

连续临界状态模型在轴对称问题中的应用

郑榕明 徐 钺
(香港理工学院土木工程系) (香港大学土木工程系)

文 摘 本文在麻省理工学院(MIT)应力法则基础上考虑了中间应力的影响,采用剑桥应力法则,提出了一种连续临界状态塑性理论,从而改进了Naylor的计算模型。并建议用一种简单而直接的方法来确定椭圆形边界的共轭点和限制点(cut off point)。该模型比修正的剑桥粘土模型具有很多优点,可用于很多土力学问题。

1. 前 言

众所周知,土的应力应变是很复杂的^[1,2],其强度(破坏面)取决于材料的强度参数,如 c , ϕ 等,以及应力状态方程。应力状态方程可表达为

$$F = F_1(I_1) + F_2(J_2, J_3, c, \phi) \quad (1)$$

函数 F_1 表示加载面或破坏面上的静水压力效应。对于传统的Tresca和von Mises准则, $F_1(I_1) = 0$ 。在Drucker-Prager和莫尔-库仑准则中, $F_1(I_1)$ 是线性函数。当应力值在很大的范围内变化时,可观察到在破坏面上破坏面是曲线而非直线的。因此在比较大的应力范围内, F_1 应采用二阶或更高阶的函数形式。因而也需要更多的材料参数来描述这一函数。对于大多数工程问题, F_1 取线性形式是足够精确的。

土的本构关系取决于应力路径和加载路径,它们不能用开环的加载面来描述。在静水压力状态条件下,要计算土的屈服条件,目前通常采用的比较现实的方法是在破坏面上加一个屈服帽。Roscoe提出的剑桥粘土模型,以及后来由Burland提出的修正剑桥粘土模型都是著名的临界状态^[3,4],其中 F_1 采用了线性函数的形式。在许多土力学问题中,这些模型具有参数少的优点,且可从传统的土力学实验中得到这些参数。因而已被广泛采用,并且提出了一些修正模型。在此之后的一些更先进的土力学模型都或多或少地受到临界状态模型的影响。临界状态模型之所以被广泛接受的原因是这个模型提供了土的弹塑性行为的很明确的力学解释。它比采用曲线拟合方法的超弹性和准弹性模型以及一些采用没有力学解释的加载函数和帽函数的弹塑性模型具有很明显的优越性。

在传统的弹塑性模型(包括临界状态模型)中,弹性与塑性交界处本构关系有一明显的变化。而这种突变在大多数土中并没有发现。比较现实的土力学模型应该是当接近屈服状态时刚度逐渐减小^[1]。在传统的塑性理论中,只有三种不同的状态:弹性、加载和中性加载。因此传统理论在处理土的行为时有点不够。通常传统弹塑性模型低估了塑性应变。在原始的临

界状态模型中, 稍固结土的不排水三轴试验表明, 在达到状态边界面之前存在一个垂直应力路径。实际上这条路径在接近状态边界面时已呈曲线^[1]。为克服这一限制, 可采用三重屈服面或更复杂的模型, 但这些模型使数值计算和材料参数确定显得非常麻烦。另一种方法就是采用边界面(bounding surface)模型^[5]。边界面模型仅需较少的材料参数, 在数值计算中比多屈服面模型简单。

为保留临界状态清晰的物理图形, 且克服上面提到的不足, Naylor提出了一种连续塑性修正临界状态模型^[6]。这一模型可看作Dafalias和Herrmann边界面模型的特殊形式。原始的边界面模型一般适用于土的反复加载情况。连续塑性模型的数值计算很容易, 而且比起原来的临界状态模型仅多一个材料参数。然而这种模型也有不足之处:

(1) 本模型采用了麻省理工学院应力规则, 即 $s = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)$, $t = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$, 没有考虑中间应力的影响。

