

非线性自适应策略及其在 岩土工程中的应用^{*}

王建华

殷宗泽

(上海交通大学土建系, 200030)

(河海大学地质岩土系, 南京, 210024)

王卫中

(西南电力设计院岩土科, 成都, 610061)

文 摘 基于邓肯-张本构模型及 Zienkiewicz-Zhu 误差估计方法, 本文提出一种适应于土与结构物相互作用有限元分析的非线性自适应策略 (即在每一级荷载作用下找出最优化的网格, 以达到减少离散误差的目的)。研究表明, 本文提出的非线性自适应策略是有效的, 运用该策略后可使土与结构物相互作用的计算精度得到提高。

关键词 自适应策略, 网格生成, 相互作用分析。

1 引 言

提高非线性有限元计算精度, 是一个难度大的课题。影响非线性有限元计算精度的因素不仅涉及到本构模型的正确建立、相应的计算参数选取等复杂问题, 同时, 还涉及到网格的离散所带来的误差。人们已研究出提高非线性有限元的计算精度的各种有效方法, 例如, 建立更符合实际的本构方程, 反分析法确定相应的输入参数, 随机有限元, 模糊有限元等等, 并取得大批科研成果。本文的主要任务是以自适应方法探讨如何在非线性有限元计算中降低网格离散误差, 并提出相应的非线性自适应策略。

2 误差估计与线弹性自适应策略

2.1 Zienkiewicz-Zhu 误差估计方法^[1]

由有限元解出的近似位移 u_h 可求出近似应力 $\sigma_h = DSu_h$, 此时应力的局部误差: $e_\sigma = \sigma - \sigma_h$, 其中 D 为弹性矩阵, S 为应变矩阵, σ 为应力的精确解。用光滑应力 $\bar{\sigma}$ 替换 σ 可得下式:

$$e_\sigma = \bar{\sigma} - \sigma_h \approx \hat{e}_\sigma \quad (1)$$

式中 $\bar{\sigma} = N\hat{\sigma}$; N 为形函数; $\hat{\sigma}$ 为绕结点平均应力。单元的误差定义为:

$$\|\hat{e}_\sigma\|_i^2 = \int_{A_i} [(\sigma_x - N\hat{\sigma}_x)^2 + (\sigma_y - N\hat{\sigma}_y)^2] dA_i \quad (2)$$

* 国家自然科学基金、博士后基金、纪念尹珪若先生教育基金项目。

到稿日期: 1994-11-11。

式中 A_i 为第 i 个单元的面积。全局（整个计算区域）误差的定义为

$$\|e_\sigma\|^2 = \sum_{i=1}^{NE} \|\hat{e}_\sigma\|_i^2 \quad (3)$$

式中 NE 为单元总数。应力计算相对误差的定义为

$$\eta = [\|e_\sigma\|^2 / \|\sigma_h\|^2]^{1/2}$$

式中 $\|\sigma_h\|^2 = \int_{\Omega} [(N\sigma_x)^2 + (N\sigma_y)^2] d\Omega$ 。

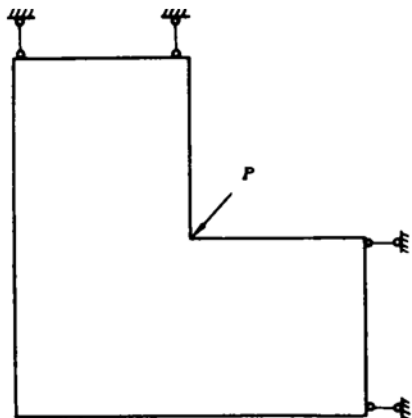


图1 计算简图

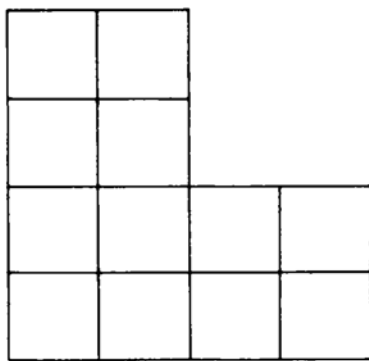
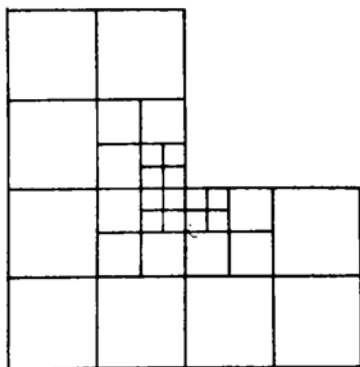
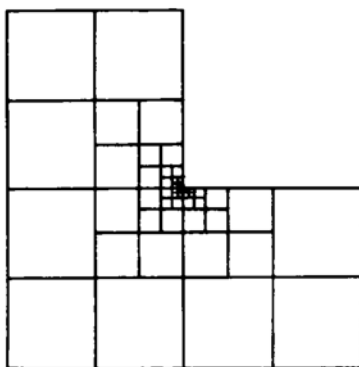


