

岩土工程弹塑性物性辨识 问题数值求解格式

沈新普 岑章志 徐秉业

(清华大学工程力学系, 北京, 100084)

文摘 本文提出了求解复杂结构弹塑性物性辨识问题的正则化最小二乘迭代反演算法。给出了差分近似导数的灵敏度计算格式。为克服不适定性带来的困难, 并保证解的稳定性和合理性, 提出了相应的数值处理方法。

关键词 物性辨识, 最小二乘法, 正则化, 灵敏度。

1 引言

反问题是近十几年来计算力学研究的重要方向之一。构造的内部缺陷、深层地质构造及岩性分布等无法现场观察和实际测量的事物, 都需要借助于反分析方法进行研究。近十多年来, 作为反问题研究的一个分支——岩土工程物性辨识问题, 受到了许多岩石力学与工程研究工作者的重视。

对于岩土工程中的弹塑性材料参数位移反分析, 由于弹塑性状态下很难找出位移与材料参数之间的解析函数表达式, 一般要采用数值算法并结合最优化理论来迭代求解。冯紫良等^[1]讨论了用可变容差法对地下洞室进行弹塑性位移反分析反演地应力系数及结构材料参数的可行性, 认为用优化方法进行弹性模量 E 及侧压力系数的反分析是可行的, 可以得到唯一解; 而对抗剪强度 c 及内摩擦角 φ 的反演计算则具有明显的多值性, 不收敛。另外, 孙钧^[2]、Maniatty^[3]等也对位移反分析的有效算法及工程应用做了研究。刘维宁^[4]从一般信息论的角度研究了有关逆问题的信息理论问题。虽然有了以上诸多研究, 但仍有许多基本问题没有解决, 还没有一个适用性强的好的算法。因为一个好的迭代算法至少应该具有如下两个优点: ①迭代次数少, 收敛速度快; ②解是稳定的、唯一的, 算法具有较好的抗噪音能力。

本文根据系统辨识的原理, 提出了求解弹塑性位移反分析问题的正则化最小二乘法。算法中用差分近似导数计算灵敏度系数, 使该方法能适用于任何形式的位移-材料参数函数关系。为了能获得唯一的合理解, 算法中还引入了某些参数的取值范围, 将工程经验引入到算法中来。文中通过算例研究了正则化因子对反演迭代结果的影响。最后将算法用于多参数弹塑性位移反分析的实例中, 获得了较好的结果。

2 迭代求解弹塑性位移反分析问题的正则化最小二乘法

设 X^r 为第 r 次迭代所产生的材料参数近似解; Y 为灵敏度系数, 表示材料参数值改变一

个单位量时,所引起的测点位置上的位移变化量; $\underline{u}^{*r}$ 为第 r 次迭代时,由 $\underline{X}^r$ 正解所得测点位置上的位移值。将 $\underline{u}^{*r}$ 在 $\underline{X}^r$ 邻域展开成级数形式并略去二阶以上的项,得:

$$\begin{aligned}\underline{u}^{*r} &= \underline{u}^{*r-1} + \left(\frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \underline{X}}\right)(\underline{X}^r - \underline{X}^{r-1}) \\ &= \underline{u}^{*r-1} + \underline{Y}(\underline{X}^r - \underline{X}^{r-1})\end{aligned}\quad (1)$$

由最小二乘法的基本原理,建立目标函数

$$T = (\underline{u}^{*r} - \bar{\underline{u}})^T(\underline{u}^{*r} - \bar{\underline{u}}) \quad (2)$$

式中 $\bar{\underline{u}}$ 为实测位移值。

位移反分析问题的求解就是要寻找合适的 $\underline{X}^r$ 使得目标函数满足

$$T = T_{\min} \quad (3)$$

由目标函数的极小化条件

$$\frac{\partial T}{\partial \underline{X}^r} = 0 \quad (4)$$

$$\text{得} \quad \underline{Y}^T \underline{Y}(\underline{X}^r - \underline{X}^{r-1}) + \underline{Y}^T(\underline{u}^{*r-1} - \bar{\underline{u}}) = 0 \quad (5)$$

$$\text{解得} \quad \underline{X}^r = \underline{X}^{r-1} + (\underline{Y}^T \underline{Y})^{-1} \underline{Y}^T(\bar{\underline{u}} - \underline{u}^{*r-1}) \quad (6)$$

