

波在饱和土中传播的若干问题

王立忠 吴世明

(浙江大学岩土工程研究所, 杭州, 310027)

文 摘 从 Biot 理论和混合物理论的一致性出发, 提出了饱和土中波传播一些有别于国内外学者的看法。包括对 Biot 理论的理解, 水相运动方程的描述, 饱和土中 P 波的定义, 及 Bardet 饱和土粘弹性模型的缺陷等。

关键词 饱和土, 波传播, 模型。

1 Biot 理论和混合物理论的一致性

关于饱和土中波的传播研究始于 Biot (1956, 1957)^[1,2]。Vardoulakis 和 Beskoes (1986) 曾在这方面作过总结^[3]。所谓 Biot 理论我们是指 Biot 发表的两篇文章, 随后 Biot (1962)^[4] 发表了这些基本方程的简化式, 但并不改变原理论。在 Biot 模型中作用于一个单元体积上的平均应力被定义为作用于固体和流体上的力的总和除以面积。单元内的势能表示为应变分量的二次函数, 固体和流体中速度的交叉乘积产生一个不明显的质量耦合项。忽略该质量耦合项, Biot 理论的运动方程为

$$\left. \begin{aligned} N \nabla^2 u + \text{grad}[(A + N)e + Q\epsilon] &= \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t}(u - U) \\ \text{grad}[Qe + R\epsilon] &= \rho_2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - b \frac{\partial}{\partial t}(u - U) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $b = \mu_f n^2 / k_B$, k_B 不同于土力学中定义的渗透系数 k , $k_B = \mu_f \cdot k / \rho_f g$ 。式中正号为拉应力, 符号意义见符录。

不计土颗粒压缩时, Mei 和 Foda (1981)^[5] 证明了 Biot 理论和混合物理论是一致的, 即

$$\left. \begin{aligned} Q &= (1 - n) \cdot D_f \\ R &= n D_f \\ A &= \lambda + \frac{(1 - n)^2}{n} \cdot D_f \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

基本方程为

$$\left. \begin{aligned} N \nabla^2 u + (\lambda + N) \text{grad } e - (1 - n) \text{grad } P_f &= \rho_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t}(u - U) \\ - n \text{grad } P_f &= \rho_2 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - b \frac{\partial}{\partial t}(u - U) \\ (1 - n)e + n\epsilon &= -n \frac{P_f}{D_f} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

当然混合物理论中连续方程 (4-3) 是以变量的时间导数形式给出, 但对零初始问题及稳态问题并没有影响。

2 水相基本运动方程

式 (4-2) 经简化得

$$-\text{grad}P_f = \rho_f \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\mu_f n}{k_B} \frac{\partial}{\partial t}(u - U) \quad (5)$$

这就是广义的 Darcy Law。文献 [6] 建立的模型二的水相运动方程, 用本文的符号可表示为

$$-\text{grad}P_f = n\rho_f \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\mu_f n}{k_B} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(u - U) \quad (6)$$

在水相惯性项多乘了一个 n 。虽然这个模型和 Ishihara (1970)^[7] 建立的水相方程形式完全一致, 但由于符号定义不同而使内涵不一致。该方程是否真正满足该文假设的 Darcy 定律值得探讨。当孔隙内充满无粘滞性流体时, 即 $\mu_f = 0$ 的理想流体, 那么 Darcy 定律应该退化为理想流体的欧拉方程, 即

$$-\text{grad}P_f = \rho_f \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (7)$$

而方程 (6) 退化为

$$-\text{grad}P_f = n\rho_f \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (8)$$

3 Terzaghi 有效应力原理和 Biot 理论

Terzaghi 有效应力原理

$$\tau_{ij} = \tau'_{ij} - P_f \quad (9)$$

其中有效应力的本构关系

$$\tau'_{ij} = 2Ne_{ij} + \lambda e\delta_{ij} \quad (10)$$

Biot 定义

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma, \sigma = -nP_f \quad (11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2Ne_{ij} + \delta_{ij}(Ae + R\epsilon) \\ \sigma &= Qe + R\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Biot (1957, 1962) 指出式 (11), (12) 可等效地转化为下列形式的有效应力表达式

$$\tau_{ij} = \tau'^{*}_{ij} - P_f \quad (13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \tau'^{*}_{ij} - (1 - \alpha)P_f &= 2Ne_{ij} + \lambda^* e\delta_{ij} \\ \alpha &= 1 - D/D_s \\ \lambda^* &= A - Q^2/R \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