图2 初始网格



(a) 第3层



(b) 第7层

图3 网格图

2.2 线弹性自适应策略

自适应策略即为依据当前有限元应力计算结果给出具体的网格加密方法。Zienkiewicz 和 Zhu 在文献^[1]中提出适用于线弹性情况的自适应策略：若计算误差以 η 表示，给定的误差阈值用 $\eta_{\max}$ 表示，则计算退出的条件为： $\eta \leq \eta_{\max}$ 。假设误差在各个单元之间平均分布，则有

$$\|\hat{e}_\sigma\|_i \leq \eta_{\max} [\|\sigma_h\|^2 / NE]^{1/2} = e_{\max} \quad (5)$$

式中 $e_{\max}$ 为整个网格单元误差最大容许值, 定义: $\xi_i = \|\hat{e}_\sigma\| / e_{\max}$ 为加密准则, 若 $\xi_i > 1$ 该单元应加密。

线弹性自适应策略是非线性自适应策略的基础。我们以自适应方法中常用的例子, L 形平面问题对线弹性自适应策略的有效性进行说明。图 1 为其受力情况, 图 2 为初始网格 (手工输入)。经 7 次网格加密后, 误差达到要求, 图 3 为其网格图。 L 形平面问题在凹角处属于应力奇异区, 由图 3 可看出网格跟踪奇异区的效果是明显的。随着网格在应力奇异区逐渐加密, 该处的应力计算精度不断提高, 这一结果可通过观察图 4 (a) 和 (b) 得到。为考察位移计算结果, 我们绘制了图 5, 该图是第 7 层整个网格的变形图。图中的三角形单元是处理不协调点时出现的。由上述计算结果可知, Zienkiewicz 和 Zhu 所提出的误差估计方法及自适应策略对线弹性问题是有效的。

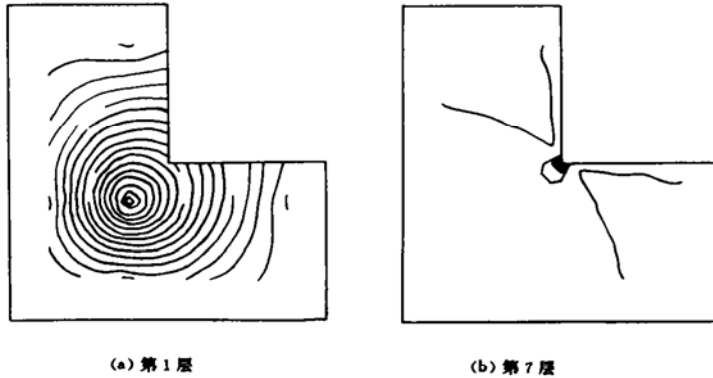


图 4 主应力等值线

3 非线性自适应策略及其实现

3.1 非线性自适应策略

对于均质材料, 线弹性自适应策略依据在误差能量密度最大区域加密网格的准则, 进行自适应网格加密。大量的数值计算结果表明这一网格加密准则对均质材料是有效的, 可使计算精度大幅度提高。对于土与结构相互作用问题, 由于结构物与土的强度相差很大, 土的变形远大于结构物的变形, 导致在土与结构物的接触面处应力有较大的跳跃, 并使结构物上的单元误差能量较大。按线弹性自适应策略, 势必在结构物上不断加密网格。研究结果表明这种网格加密方式对于提高土与结构相互作用分析的计算精度效果不明显, 其原因在于土的强度远低于结构的强度, 当荷载不断增加时, 土将先于结构物出现屈服。从工程观点看, 应提高屈服区的计算精度, 亦即在屈服区内进行网格加密方能提高土与

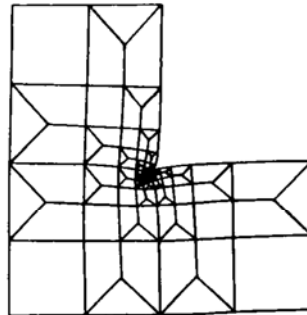


图 5 第七层网格变形图

结构相互作用分析的计算精度。此外,在工程计算中人们往往希望对某些关键区域提高计算精度,而对其它不重要的区域计算精度要求不高。用线弹性自适应策略亦难于达到此目的。因此,对于岩土工程有限元分析,应研究相应的非线性自适应策略,以达到提高计算精度的目的。