即为所求的材料参数近似值。

由于灵敏度系数矩阵 $\underline{Y}$ 的性态不够好,常常使得 $(\underline{Y}^T \underline{Y})$ 是病态的。从而使式(6)求逆困难。造成 $\underline{X}^r$ 的解极不稳定。这表明了问题的不适定性。

数学物理问题的不适定性在文献[5]中是这样定义的:根据空间 U 的原始资料 u 确定空间 F 的解 Z 的适定条件是:①对所有元素 $u \in U$ 均存在空间 F 的解 Z ;②解是被唯一确定的;③问题的解在空间 (F, U) 上是稳定的。

大量研究表明,弹塑性位移反分析问题是不适定的。其不适定性首先表现在式(6)中系数矩阵有时是病态的,解是不稳定的。为了解决这一困难,本文采用了正则化方法。

对原问题建立正则化目标函数

$$T = (\underline{u}^{*r} - \bar{\underline{u}})^T(\underline{u}^{*r} - \bar{\underline{u}}) + (\underline{X}^r - \underline{X}^{r-1})^T \underline{R}(\underline{X}^r - \underline{X}^{r-1}) \quad (7)$$

式中 $\underline{R}$ 为正则矩阵,其各元素的值随问题的性质而定。当非线性程度较高时,其元素值较大;当问题的非线性程度较低时,相应元素取值较小。 $\underline{R}$ 为正定对角矩阵。

由极小化条件 $\frac{\partial T}{\partial \underline{X}^r} = 0$ 得

$$(\underline{Y}^T \underline{Y} + \underline{R})(\underline{X}^r - \underline{X}^{r-1}) = \underline{Y}^T(\bar{\underline{u}} - \underline{u}^{*r-1}) \quad (8)$$

$$\text{解得} \quad \underline{X}^r = \underline{X}^{r-1} + (\underline{Y}^T \underline{Y} + \underline{R})^{-1} \underline{Y}^T(\bar{\underline{u}} - \underline{u}^{*r-1}) \quad (9)$$

由于预先给定的 $\underline{R}$ 是正定矩阵,从而使得求逆易于进行,即使 $(\underline{Y}^T \underline{Y})$ 病态,也能得到 $\underline{X}^r$ 的稳定解。

弹塑性位移反分析的不适定性还表现在解是不唯一的。由于观测量与待求参数之间的关

系是高度非线性的非凸函数, 所以对应一组观测值, 可能有多组解存在。数学上已经证明, 最小二乘法所得到的解是局部极小点, 而不是全局最小点。数值算例表明, 如果没有适当的限制, 当所取未知量初值不合适时, 迭代计算所得的收敛解有时与实际情况相去甚远, 超出物理允许范围。为此要引入某种定量限制以缩小解域。在实际的岩土工程位移反分析中, 第一, 可以通过地质勘探、取样试验等方式获取有关材料性能的原始资料, 限制解的范围; 第二, 可以通过工程类比法预估解的存在域; 第三, 由于材料参数中的抗剪强度 c 及内摩擦角 φ 值主要用于塑性计算, 当单元处于弹性状态时, 结构对 c , φ 变化的灵敏度为零, 故必须对可能的塑性区有大致地了解, 以使计算情况与实际发生的塑性区不致有太大的出入, 并确定出 c , φ 值的上下界限。如果 c , φ 值界限过大, 一旦 c , φ 值在迭代过程中波动过大, 使得相应单元进入弹性状态, 则由于灵敏度系数相应位置上的元素为零, 致使迭代结果收敛不到正确的 c , φ 值上来。对于岩体结构, 一般地说变形值较大的地方发生塑性变形的可能性较大。在迭代过程中一旦发生该处单元处于弹性状态的情形, 就应该检查 c , φ 值的取值范围是否合适。