(2) 在共轭点计算上, 修正的剑桥粘土椭圆状态边界面转化成圆形状态边界面, 并需要在共轭点的干、湿两边对应力计算附加一些假定。

(3) 在不规则六面体加载面上有一些角点需进行特殊处理。

笔者把Naylor模型推广到剑桥应力规则中, 直接从椭圆形状边界面上计算共轭点的应力, 从而克服了Naylor模型的不足。

2. 土的本构模型的描述

在所建议的土的本构模型中, 仍用连续椭圆状态边界的修正剑桥粘土模型为基本构架。这一假定适用于正常固结和轻微固结粘土, 但不适用超固结粘土。对超固结粘土可用Hvorslev面更好地描述。因连续椭圆修正法易实现, 已被Zienkiewicz和Worth采用。虽然椭圆面与Hvorslev面有一些差别, 但用这一模型计算超固结粘土一般来说也不会太差^[3,7,8]。

所建议的模型结合了弹簧和临界状态模型。弹簧由土的有效应力状态 p 决定, 可用体积模量和剪切模量描述如下:

$$\left. \begin{aligned} K &= (1+e)p/k \\ G &= 1.5K(1-2\nu)/(1+\nu) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

在临界状态模型中, 由于弹性剪应变假定为零, 剪切模量可认为是一个任意大的数值^[3]。临界状态分量可由状态边界面上的共轭点 Q 的应力状态决定, Q 点的应力状态如图1所示。两个分量的贡献系数 ω 是应力状态到参考点距离的函数。Naylor采用指数型式的表达式如下:

$$\omega = \rho^n$$

其中 $\rho = CP/CQ$

(3)

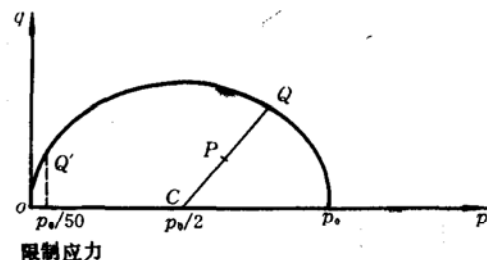


图1 共轭点和限制应力的确定

卸载情况, $\omega = 0$; 再加载情况, $\omega \neq 0$ 。当位于加载面的再加载(可认为是传统弹塑性模型中的弹性行为)时, 临界状态弹簧的塑性对塑性行为起作用。 n 值对这个模型影响很大, 如 n 值取得很高, 可使这一模型转化成传统的临界状态模型。

如果状态边界面从 $p=0$ 移位到 $p=p_0/2$ 时, 共轭点 Q 很容易直接求得。考察修正的剑桥粘土模型状态边界面方程,

$$F = (\lambda - k) \ln p \left(1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right) = \Gamma - \nu - k \ln p \quad (4)$$

如果把 q 轴从 $p=0$ 移动到 $p_0/2$, 则可由新应力状态 p_1 和 q_1 表达如下:

$$q_1^2 + M^2(p_1 + p_0/2)^2 = p_0 M^2(p_1 + p_0/2) \quad (5)$$

连接 $C(0, 0)$ 点及 $P(p', q')$ 点的直线方程可表达为

$$q_1 = p_1 q' / p' \quad (6)$$

联立求解式(5)、(6)可得

$$p_1^2 = \frac{M^2 p_0^2}{4 \left[\left(\frac{q'}{p'} \right)^2 + M^2 \right]} \quad (7)$$

