

裂纹传递矩阵与缺陷桩的频率响应

郭 平 罗松南

(湖南大学工程力学系, 长沙, 410082)

提 要

本文通过引入裂纹传递矩阵, 将传递矩阵法用于计算缺陷桩的频率响应, 对具有颈缩、凸肚、裂纹等缺陷的试验桩进行了计算, 得到与实测数据基本吻合的结果, 为机械阻抗法等通过分析频响曲线对桩身质量进行评估的动测技术提供了理论基础。

一、引 言

采用机械阻抗法等桩顶激振的动测技术对桩身质量进行检验时, 一般是通过分析桩顶的速度或加速度频响曲线的峰值频率, 对桩身的完整性作出评估的^[1-3]。根据波动理论可以推出, 完整桩频响曲线的峰值频率是等间距的, 两相邻峰的频率之差

$$\Delta f = \frac{c'}{2l} \quad (1)$$

式中 c' 为纵波的相速度; l 为桩长。

根据这一公式, 通过测定 Δf , 可以计算出桩长(已知波速)或波速(已知桩长)。

当桩内存在颈缩或裂纹等缺陷时, 频响曲线峰值频率的分布在外观上一般没有明显的规律。比较流行的一种看法认为, 式(1)也可以用于缺陷桩, 因而试图从诸峰值频率的差值中挑选出“能反映真实情况的差频”, 用以确定缺陷的位置^[3,4]。实际上这种方法缺乏理论根据, 也未在试桩实践中得到证实, 仅在某些情况下, 如裂纹距桩顶较近, 给出了与实际情况相接近的结果。因此, 这种方法带有很大的局限性和人为性。

本文通过引入裂纹传递矩阵, 将传递矩阵法^[5]推广用于计算缺陷桩的频率响应, 能够依据缺陷的种类(颈缩、凸肚、裂纹)、大小和部位从理论上计算出桩两端的速度和加速度导纳曲线, 可以作为机械阻抗法的理论基础, 对其他动测技术也具有指导意义。

二、粘弹性杆内的稳态波场

采用泛函形式可以将粘弹性杆中的应力应变关系表示为^[6]

$$\sigma(x, t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{\partial \epsilon(x, \tau)}{\partial x} d\tau \quad (2)$$

式中 $E(t)$ 为松弛函数。

对于形式为 $\sigma(x, t) = \sigma(x)e^{-i\omega t}$, $\epsilon(x, t) = \epsilon(x)e^{-i\omega t}$ 的稳态场, 式(2)简化为

$$\sigma(x) = \bar{E}(\omega)\varepsilon(x), \quad \bar{E} = E_1 + iE_2 \quad (3)$$

式中 $\bar{E}$ 为复模量。

桩内的稳态场满足以下运动方程:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho\omega^2 u(x) = 0 \quad (4)$$

式中 ρ 为桩材料的密度; ω 为圆频率, u 为轴向位移。

在上式中引入式(3)和几何关系

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5)$$

得到用位移表示的运动方程(Holmhotz方程)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0, \quad c^2 = \frac{\bar{E}}{\rho} \quad (6)$$

式中 c 为复波速。方程的解给出粘弹性杆内的稳态波场。波的相速度为

$$c' = \frac{|c|^2}{\text{Re } c}$$

三、位移-轴力向量和波向量

为了便于引用界面连续条件, 以位移和轴力作为基本变量, 并定义位移-轴力向量

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} u \\ N \end{pmatrix} \quad (7)$$

式中 $N = \sigma A$, 为轴力; A 为杆的截面积。

由式(2)~(4)得出 $\mathbf{b}$ 满足以下方程:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial x} = \mathbf{A} \mathbf{b} \quad (8)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho A c^2} \\ -\rho A \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

其特征值为 $\pm i \frac{\omega}{c}$, 相应的特征向量矩阵 $\mathbf{D}$ 及其逆 $\mathbf{D}^{-1}$ 分别为

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i\omega\rho A c & i\omega\rho A c \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2\omega\rho A c} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2\omega\rho A c} \end{pmatrix} \quad (11)$$

引入下列变换

$$\mathbf{b}(x) = \mathbf{D} \mathbf{v}(x) \quad (12)$$

将其代入式(8), 使联立方程解耦, 得到以下解答

$$\mathbf{v}(x) = \begin{pmatrix} v_n(x) \\ v_p(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\omega}{c}(x-x_0)} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\omega}{c}(x-x_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n(x_0) \\ v_p(x_0) \end{pmatrix} \quad (13)$$

上式表明: $\mathbf{v}$ 的两个分量 v_p 和 v_n 分别表示在 x_0 和 x 之间, 沿 x 轴正向和负向传播的波动成分, 因此称 $\mathbf{v}$ 为波向量。式中的矩阵为传递矩阵, 记为 $\mathbf{Q}(x, x_0)$ 。于是在等截面的均质杆内, x_0 和 x 两点的波向量满足以下关系式

$$\mathbf{v}(x) = \mathbf{Q}(x, x_0) \mathbf{v}(x_0) \quad (14)$$

四、界面传递矩阵

图 1 是分段均质、等截面的杆, 在 x_i 处有一分界面, 在界面左侧和右侧的波向量分别为

$$\mathbf{v}(x_{i-}) = \begin{pmatrix} v_n(x_{i-}) \\ v_p(x_{i-}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(x_{i+}) = \begin{pmatrix} v_n(x_{i+}) \\ v_p(x_{i+}) \end{pmatrix}.$$