对于不计颗粒变形时, 即 $D/D_s \rightarrow 0$, 结合式 (3)

$$\alpha \rightarrow 1, \lambda^* \rightarrow \lambda, \tau'_{ij} \rightarrow \tau'_{ij}$$

因此作者认为, Terzaghi 有效应力原理式 (9) 是 Biot 定义的式 (13) 的极限情况。这种极限近似在土力学中已经足够精确 (Skempton, 1960)^[8]。由式 (13) 和式 (14-1) 可知, 忽略土颗粒变形时, 有效应力原理和 Biot 定义的一致性, 不仅表现在总应力 τ_{ij} 的一致, 而且表现在有效应力本构关系上的一致。

Mitchel (1976)^[9]指出, 有效应力 τ'_{ij} 仅是数学上推导出来的量, 即是可实测的总应力和孔压 (孔压为负) 之差。在单位面积上, 总应力均布, 孔隙水各点连通, 那么有效应力各点也应均布 (数学上的结果)。

在土力学中, 术语“有效应力”已与“粒间应力”等同起来。进一步考察粒间应力的定义发现, 土力学上的粒间应力指的是粒间作用力在总面积 (包括土和水) 上的平均值, 即也只是一个统计意义上单位总面积上的粒间作用力。

文献 [10] 认为 Biot 理论适合于图 1 或图 2 的模型。图 1 虚线代表有许多微裂隙, 图 2 表示骨架接触面积为 $(1-2n)$ (可能系 $1-n$ 之笔误, 笔者)。图 1 和图 2 直观解释为, σ_{ij} 是骨架上的应力, σ/n 是孔压。按照图示的应力分布特点, 总应力的表达式应该是 $\tau_{ij} = \sigma_{ij} \times (1-n) + \sigma/n \times n$, 即 $\tau_{ij} = (1-n) \sigma_{ij} + \sigma$ (15)

上式恰和式 (11) Biot 的定义相悖。

文献 [11] 精辟地指出, 尽管在多孔介质内固体表面对流动起边界作用, 但任何试图以精确的方式对其几何形状进行描述的想法都是徒劳的。人们往往用宏观意义上的连续介质力学分析多孔介质, 仅就单元总面积上各应力作为统计意义上的平均值来说, 图 3 的 Terzaghi 模型更好地反映了各应力在单位总面积上均布的特性。

4 饱和土中压缩波的定义及弥散问题

对方程 (1) 取散度

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(Pe + Q\epsilon) &= \rho_1 \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t}(e - \epsilon) \\ \nabla^2(Qe + R\epsilon) &= \rho_2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} - b \frac{\partial}{\partial t}(e - \epsilon) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

其中 $P = A + 2N$ 。式 (16) 可以写成下列形式:

$$\left. \begin{aligned} (P\nabla^2 - \rho_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - b \frac{\partial}{\partial t})e &= (-Q\nabla^2 - b \frac{\partial}{\partial t})\epsilon \\ (Q\nabla^2 + b \frac{\partial}{\partial t})e &= (-R\nabla^2 + \rho_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t})\epsilon \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

把 (17-2) 中的 ϵ 代入 (17-1) 得

$$[\beta_1 \nabla^4 - (\beta_2 \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \nabla^2 + (\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} + b\rho) \frac{\partial^3}{\partial t^3}]e = 0 \quad (18)$$

其中 $\beta_1 = PR - Q^2$, $\beta_2 = (P + R + 2Q) \cdot b$, $\alpha_1 = P\rho_2 + R\rho_1$, $\rho_0 = \rho_1 \cdot \rho_2$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ 。