当 p_1 确定后, $q_1 (=q)$ 由方程(5)确定。距离系数 ρ 由方程(3)决定, 应力值 σ_{ij} 由方程(8)外插计算而得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}^q &= \frac{\sigma_{ij}^p - \frac{p_0}{2}}{\rho} + \frac{p_0}{2} \\ \sigma_{ij}^q &= Q_{ij}^p / \rho \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由方程(8)计算出的应力可保证 p 及 q 等量修正, 因而可确保共轭要求。本文建议的方法不用作椭圆面向圆边界面的转换。如果共轭点的平均应力等于或接近零时, 此点的确定会有困难。Naylor建议 p 小于 $p_0/2$ 时采用旋转应力点 p 的方法。另外需补充一些假定。本文建议用限制方法代替应力旋转, 如图1所示。任何平均应力小于 $p_0/50$ (或其它小数值), 共轭点移动到 Q' 点, 修正后的正应力可任意设为

$$\sigma_{ii} = p_0/50 \quad (9)$$

对应的 q 值由状态边界方程确定,

$$q = 0.28 \frac{M p_0}{2} = \sqrt{3 J_2} = \sqrt{3(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)} \quad (10)$$

剪应力假定就是方程(10)中剪应力分量。虽然上面提到的方法是任意的, 但这种任意性的影响很小。因为当 p 接近零时的任何共轭点的应力状态对 $[D^{ep}]$ 的计算影响很小。文献[12]中的数值计算表明了这一点。应该指出的是如果分析不采用限制法或类似的限制法, 有可能会出现数值计算困难和不稳定问题。因为在迭代过程中, 上部土会出现弹性模量为零甚至为负的情况。为避免负数值计算困难, 对低压力约束情况, 临界状态模型应该要改进。值得注意的是由Britto和Gunn编辑的著名程序CRISP3似乎也存在此问题^[9], 并且不适用于荷载比较大的情况。

本文模型和临界状态模型的主要缺陷在于当偏应力平面上的加载面形状是圆形时(这也是原始临界状态模型的缺陷), 单值 M 也是很难决定的, 这是因为 M 与受压破坏、受拉破坏的 ϕ 值有关, 或者可用折中圆锥得到($M = 2 \sin \phi$)。为了克服这一缺陷, 我们用莫尔-库仑准则中的抗剪角 ϕ 来求参数 M 。如果 M 与受压或扩展破坏相匹配, 可采用下式求得 M :

$$\left. \begin{aligned} M &= 6 \sin \phi / (3 - \sin \phi) && (\text{受压破坏}) \\ M &= 6 \sin \phi / (3 + \sin \phi) && (\text{扩展破坏}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

对使用洛德角 θ 表示的一般应力状态, 莫尔-库仑关系可用Gudehes和Argyris建议的方法使之光滑连接^[9]。参数 M 由摩擦角和洛德角求得。

$$M = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi} \frac{2K}{[(1+K) - (1-K) \sin 3\theta]} \quad (12)$$

其中 $K = (3 - \sin \phi) / (3 + \sin \phi)$ 。若令 $\theta = 30^\circ$ 和 -30° ，方程(12)将变成方程(11)。最终加载面形状将会变成光滑的三角形，这与实际情况比较吻合。本文提出的由方程(1)~(12)定义的模型很容易由一般有限元方法实现。

在确定了共轭点之后，流动向量 $\{a\}$ 可由状态边界方程(4)求得。对这种连续塑性模型，其弹塑性矩阵 $[D^{ep}]$ 为

$$[D^{cp}] = (1 - \omega)[D^e] + \omega[D^{ep}] \quad (13)$$

其中 $[D^{ep}]$ 是修正的剑桥粘土模型的弹塑性矩阵。

以 $[D^{cp}]$ 代替 $[D^{ep}]$ 是因为临界状态弹簧和弹性弹簧存在耦合作用。方程(13)可简化成方程(14)的形式。

$$[D^{cp}] = [D^e] - \frac{\omega[D^e] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e]}{A + \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T [D^e] \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}} \quad (14)$$

参数 A 及流动向量 $\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}$ 的表达式如文献[10]所述。

