soft clay[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2010, **137**(7): 717 - 729.
- [111] 黄茂松, 秦会来, 郭院成. 非均质和各向异性黏土地基承载力的上限解[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, **27**(3): 511 - 518. (HUANG Mao-song, QIN Hui-lai, GUO Yuan-cheng. Upper bound method for bearing capacity calculation of anisotropic and nonhomogeneous clay[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **27**(3): 511 - 518. (in Chinese))
- [112] HUANG M S, QIN H L. Upper-bound multi-rigid-block solutions for bearing capacity of two-layered soils[J]. Computers and Geotechnics, 2009, **36**(3): 525 - 529.
- [113] KUSAKABE O, SUZUKI H, NAKASE A. An upper bound calculation on bearing capacity of a circular footing on a non-homogeneous clay[J]. Soils and Foundations, 1986, **26**(3): 143 - 148.
- [114] 杜佐龙. 非均质与各向异性黏土地基稳定性分析[D]. 上海: 同济大学, 2010. (DU Zuo-long. Stability analysis of non-homogeneous and anisotropic clay foundations[D]. Shanghai: Tongji University, 2010. (in Chinese))
- [115] 秦会来, 黄茂松, 马少坤. 黏土基坑抗隆起稳定分析的多块体上限解[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, **29**(1): 73 - 81. (QIN Hui-lai, HUANG Mao-song, MA Shao-kun. Multi-block upper bound method for basal heave stability analysis of braced excavations in clay[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, **29**(1): 73 - 81. (in Chinese))
- [116] 黄茂松, 余生兵. 基坑抗隆起稳定的块体集上限分析[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(8): 1440 - 1447. (HUANG Mao-song, YU Sheng-bing. Upper bound analysis of basal stability in undrained clay based on block set mechanism[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(8): 1440 - 1447. (in Chinese))
- [117] 黄茂松, 杜佐龙, 宋春霞. 支护结构入土深度对黏土基坑抗隆起稳定的影响分析[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(7): 1097 - 1103. (HUANG Mao-song, DU Zuo-long, SONG Chun-xia. Effects of inserted depth of wall penetration on basal stability of foundation pits in clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering 2011, **33**(7): 1097 - 1103. (in Chinese))
- [118] 黄茂松, 宋春霞, 吕玺琳. 非均质黏土地基隧道环向开挖面稳定上限分析[J]. 岩土工程学报, 2013, **35**(8): 1504 - 1512. (HUANG Mao-song, SONG Chun-xia, LÜ Xi-lin. Upper bound analysis for stability of a circular tunnel in heterogeneous clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, **35**(8): 1504 - 1512. (in Chinese))
- [119] HUANG M S, SONG C X. Upper-bound stability analysis of a plane strain heading in non-homogeneous clay[J].

- Tunnelling and Underground Space Technology, 2013, **38**: 213 - 223.
- [120] DAVIS E H, GUNN M J, MAIR R J, et al. The stability of shallow tunnels and underground openings in cohesive material[J]. *Géotechnique*, 1980, **30**(4): 397 - 416.
- [121] 周维祥. 非均质黏土地基隧道开挖面稳定性分析[D]. 上海: 同济大学, 2011. (ZHOU Wei-xiang. Stability of shield tunnel excavation in undrained condition[D]. Shanghai: Tongji University, 2011. (in Chinese))
- [122] AUGARDE C E, LYAMIN A V, SLOAN S W. Stability of an undrained plane strain heading revisited[J]. *Computers and Geotechnics*, 2003, **30**(5): 419 - 430.
- [123] 宋春霞, 黄茂松, 周维祥. 黏土地层隧道开挖面三维稳定性上限分析[J]. *岩土工程学报*, 2015, **37**(4): 650 - 658. (SONG Chun-xia, HUANG Mao-song, ZHOU Wei-xiang. Three-dimensional face stability analysis of tunnels in cohesive soils by upper bound limit method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, **37**(4): 650 - 658. (in Chinese))
- [124] KIMURA T, MAIR R J. Centrifugal testing of model tunnels in soft clay[C]//Proceedings of the 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Stockholm, 1981: 319 - 322.
- [125] MURFF J D, HAMILTON J M. P-ultimate for undrained analysis of laterally loaded piles[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1993, **119**(1): 91 - 107.
- [126] YU J, HUANG M S, ZHANG C R. Three-dimensional upper bound analysis for ultimate bearing capacity of a laterally loaded pile in undrained clay[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2015, **52**(11): 1775 - 1790.
- [127] BOLTON M D, POWRIE W. Behaviour of diaphragm walls in clay prior to collapse[J]. *Géotechnique*, 1988, **38**(2): 167 - 189.
- [128] KLAR A, OSMAN A S. Load-displacement solutions for piles and shallow foundations based on deformation fields and energy conservation[J]. *Géotechnique*, 2008, **58**(7): 581 - 589.
- [129] 黄茂松, 俞剑, 张陈蓉. 基于应变路径法的黏土中水平受荷桩 $p - y$ 曲线[J]. *岩土工程学报*, 2015, **37**(3): 400 - 409. (HUANG Mao-song, YU Jian, ZHANG Chen-rong. $p - y$ curves of laterally loaded piles in clay based on strain path approach[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2015, **37**(3): 400 - 409. (in Chinese))
- [130] KLAR A. Upper bound for cylinder movement using “elastic” fields and its possible application to pile deformation analysis[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2008, **8**(2): 162 - 167.
- [131] EINAV I, RANDOLPH M F. Combining upper bound and strain path methods for evaluating penetration resistance[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005, **63**(14): 1991 - 2016.
- [132] OSMAN A S, BOLTON M D, MAIR R J. Predicting 2D ground movements around tunnels in undrained clay[J]. *Géotechnique*, 2006, **56**(9): 597 - 604.
- [133] KLAR A, KLEIN B. Energy-based volume loss prediction for tunnel face advancement in clays[J]. *Géotechnique*, 2014, **64**(10): 776 - 786.