把式 (17-1) 中的 e 代入式 (17-2) 得到关于 ϵ 的同样的微分方程。形式 $f = \bar{f}e^{i\omega t}$ 表

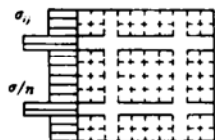


图 1

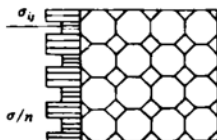


图 2

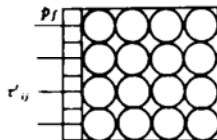


图 3

示稳态代入式 (17-2), (18) 得

$$\left. \begin{aligned} (Q \nabla^2 + b \omega i) \bar{e} &= (-R \nabla^2 - \rho_2 \omega^2 + b \omega i) \bar{\epsilon} \\ \left[\nabla^4 - \frac{\beta_2 \omega i - \alpha_1 \omega^2}{\beta_1} \nabla^2 + \frac{\rho_0 \omega i + \rho b}{\beta_1} (\omega i)^3 \right] \bar{e} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式 (19-2) 可以分解为 $(\nabla^2 - \delta_1^2)(\nabla^2 - \delta_2^2) \bar{e} = 0$, 故有

$$\bar{e} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \quad (20)$$

其中 $\nabla^2 \bar{e}_1 = \delta_1^2 \bar{e}_1$, $\nabla^2 \bar{e}_2 = \delta_2^2 \bar{e}_2$ 。同理有

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 \quad (21)$$

其中 $\nabla^2 \bar{\epsilon}_1 = \delta_1^2 \bar{\epsilon}_1$, $\nabla^2 \bar{\epsilon}_2 = \delta_2^2 \bar{\epsilon}_2$ 。

这说明: 第一 P 波不仅在流体中传播 (ϵ_1), 而且也在骨架中传播 (e_1); 第二 P 波不仅在骨架中传播 (e_2); 而且也在流体中传播 (ϵ_2)。文献 [12] [13] [14] 将第一 P 波定义为流体波, 第二 P 波定义为骨架波, 与本文所述有很大差别。且这样的定义导致了第二 P 波弥散曲线与经典理论有异, 如图 4^[14] 所示。根据 Biot 理论, 低频时第二 P 波不传播, 但仍有 P 波以第一 P 波速度在水和骨架中传播, 并没有文献 [13] 所述的问题。本文避免了势函数引入而引起的问题。

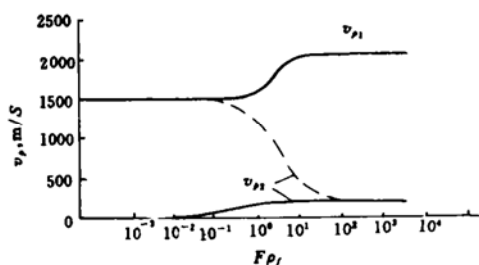


图 4

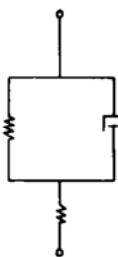


图 5

5 饱和土的粘弹性模型

饱和土的粘弹性特性研究由来已久 (Biot, 1962^[4]; Wijesinghe et al, 1970^[15]; Ishihara, 1970^[7])。Simon et al (1984)^[16]简要地提及了多孔介质和粘弹性介质有相似的瞬态响应, 笔者 (1994)^[17]曾论述饱和土可用粘弹性模型来计算稳态响应。Ishihara (1970) 提出的是一个三元件模型 (图 5)。Bardet (1992)^[18]提出了更有吸引力的二元件模型 (图 6)。Bardet 的基本假设是: 第二 P 波传播速度慢, 衰减快, 故它对动力响应的贡献可以忽

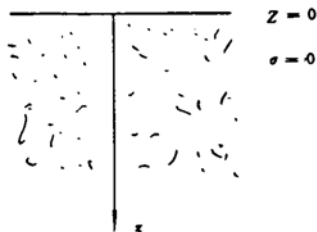


图 6

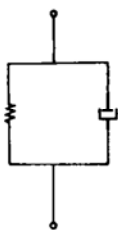


图 7

略。笔者认为这一基本假设似乎存在着缺陷。由式 (19-2) 得

$$\left. \begin{matrix} \delta_1^2 \\ \delta_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (22)$$

其中

$B = -\frac{\beta_2 \omega i - \alpha_1 \omega^2}{\beta_1}$, $C = \frac{\rho_0 \omega i + \rho b}{\beta_1} \cdot (\omega i)^3$ 。对于一维问题 (图 7), 由式 (20) 和 (21) 得

$$\left. \begin{matrix} \bar{e} = A_1 \exp(-\delta_1 z) + A_2 \exp(-\delta_2 z) \\ \bar{\epsilon} = B_1 \exp(-\delta_1 z) + B_2 \exp(-\delta_2 z) \end{matrix} \right\} \quad (23)$$