应力增量由下式计算：

$$\{d\sigma\} = [D^{cp}] \{d\varepsilon\} \quad (15)$$

临界状态弹簧的屈服椭圆面之扩展速度取决于临界状态部分的应力增量，

$$\{d\sigma^{cs}\} = \omega[D^{cp}] \{d\varepsilon\} \quad (16)$$

如果应力状态处于加载面上， ω 为1，则应力增量计算类似于传统的弹塑性问题。如果应力处于加载面以内，并处于再加载状态，临界状态弹簧的加载面按方程(17)扩展。加载和再加载的硬化参数 p_0 可从屈服函数 F 的协调方程中求得。

$$dp_0 = \frac{-\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma^{cs}\}}{\frac{\lambda - k}{p_0}} \quad (17)$$

下节将用一个Eulerian类型的大变形轴对称问题说明本文提出的连续塑性模型的应用。笔者认为在岩土工程中研究大变形问题是必要的，因为土破坏时的应变通常是有限的而不是无限小的^[11-14]。事实上岩土工程中的大变形分析也越来越被人们所接受。大变形方程用大家熟知的Jaumann-Cauchy应力速率 $[\sigma']$ 和速度应变张量 $[D]$ 来表示，

$$[\sigma'] = [D^{ep}][D] \quad (18)$$

方程(18)可写成如下增量形式：

$$\{\Delta T\} = ([D^{ep}] - [\sigma_a]) \{\Delta E\} \quad (19)$$

其中 $\{\Delta T\} = \{\Delta T_{11}, \Delta T_{22}, \Delta T_{12}, \Delta T_{33}\}^T$; $\{\Delta E\} = \{\Delta E_{11}, \Delta E_{22}, 2\Delta E_{12}, \Delta E_{33}\}^T$;

$[E]$ 为Green应变; $\{T\}$ 为第二类Piola-kirchhoff应力。

轴对称问题的非对称应力张量 $[\sigma_a]$ 由下式计算：

$$[\sigma_a] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & -\sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{11} \\ -\sigma_{22} & \sigma_{22} & \sigma_{12} & -\sigma_{22} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{33} & -\sigma_{33} & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (20)$$

从方程(20)中可以看到, 当用关联流动法则计算 $[D^{ep}]$ 时可得到一个非对称的刚度方程。有限元平衡由式(21)给出。

$$([k] + [k_\sigma] + [k_N])\{\Delta u\}^e = \{\Delta p\}^e + \{\Delta q\}^e + \{\Delta b\}^e \quad (21)$$

其中 $[k] = \int [B_L]^T [D^{ep}] [B_L] dv$, 为小位移刚度矩阵;

$[k_\sigma] = \int ([G]^T [M] [G] - [B_L]^T [\sigma_d] [B_L]) dv$, 为初始应力刚度矩阵;

$[k_N]$ 为初始应变刚度矩阵;

$\{\Delta p\}^e$ 为增量集中荷载;

$\{\Delta q\}^e = \int [N]^T \Delta q da$, 为面荷载增量;

$\{\Delta b\}^e = \int [N]^T \Delta b dv$, 为体力增量;

$[D_a^{ep}] = [D^{ep}] - [\sigma_d]$;

$$[M] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}[I] & \sigma_{12}[I] & \sigma_{13}[I] \\ \sigma_{21}[I] & \sigma_{22}[I] & \sigma_{23}[I] \\ \sigma_{31}[I] & \sigma_{32}[I] & \sigma_{33}[I] \end{bmatrix}。$$

各种应变位移关系表达式可参考文献[14, 15]。

在解非线性非对称平衡方程(21)后, 必须计算相应于该位移的应力变化。应变增量可用变形梯度 $[F]$ 决定。

$$\{\Delta E\} = \frac{1}{2}([F]^T [F] - [I]) \quad (22)$$

其中 $F_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \quad (i, j=1, 2)。$

轴向应变由下式计算:

$$\Delta E_{33} = \frac{\Delta u_1}{X_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta u_1}{X_1} \right)^2 \quad (23)$$