对大量的工程计算而言,提高屈服区的计算精度是人们非常关心的问题。按摩尔-库仑强度理论,土体的屈服是由于剪应力达到了土体的极限抗剪强度而引起的。欲提高屈服区的计算精度,必须在剪应力密度较大的区域进行网格加密。针对土与结构相互作用分析问题,文中提出分区加密的自适应策略。

在整个非线性分析过程中,设 η 为计算误差,误差阈值用 η_1 表示,预先给定的退化界限值用 η_2 表示 (η_2 是为判断网格退化而设定的。在某级荷载作用下,为达到预先给定的精度要求,一般而言,网格中的单元数较多。新的荷载增量若直接作用在该网格上将造成计算上的浪费。故本文在每一级荷载作用结束后进行网格退化以达到节省计算工作量的目的),则在每一级荷载作用下计算退出的条件为 $\eta \leq \eta_1$,假设误差在各个单元之间平均分布,则有

$$\|\hat{e}_\sigma\|_i \leq \eta_1 (\|\sigma_h\|^2 / NE)^{1/2} = e_{\max} \quad (6)$$

式中 NE 为某层网格的单元数; $e_{\max}$ 为单元误差最大容许值。设在整个计算区域有 N 个待加密的特殊区域,相应地有 N 个加密指示值 $\xi_j, j=1, 2, \dots, N$ 。定义加密准则如下:

$\|\hat{e}_\sigma\|_i > \xi_i e_{\max}, i=1, 2, \dots, N$ 。用该式对每个单元进行判断,若满足,该单元应加密,否则不加密。在每一级荷载结束后,用下式判断是否需退化网格: $\eta \geq \eta_2$,若成立,进行网格退化,在退化后的网格上施加新的一级荷载增量,否则,网格不退化。

3.2 程序实现

程序实现涉及两项主要内容:第一,是网格生成算法,其中包括网格加密与网格退化算法,有关网格生成算法可参见文献[2];第二,是应力与位移解的处理,其内容包括在各级荷载下初始应力及累积位移的确定。

我们的目标是找出某级荷载下的最优网格剖分以减少离散误差。由于在该级荷载作用下,求解的是一个线弹性问题,其力学性质(弹性模量与泊松比)不随网格的加密而变化,亦即单元的初始应力不因网格的加密而变化。为实现这一想法,我们采取了下述方法。在进行网格加密之前,将退化后的网格中的单元应力状态保留下来,网格加密后新增单元的初始应力直接继承其母单元的应力状态。这一过程直到网格加密达到要求为止。网格加密结束后求出的应力作为下级荷载的初始应力。对于位移我们采取类似的做法。将前一级荷载下的累积位移保留下来,新增结点的累积位移的确定利用老结点相应的值进行插值。网格不断加密,位移不断调整,至网格加密结束后求出的位移与前级累积位移叠加得总位移。程序过程如下:

```

输入基本数据;
对荷载进行循环
保留前级荷载的应力与位移解;
{对网格加密层数循环
    {处理不协调点;形成单刚、总刚;直接法求解;位移累加;应力累加;将网格恢复成四边形;求单元应力误差;网格加密;输出计算结果。}
    网格退化; } 结束。

```

4 算 例

为说明自适应方法在土与结构相互作用分析中的应用，现举两个算例。第一，是板桩受竖向荷载作用；第二是条形基础。结构的材料为砼，作线弹性处理，土为均质且服从邓肯-张本构模型。

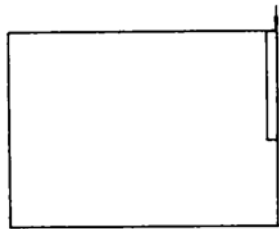


图 6 板桩计算简图

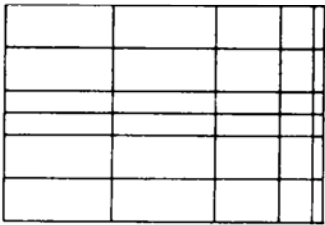
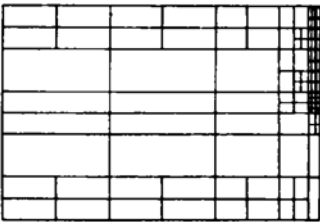