将 $\bar{e}$, $\bar{\epsilon}$ 代入 (19-1) 得

$$\left. \begin{matrix} B_j = F_j \cdot A_j \\ F_j = \frac{b \omega i + Q \delta_j^2}{-\rho_2 \omega^2 + b \omega i - R \delta_j^2} \end{matrix} \right\} \quad j = 1, 2 \quad (24)$$

由边界条件 $\bar{\sigma} = 0$ 得

$$Q \bar{e} + R \bar{\epsilon} = 0 \quad (25)$$

由 $\bar{e}$, $\bar{\epsilon}$ 代入得

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{Q + R F_1}{Q + R F_2} \quad (26)$$

一般土工试验和地震频域在 0~100Hz。笔者计算这个范围内的 A_2/A_1 是为了表明第一 P 波、第二 P 波在表面位移、体变作的相对贡献, 这是由于 $\bar{e}_0 = A_1 + A_2$ 。如果按 Bardet^[18] 的假设 A_2/A_1 应为零。

笔者计算了一孔隙率 $n = 0.45$, 骨架体变模量 $D = 6\text{MPa}$, 土粒比重 $G_s = 2.65$, 水的体变模量 $D_f = 2.13 \times 10^3\text{MPa}$ 。频率 0~100Hz 内变化, 渗透系数 $10^{-3} \sim 10^{-9}\text{m/s}$ 之间变化。结果如表 1。

计算表明, 对于低频 ($<1\text{Hz}$), 或者低渗透系数 ($<10^{-7}\text{m/s}$), $A_2/A_1 = -1.0$ 。这说明在透水边界第一 P 波和第二 P 波作用大小相等, 且为反相。而不象 Bardet 描述的那样可以忽略第二 P 波的作用。当然可以预见, 在远离边界层, 由于第二 P 波的高衰减性, 其作用很快减小; 但对于透水边界上的计算, 其作用不容忽视。这也可以作为 bardet 表面算例数值不稳定的一个原因。

总之, 对于透水边界的动力计算, 二元件模型存在较大缺陷, 用 C. C. Mei^[5] 等的边界层模型更为合理, 且简单可行。当然, 其它粘弹性模型也值得进一步研究以便应用。

表 1

A_2/A_1 $k \text{ (m/s)}$ 频率 (Hz)	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}
0.01	(-1.00, 0.01)	(-1.00, 0.00)	(-1.00, 0.00)	(-1.00, 0.00)
0.1	(-1.00, 0.01)	(-1.00, 0.00)	(-1.00, 0.00)	(-1.00, 0.00)
1	(-1.00, 0.01)	(-1.00, 0.01)	(-1.00, 0.00)	(-1.00, 0.00)
10	(-0.98, 10.74)	(-1.00, 0.01)	(-1.00, 0.00)	(-1.00, 0.00)
30	(-0.83, 32.23)	(-1.00, 0.03)	(-1.00, 0.00)	(-1.00, 0.00)
50	(-0.45, 53.72)	(-1.00, 0.53)	(-1.00, 0.00)	(-1.00, 0.00)
70	(0.08, 75.20)	(-1.00, 0.75)	(-1.00, 0.00)	(-1.00, 0.00)
90	(0.80, 96.67)	(-1.00, 0.97)	(-1.00, 0.01)	(-1.00, 0.00)
100	(1.22, 107.41)	(-1.00, 1.07)	(-1.00, 0.01)	(-1.00, 0.00)

6 结 论

- (1) Biot 理论和混合物理论是一致的，水相运动方程必须符合广义 Darcy 定律。
- (2) 忽略土颗粒压缩时，Biot 理论和 Terzaghi 有效应力理论是一致的，这不仅表现在总应力上的一致，而且表现在本构关系意义上的一致。
- (3) 把第一、二 P 波定义为流体中传播的波和骨架中传播的波缺乏理论依据。低频时第二 P 波不传播，但水和骨架仍以第一 P 波传播。
- (4) 透水边界内饱和土的动力响应可按 Bardet 的二元件模型计算，但边界上的响应以 C. C. Mei 边界层模型更为可行。透水边界上第二 P 波的作用不容忽视。