应力增量可用下列关系求得:

$$\begin{aligned} \{\sigma'\} \Delta t &= [D^{ep}] \{\Delta E\} \\ \{\Delta \sigma\} &= [\sigma'] \Delta t + [W] [\sigma'] \Delta t - [\sigma'] [W] \Delta t \\ \{\sigma^{t+\Delta t}\} &= \{\sigma'\} + \{\Delta \sigma\} \end{aligned} \quad (24)$$

3. 大变形塑性模型的数值研究

在本节中, 用一数值范例来说明本文模型之应用。考虑一个典型大变形轴对称桩荷载问题, 如图2所示。大变形本构关系由方程(19)定义的Jaumann-Cauchy应力速率及应变速度张量来表示。所研究的桩尺寸为11m×22m, 有405个节点, 364个 Q_4 单元。

集中荷载以增量形式表示, 最后数值为1160kN。非线性迭代方法采用Newton-Raphson法, 收敛容差为1%的施加荷载。假定土是轻微超固结粘土, 土力学参数如下: $\lambda=0.15$, $k=0.05$, $\gamma=20\text{kN/m}^3$, $K_0=0.6$, $n=10$, $\Gamma=3.17$, $\phi=33^\circ$, $\nu=0.2$ 。

混凝土桩的杨氏模量及泊松比分别假定为20GPa及0.2。

桩顶的位移荷载曲线如图3所示。从图3可以看到位移荷载曲线与正常固结土中的桩承载试验相类似,即轻微超固结土没有明显的破坏点或峰值。正如BS8004(1986)地基规范^[6]条文

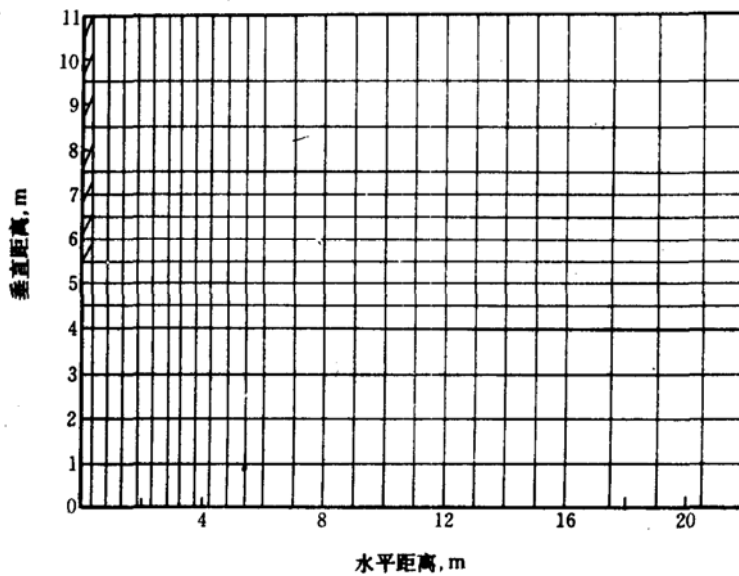


图2 轴对称桩荷载问题的有限元网格

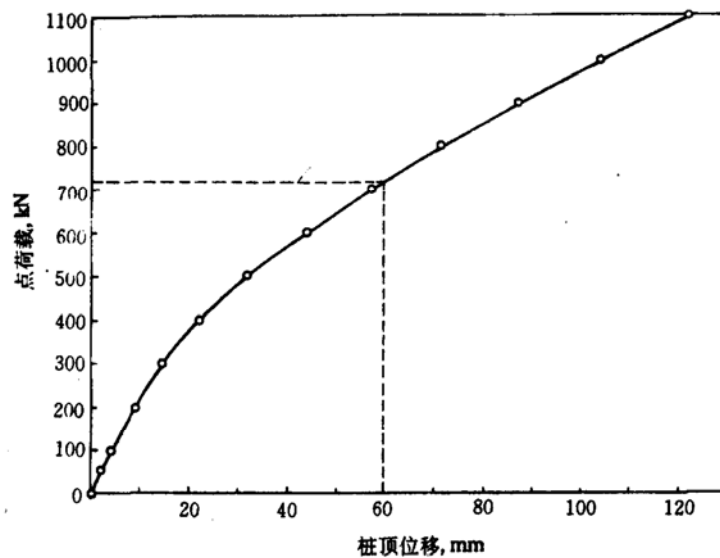


图3 桩的荷载与位移关系曲线

(直径=600mm)