图 7 初始网格

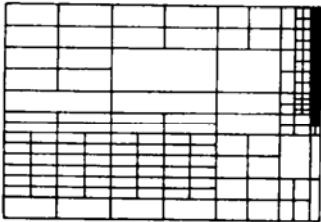
4.1 板 桩

材料参数，砼 $\gamma = 24\text{kN/m}^3$ ， $\varphi = 65^\circ$ ， $c = 1000\text{kPa}$ ， $E_h = 3.0 \times 10^7\text{kPa}$ ， $\nu_h = 0.35$ ；土 $\gamma = 18\text{kN/m}^3$ ， $\varphi = 12.5^\circ$ ， $c = 20\text{kPa}$ ， $R_f = 0.8$ ， $K = 200$ ， $n = 0.7$ ， $G = 0.35$ ， $F = 0$ ， $D = 0$ ， $K_{ur} = 600$ 。计算简图见图 6，图 7 为其初始网格。

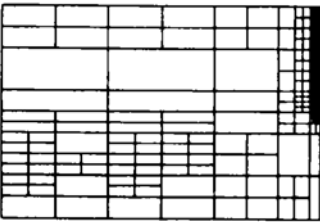
(1) 线弹性自适应策略



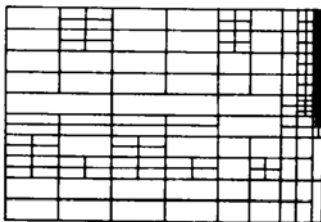
(a)2 级荷载



(b)3 级荷载



(c)4 级荷载



(d)5 级荷载

图 8 各级荷载下最后一层网格

图 8 (a) (b) (c) (d) 分别为第 2~5 级荷载下的最后一层网格。从图中可看出，网格

最密的区域集中在砵板桩上，对土与结构相互作用问题，稍后可以看到这种网格加密对提高计算精度的效果不理想。从图中还可看到，随着荷载不断增加，板桩中单元越来越密，这表明线弹性自适应策略在这种情况下不适用。网格退化的目的是减少各级荷载下的单元数，从该图所示结果可知，网格退化在线弹性自适应策略中起不到减少单元数的作用。

(2) 非线性自适应策略

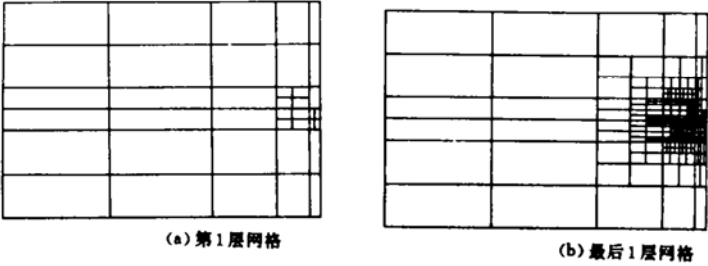


图 9 第 2 级荷载网格图

对板桩受竖向荷载作用，可对桩尖附近的单元进行加密。观察在各级荷载下的网格加密结果。图 9 (a) (b) 分别为第 2 级荷载作用下的第 1 层和最后一层网格，图 9 (b) 为第 2 级荷载下的优化网格，由于增加荷载会使应力状态发生变化，若第 3 级荷载从图 9 (b) 所示网格开始施加，将造成计算量的浪费。解决这一问题的方法是从图 9 (b) 开始退化网格。图 10 为网格退化的结果，第 3 级荷载将从图 10 开始施加。图 11 为在第 3 级荷载下的优化网格，将图 11 与图 9 (b) 进行比较可看出，网格退化对减少单元数的效果是明显的。图 12 (a) (b) 分别为第 4 级与第 5 级荷载作用下的优化网格。与图 8 比较可见，随着荷载不断增加，文中提出的非线性自适应策略可显著减少计算工作量。在自适应方法中，人们关心的另一个问题是，网格不断加密其误差是否收敛？图 13 为第 2 级荷载作用下，随着自由度的增加误差的变化情况。应力计算结果的相对误差稳定下降。