附 录

- N, A, Q, R 为 Biot 理论的四个弹性常数。

u, U 为骨架和水的位移矢量。

$e = \text{div} u, \epsilon = \text{div} U, n$ 为孔隙率。

μ_f, k_B, k 分别为土中水的动粘滞系数，Biot 定义的渗透系数，土力学中的渗透系数。

ρ_s, ρ_f 分别为土颗粒和水的密度。
- $\rho_1 = (1 - n) \rho_s, \rho_2 = n \rho_f, \rho = \rho_1 + \rho_2$

P_f 为孔隙水压力， D_f 为水的体变模量

D, D_s 分别为土骨架、土颗粒的体变模量。

τ_{ij}, τ'_{ij} 分别为总应力和有效应力。

σ_{ij}, σ 分别为 Biot 定义的单位面积土体上作用于固相和水相上的力。

λ 为土骨架的拉梅常数

参 考 文 献

1 Biot M A. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid (I , II). J Acoust Soc Am, 1956, 28 (2): 168~191

2 Biot M A, Willis D G. The Elastic Coefficient of the Theory of Consolidation. J of App Mechanics, 1957,

- (24): 594~601.
- 3 Vardoulakis, Beskoes D E. Dynamic Behaviour of Nearly Saturated Porous Media. *Mechanics of Materials*, 1986 (5): 87~108.
 - 4 Biot M A. Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media. *J Appl mechanics*, 1962, 33 (4): 1482~1497.
 - 5 Mei C C, Foda M A. Wave-Induced Responses in a Fluid Filled Poro-Elastic Solid with a Free Space. *Geophysical J R Astron Soc*, 1981, 66, 597~631.
 - 6 吴世明, 陈龙珠. 饱和土中弹性波的传播速度. *应用数学和力学*. 1989, 10 (7): 605~611.
 - 7 Ishihara. Approximate Forms of Wave Equations for Water-Saturated Porous materials and Related Dynamic Moduli. *Soils and Foundations*, 1970, 10, 4, 10-37.
 - 8 Skempton. Effective Stress in Soils. *Concrete and Rock, Pore Pressure and Suction in Soils*, 1960, 4-16.
 - 9 Mitchel, Fundamentals of Soil Behavior, 1976, John Wiley &. Inc. U. S. A.
 - 10 Men Fu-Lu. On Wave Propagation in Fluid Saturated Porous Media, *Soil Dynamics & Earthquake Engineering Conference*, 1982. 225~238.
 - 11 Bear J. 多孔介质流体动力学. 李竞生等译. 北京: 建筑工业出版社, 1983.
 - 12 Allen. Fluid Wave Propagation in Saturated and Nearly Saturated Sands, *ASCE*, 1980, 106 (GT3).
 - 13 陈龙珠. 饱和土中波的传播速度及其应用 [博士学位论文], 浙江大学, 1987.
 - 14 陈龙珠等. 关于饱和多孔介质的传播特性. *岩土力学与工程论文集*. 北京: 中国铁道出版社, 1993.
 - 15 Wijesinghe et al. On the Dynamic Behaviour of Poroelastic Materials. *J of Acoustical Soc of Am*, 1979, 65 (1): 90~95
 - 16 Simon et al. An Analytical Solution for the Transient Responses of Saturated Porous Elastic Solids. *Int J Numer Ana Methods Geomechanics*, 1984, 8: 381~398.
 - 17 王立忠等. 饱和弹性半空间在低频谐波和集中力下的积分形式解, *水利学报* (已录用).
 - 18 Bardet J P. A Viscoelastic Model for the Dynamic Behavior of Saturated Poroelastic Soils. *Transactions of ASME, J of Appl Mechanics*, 1992, 59. 128~135.

Some Aspects on Wave Propagation in Saturated Soil

Wang Li-zhong

Wu Shi-ming

(Zhejiang University)

Abstract Based on the equivalence of Biot Equation and the mixture theory, this paper presents some new viewpoints about wave propagation in poroelastic soils, including the implication of Biot Equations; the formulation of extended Darcy Law; the definition of *P* wave and the deficiency of viscoelastic model for saturated soils.

Key words saturated soils, wave propagation, model.