7.5, 6.5所述,这类桩的极限承载力被定义为沉降量达到桩直径10%时的力。本例中桩的极限承载能力是720kN。数值模型的计算荷载超过极限状态,桩-土系统的位移为121.6mm。

对这样大的位移, 采用大变形模型是合适的。

4. 讨 论

本文建议的连续临界状态土力学模型比原始的修正剑桥粘土模型更具一般性和全面性。原模型的缺陷也可被克服。而且加载面的形态是光滑三角形, 即包括了洛德角的影响, 本模型比原临界状态和由Naylor建议的不规则莫尔-库仑加载面更具实用性。本文还用一实例验证了本模型在土力学问题中的应用。

参 考 文 献

1. Atkinson J H, Bransby P L. The Mechanics of Soils. McGraw-Hill, 1978.
2. Chen W F, Mizuno E. Nonlinear Analysis in Soil Mechanics. Elsevir Science Publishers, 1990.
3. Britto A M, Gunn M J. Critical State Soil Mechanics via Finite Elements, Ellis Horwood Limited, 1987.
4. Gens A, Potts D M. Critical State Models in Computational Geomechanics. Engineering Computation, 1988, 5, 178~197.
5. Dafalias Y F, Herrmann L R. Bounding Surface Formulation of Soil Plasticity. Soil-Mechanics-Transient and Cyclic Loads. John Wiley & Sons Limited, 1982; 253~282.
6. Naylor D J. A Continuous Plasticity Version of the Critical State Model. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1985, 21, 1187~1204.
7. Zienkiewicz O C, Naylor D J. The Adaptation of Critical State Soil Mechanics Theory for Use in Finite Elements. Proceedings of Roscoe Memorial Symposium Cambridge, 1972; 537~547.
8. Naylor D J, Pande G N. Finite Element in Geotechnical Engineering. Pineridge Press Limited. 1981.
9. Zienkiewicz O C, Taylor R L. The Finite Element Method, 2: Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-linearity.
10. 屈智炯. 土的塑性力学. 成都科技大学出版社, 1987.
11. Cheng Y M, Tsui Y. Limitations to the Large Strain Theory. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992, 33, (to be published).
12. Cheng Y M, Tsui Y. Investigation into the Deep Excavation Problem. Conference on Deep Foundation Practice, Oct, Singapore, 1990; 39~45.
13. Karshenas M, Ghaboussi J. Modelling and Finite Element Analysis of Soil Behaviour. Geotechnical Research Series, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, Illinois, 1979, (17).
14. Tsui Y, Cheng Y M. Some Interesting Results in Large Strain Studies Engineering Computations (to be published).
15. 蒋友谅. 非线性有限元法. 北京工业学院出版社, 1988.
16. BS 8004. British Standard Code of Practice for Foundations. British Standards Institution, 1986.

Application of the Continuous Critical State Model in Axisymmetric Problem

Cheng Y. M.

(Department of Civil and Structural Engineering, Hong Kong Polytechnic)

Tsui Y.

(Department of Civil and Structural Engineering, University of Hong Kong)

Abstract

The authors have proposed a continuous plasticity version of the critical state model which is an improvement of the soil model as proposed by Naylor. In the present model, the stresses to be used are based on the Cambridge stress convention which have considered the effects of the intermediate principal stress as compared with the original model which is based on the MIT stress convention. The authors have also proposed a simple and direct method for the determination of the conjugate point and the cut-off point from the ellipse shape state boundary surface. The proposed model has many advantages over the original modified Cam-Clay model and is suitable for use in many types of geotechnical problems.