另外, 由于测量误差及计算误差等随机误差的影响, 使得解有时会偏离真值较远。为了消除这一不利影响, 就需要尽可能多地布置测点。当实测点的个数较多时, 能在很大程度上消除随机误差的影响。

3 灵敏度系数矩阵的计算格式

设有 M 个观测量, 待求参数为 N 个, 则最小二乘法灵敏度系数矩阵为

$$Y = \frac{\partial \underline{u}}{\partial \underline{X}} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right] \quad (10)$$

式中元素 y_{ij} 表示第 j 个未知参数 X_j 的变化引起的第 i 个观测量 u_i 的变化。当观测量(位移) u_i 与未知参数 X_j 之间存在解析函数关系时, 可以解析求得 y_{ij} 的值。对于弹塑性位移反分析问题, 除非是少数典型结构的变形问题, 一般地说, 由于剪切强度极限 c 等参数与位移 $\underline{u}$ 之间没有解析函数关系, 用解析法难以求出灵敏度系数的值。

本文用差分近似导数来计算灵敏度系数矩阵各元素的值, 这样求得的灵敏度系数为

$$y_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\Delta u_i(\Delta X_j)}{\Delta X_j} \quad (11)$$

式中 ΔX_j 表示未知量 X_j 的小变化。用 δ 表示一个小的正数则 $\Delta X_j = \delta \cdot X_j$; $\Delta u_i(\Delta X_j)$ 表示用数值方法得到的、相应于 ΔX_j 的第 i 个观测量的变化值。 $\Delta u_i(\Delta X_j)$ 的计算通过两次正演所得到的位移值的差求得:

$$\Delta u_i(\Delta X_j) = u_i(X_j + \Delta X_j) - u_i(X_j) \quad (12)$$

这样, 设有 N 个待求参数, 则形成一次灵敏度系数阵需要进行 $N+1$ 次正演计算。当观测量个数 M 多于未知量个数 N 时, 系数阵一般为列满秩的, 可以得到唯一解。

用差分近似计算偏导数所需注意的是, 差分步长的选择影响灵敏度计算的精度。差分步长太小, 弹塑性正演计算所产生的误差有时会造成灵敏度计算失灵, 迭代不收敛; 差分步长太大, 则所求得的导数值不是那个点上的导数值, 将造成迭代结果收敛过慢, 或收敛不到正确的点上。因此, 最佳差分步长的选取也是一个建立在经验基础上的优化问题。最佳差分步

长的值应该是既能使灵敏度系数的值不被噪音即各种误差淹没, 又能较正确地反映出该点的目标函数下降方向。

4 正则化最小二乘法求解弹塑性位移反分析问题的数值迭代格式

综上所述, 正则化最小二乘迭代反演计算步骤如下:

- 给出未知量的初值 $\underline{X}_0$ 及上下界限 $\underline{X}_U$ 和 $\underline{X}_L$;
- 解正问题得 $\underline{u}_0$;
- 沿各个分量方向给 $\underline{X}_0$ 小变化 ΔX_j , 计算 $\underline{X}_0$ 处的灵敏度系数矩阵 $\underline{Y}_0$;
- 将待求量的初值 $\underline{X}_0$ 用给定的下限值去除, 使待求量无量纲化;
- 按式 (9) 求使目标函数极小的未知向量的近似解, 之后恢复量纲;
- 用给定的界限值检查所得解是否越界, 若越界, 则该分量取邻近的界限值;
- 检查收敛性。若

$$\left. \begin{aligned} \frac{\|\underline{X}^r - \underline{X}^{r-1}\|_2}{\|\underline{X}^{r-1}\|_2} &\leq \epsilon_1 \\ \frac{T^r}{T_0} &\leq \epsilon_2, T_0 = \|\underline{u}\|_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

条件满足则认为收敛, 停止迭代; 若不满足则将本次迭代结果作为初值返回步 b) 迭代, 直至收敛或达极限迭代次数时停止。

5 算 例

将上述算法编制成 FORTRAN 程序, 并与弹塑性有限元程序相结合。为了验证算法的功能和程序的可靠性以及算法中各常数取值对收敛的影响, 在微机上对下述算例进行了计算。