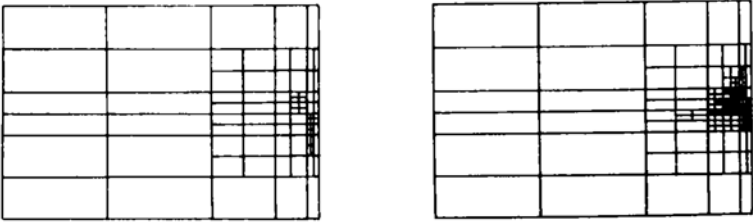


图 10 网格退化

图 11 第 3 级荷载下的优化网格

为比较网格加密对位移计算精度的影响，我们考察以下三种情况：①不加密（初始网格）；②线弹性自适应加密（网格为图 8）；③对非线性自适应加密考虑加密指示值分别为 0.08, 0.05, 0.035。在各级荷载作用下桩顶位移计算结果见图 14。图中 5 条曲线依次对应上述五种情况。观察该图可得以下结论：加密网格可使位移精度提高；非线性加密位移精度

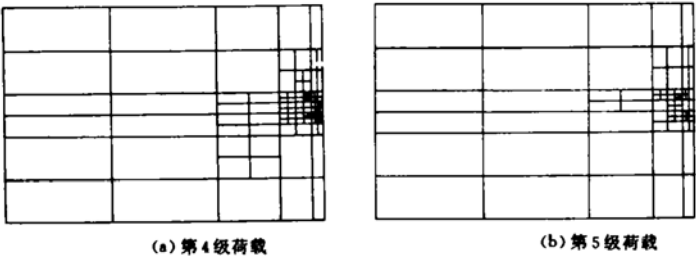


图 12 优化网格

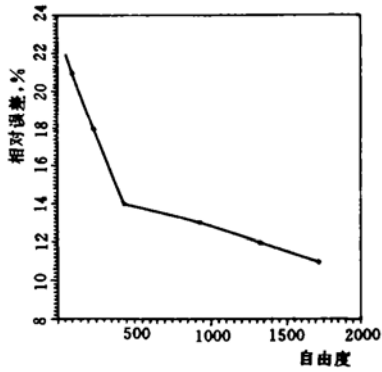


图 13 误差收敛图

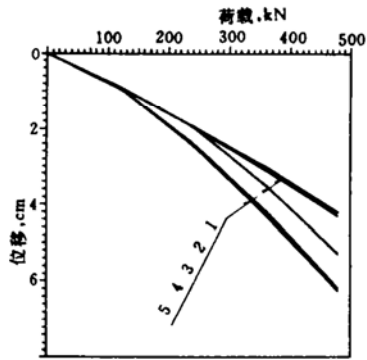


图 14 桩顶 $P-S$ 曲线计算图

比线性加密提高显著；加密指示值对位移精度有较大的影响；且存在一个较优的加密指示值，使得计算量较小而精度又满足要求，如本算例为 0.05（对应图中 4 号曲线）。表 1 为 3，4，5 号曲线各级荷载下的最后一层网格中的单元数。

4.2 条形基础

材料参数。砼，与板桩参数相同；土， $\gamma = 18\text{kN/m}^3$ ， $\varphi = 12.5^\circ$ ， $c = 15\text{kPa}$ ， $R_f = 0.85$ ， $K = 135$ ， $n = 0.41$ ， $G = 0.35$ ， $F = 0$ ， $D = 0$ ， $K_{ur} = 200$ 。图 15 (a) (b) 分别为受力图与初始网格。第 2 级荷载下，用线弹性自适应策略及非线性自适应策略加密网格，最后一层的网格图分别为图 16 (a) (b)。其中非线性加密区选在基础边缘附近。两种策略加密的结果与板桩类似，不再赘述。

对条形基础人们关心屈服区的开展，为阐明采用自适应方法可使屈服区的计算精度得到提高，我们绘制图 17。该图为第 2 级荷载下应力水平等值线的变化过程，图 17 (a) 为第 1 层，图 17 (b) 为最后一层。如图所示，随着网格加密，基础边缘的计算精度不断提高。

对在各级荷载作用下，对称轴顶点位移的计算精度分析，我们选 3 种网格加密方法进行比较。第 1 种是网格不加密；第 2 种情况是网格加密指示值取 0.1；第 3 种指示值取为 0.05。3 种情况下的位移计算结果见图 18。观察该图可得与图 14 类同的结论。