[例 1] 如图 1 所示, 弹脆塑性材料的悬臂梁受纯弯, 梁的材料构成及几何参数如图 1 所示。采用 Tresca 屈服准则, 取泊松比 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, 反演目标参数为残余强度系数 β_1 及 β_2 。差分步长取 $\delta = 0.02$, 正则阵对角元素取为 $R_{11} = R_{22} = 0.75 \times 10^{-5}$, 反演计算收敛容许误差 $\epsilon_1 = 0.05\%$, $\epsilon_2 = 0.2 \times 10^{-5}\%$, 计算过程中的收敛情况列于表 1 中。表 1 中的计算结果表明反演过程中参数的波动幅度较小, 解的精度较高。

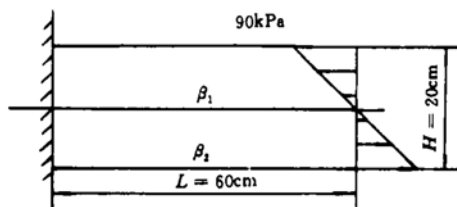


图 1 悬臂梁受纯弯

[例 2] 如图 2 所示, 半无限岩石地基受局部载荷作用和重力作用, 已知材料参数 $\nu = 0.15$, 密度 $\rho = 2.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, 抗剪强度 $c = 6 \text{ MPa}$, 内摩擦角 $\varphi = 45^\circ$, 取岩石为弹脆塑性材料。采用 Mohr-Coulomb 屈服准则, 反演目标参数为残余强度系数 β 和弹性模量 E , 差分步长取 $\delta = 0.09$, 正则阵对角元素 $R_{11} = R_{22} = 0.75 \times 10^{-6}$ 。反演收敛容许误差为 $\epsilon_1 = 0.02\%$, $\epsilon_2 = 0.2 \times 10^{-4}\%$, 表 2 给出了反演计算收敛情况。从表 2 可以看出, 反演计算一

致收敛，解的精度较高。

表 1 反演计算中未知参数的收敛情况 [例 1]

收敛情况	初值	上限	下限	迭代次数 r					真值
				1	5	10	15	20	
$X_1 (\beta_1)$	0.9	0.99	0.2	0.8816	0.8818	0.8864	0.8898	0.8982	0.89
$X_2 (\beta_2)$	0.9	0.99	0.2	0.8788	0.8683	0.8635	0.8601	0.8503	0.85
$\frac{\ \underline{X}^r - \underline{X}^{r-1} \ }{\ \underline{X}^{r-1} \ } \times 100\%$				2.206	0.134	0.095	0.067	0.046	
$T^r/T_0 \times 100\%$				0.82×10^{-2}	0.14×10^{-4}	0.71×10^{-5}	0.39×10^{-5}	0.18×10^{-5}	

[例 3] 本例为抚顺西露天矿边坡治理工程的一部分。要求根据地表点的实测位移来反演边坡构造中某些岩体的材料参数。反演目标参数取为岩体 1 及岩体 2 的残余强度系数 β_1 及 β_2 和岩体 2 的弹性模量 E_2 。取差分步长 $\delta = 0.1$ ，3 个参数对应的正则阵对角元素的值分别为 0.04，0.04，0.02；收敛容许误差为 $\epsilon_1 = 2\%$ ， $\epsilon_2 = 6\%$ 。表 3 给出了迭代过程中各参数的变化情况，从表中可以看出，迭代过程中目标函数的收敛是稳定的，各参数的波动幅度也比较小。

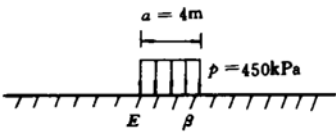


图 2 半无限岩石地基受均布载荷

表 2 反演计算中未知参数的收敛情况 [例 2]

收敛情况	初值	上限	下限	迭代次数 r					真值
				1	5	10	15	20	
$X_1 (\beta_1)$	0.8	0.99	0.2	0.7405	0.6776	0.6293	0.6124	0.6055	0.6
$X_2 (E) \text{ (GPa)}$	0.9	0.99	0.2	0.7603	0.7964	0.7966	0.7984	0.7992	0.8
$\frac{\ \underline{X}^r - \underline{X}^{r-1} \ }{\ \underline{X}^{r-1} \ } \times 100\%$				15.53	0.193	0.079	0.033	0.019	
$T^r/T_0 \times 100\%$				1.8	0.28×10^{-2}	0.49×10^{-3}	0.86×10^{-4}	0.15×10^{-4}	

表 3 反演迭代过程中各参数的收敛情况 [例 3]

收敛情况		初值	下限	上限	迭代次数 r							
					1	2	3	4	5	6	7	8
目标参数 $\underline{X}$	β_1	0.5	0.15	0.9	0.5108	0.5143	0.5107	0.5143	0.5180	0.5046	0.5042	0.5103
	β_2	0.5	0.15	0.9	0.4796	0.4280	0.3511	0.2958	0.2960	0.2678	0.2619	0.2597
	$E \text{ (GPa)}$	0.6	0.3	1.5	0.7160	0.7527	0.8998	0.7143	0.9075	0.8118	0.8323	0.8861
$\frac{\ \underline{X}^r - \underline{X}^{r-1} \ }{\ \underline{X}^{r-1} \ } \times 100\%$					27.67	1.737	19.54	20.62	27.06	10.54	2.519	1.01
目标函数 $T \text{ (mm)}$					0.1256	0.1162	0.1013	0.0606	0.0456	0.0304	0.0125	0.0123
$T^r/T_0 \times 100\%$					53.65	49.45	43.11	25.79	19.40	12.94	5.32	5.23

6 结 论

(1) 本文给出了完整的迭代求解弹塑性位移反分析问题的正则化最小二乘法的格式, 并与用于岩土工程应力-位移分析的弹脆塑性软化有限元程序相结合, 对包括弹性模量 E 和残余强度系数 β 值在内的各种力学性能参数进行了反演, 获得了稳定的收敛解, 而这在采用直接优化反演算法的某些文献^[1]中被认为是几乎不可能的。这表明本文方法稳定性好, 抗干扰(各种误差)能力较强, 算法的功能超过了以往被广泛采用的单纯形法等其他用于弹塑性位移反分析的优化算法。本研究还通过算例研究了正则矩阵对角元素值和差分步长对迭代收敛的影响, 获得了初步的对上述参数优化取值的经验。

(2) 用差分近似导数的方法计算灵敏度系数矩阵, 克服了由于位移与材料参数之间函数关系过于复杂而带来的困难。又由于在计算中未引入任何对问题类属的限制, 因此该算法格式适用于求解各种类型的反分析问题。

参 考 文 献

- 1 冯紫良, 杨志法. 关于弹塑性位移反分析可行性的研究. 见: 第四届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集. 泰安: 1991: 226~232.
- 2 孙钧, 黄伟. 岩石力学弹塑性反演问题的优化方法, 岩石力学与工程学报, 1992, 11 (2): 221~229.
- 3 Maniatty A, Zabaraz N. Methods for Solving Inverse Elasto-viscoplastic Problems. J Engng Mech, 1989, 115 (12): 2216~2231.
- 4 刘维宁. 岩土工程反分析方法的信息论研究. 岩石力学与工程学报, 1993, 12 (2): 193~205.
- 5 吉洪诺夫 A N, 阿尔先宁 V Y 著. 不适定问题的解法. 王秉忱译. 北京: 地质出版社, 1979. 6.

Numerical Scheme for Solving Elasto-plastic Identification Problems of Material Properties in Geotechnical Engineering

Shen Xin - pu Cen Zhang - zhi Xu Bing - ye

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing)

Abstract The regularized least square iterative algorithm has been presented for the estimation of material parameters of complicated structures. The scheme for calculation of sensitivity coefficients has been given. The algorithm has overcome the difficulties caused by the ill-posedness of inverse problems. Several techniques have been used to ensure rationality of the solution and the stability of the convergence. The numerical examples show that the algorithm presented here is practical and efficient.

Key words identification of material properties, least squares methods, regularization, sensitivity.