表 1 最后一层网格单元数

曲线号	第 1 级	第 3 级	第 4 级	第 5 级
3	117	87	54	42
4	315	168	78	48
5	633	210	114	75

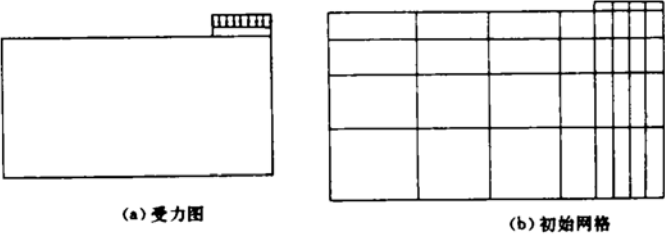


图 15 条形基础计算简图及初始网格

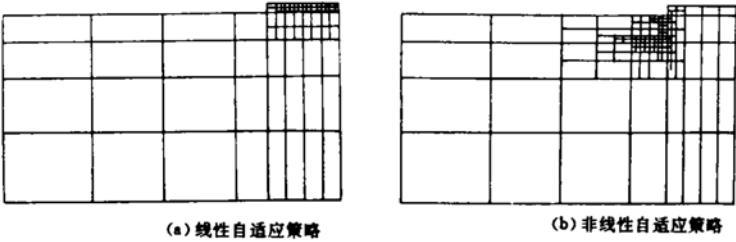


图 16 两种自适应加密结果

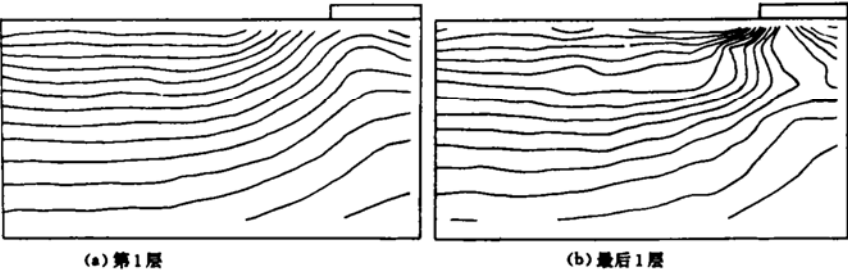


图 17 应力水平等值线变化

5 结 语

有限元法归根到底是一个泛函极值问题。若人为地任意划分网格，则只能在既定的离散系统下变动场函数在各点上的值，使其能量泛函达到极值。自适应方法不仅使场函数的值可变，而且使结点坐标及结点自由度数在一定范围内可变，从而更精确地求得极值。

本文从非线性自适应策略的提出到自适应方法的具体应用，阐述自适应方法在土与结构相互作用分析中的有效性及应用潜力。研究结果表明：文中提出的自适应策略对土与结构相互作用有限元分析是有效的；与线弹性自适应策略相比，采用文中提出的自适应策略不仅可使计算精度

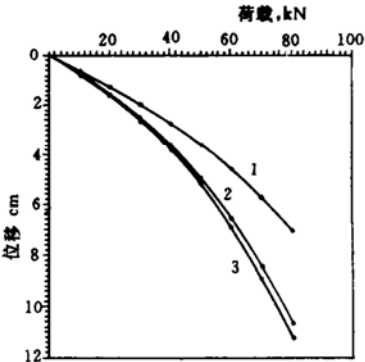


图 18 $P \sim S$ 曲线计算结果

大幅度提高, 而且计算工作量显著下降; 存在一个优化的网格加密指示值, 使用该值不仅可大量节省计算工作量, 而且计算精度令人满意; 在非线性自适应分析过程中, 网格退化是寻找优化网格的关键。

自适应分析方法在岩土工程领域具有广阔的应用前景。需要研究的问题不少, 如针对土的复杂性提出适用的误差估计方法及自适应策略; 研究出荷载时间离散的自适应策略等。

参 考 文 献

- 1 Zienkiewicz O C, Zhu J Z. A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis. *Int J Numer Methods Eng*, 1989 **24**. 337~357.
- 2 Devloo P, Oden J T, Stroouboulis T. Implementation of an Adaptive Refinement Technique for the SUPG Algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987, **61**. 339~358.

Nonlinear Adaptive Strategy and Its Application to Geotechnical Engineering

Wang Jian-hua

(Shanghai Jiaotong University)

Yin Zong-ze

(He Hai University, Nanjing)

Wang Wei-zhong

(South West Electronic Power Design Institute, Chengdu)

Abstract Based on the Duncan-Chang's constitutive model and Zienkiewicz-Zhu's error estimation, a nonlinear adaptive strategy (i. e., in order to reduce discretional error, an optimal mesh will be find out under each incremental load.) suitable for the FEM analysis of interaction between soil and structure is presented in this paper. Numerical tests performed with interaction problems have shown that, this nonlinear adaptive strategy is efficient and can be used to improve the accuracy of interaction analysis between soil and structure.

Key words adaptive strategy, mesh generation, interaction analysis.