设界面两侧的位移和轴力连续, 由式 (12) 得出

$$\mathbf{b}(x_i) = \mathbf{D}_i \mathbf{v}(x_{i-}) = \mathbf{D}_{i+1} \mathbf{v}(x_{i+}) \quad (15)$$

式中 $\mathbf{D}_i$ 和 $\mathbf{D}_{i+1}$ 分别为第 i 和第 $i+1$ 段杆的 $\mathbf{D}$ 矩阵。

由上式可以得出界面两侧波向量的关系式

$$\mathbf{v}(x_{i-}) = \mathbf{Q}(x_{i-}, x_{i+}) \mathbf{v}(x_{i+}) \quad (16)$$

式中 $\mathbf{Q}(x_{i-}, x_{i+}) = \mathbf{D}_i^{-1} \mathbf{D}_{i+1}$, 称为界面传递矩阵。

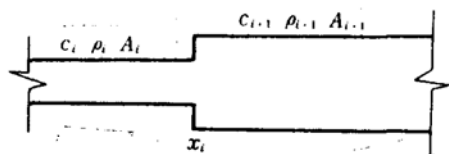


图 1

五、裂纹传递矩阵

图 2 的杆在 x_j 处有一裂纹, 以 A_r 表示裂纹面积, 以 A_t 表示未开裂部分面积, 则完好杆的截面积 $A = A_r + A_t$ 。当入射波与裂纹相遇时, 设其在裂纹面上形成全反射, 在未开裂部分形成全透射。

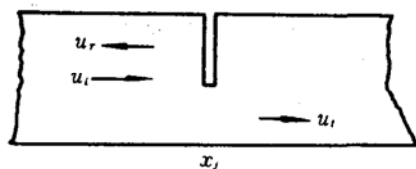


图 2

设一波自裂纹左侧入射, 以 u_i, u_r 和 u_t 分别表示入射、反射和透射波的位移。引入裂纹因子 $k = A_r/A$, ($0 \leq k \leq$

1)。根据反射波和透射波的能量密度^[7]之和等于入射波的能量密度, 可推导出

$$u_r = u_i \sqrt{k}, \quad u_t = u_i \sqrt{1-k} \quad (17)$$

注意到在裂纹两侧波向量的分量为: $v_p(x_{j-}) = u_i$, $v_n(x_{j-}) = u_r$, $v_p(x_{j+}) = u_t$, $v_n(x_{j+}) = 0$; 因此

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_t \end{pmatrix} = \mathbf{Q}(x_{j-}, x_{j+}) \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \end{pmatrix} \quad (18)$$

式中 $\mathbf{Q}$ 矩阵即为裂纹传递矩阵。

设 u'_i 是自裂纹右侧入射的位移场, 反射波和透射波的位移为

$$u'_r = u'_i \sqrt{k}, \quad u'_t = u'_i \sqrt{1-k} \quad (19)$$

在这种情况下, 裂纹两侧的波向量满足以下表达式

$$\begin{pmatrix} u'_t \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}(x_{j-}, x_{j+}) \begin{pmatrix} u'_i \\ u'_r \end{pmatrix} \quad (20)$$

利用式 (17)~(20) 可以求出裂纹传递矩阵

$$Q(x_{j-}, x_{j+}) = \begin{pmatrix} (1-2k)\beta & \beta\sqrt{k} \\ -\beta\sqrt{k} & \beta \end{pmatrix} \quad (21)$$

式中 $\beta = (1-k)^{-\frac{1}{2}}$ 。

六、缺陷桩的频率响应

图3为一缺陷桩、在桩顶 x_0 处设置激振源, 桩的另一端 x_n 与土(岩)体相连。利用传递矩阵可以求得桩两端波向量的关系式

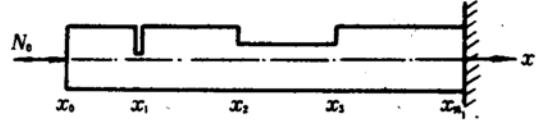


图3

$$\begin{aligned} v(x_0) &= Q(x_0, x_{1-})v(x_{1-}) \\ &= Q(x_0, x_{1-})Q(x_{1-}, x_{1+})v(x_{1+}) \\ &= Q(x_0, x_{1-})Q(x_{1-}, x_{1+})Q(x_{1+}, x_{2-})Q(x_{2-}, x_{2+}) \cdots Q(x_{n-}, x_{n+})v(x_{n+}) \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $Q(x_0, x_{1-})$, $Q(x_{1+}, x_{2-})$ 为均匀段内的传递矩阵; $Q(x_{2-}, x_{2+})$, $Q(x_{n-}, x_{n+})$ 为界面传递矩阵; $Q(x_{1-}, x_{1+})$ 为裂纹传递矩阵, 等等; $v(x_{n+})$ 为土(岩)体内的波向量。将各传递矩阵连乘, 得到

$$v(x_0) = Q(x_0, x_{n+})v(x_{n+}) \quad (23)$$

设桩顶激振力为 N_0 , 设下部土(岩)体为均质半无限体。根据辐射条件可知在 x_{n+} 处只存在正向波, 不存在负向波; 因此, 桩两端的波向量为

$$v(x_0) = D_1^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ N_0 \end{pmatrix}, \quad v(x_{n+}) = \begin{pmatrix} 0 \\ u_n \end{pmatrix} \quad (24)$$

式中 u_0 和 u_n 分别为桩顶和桩底的位移; N_0 为桩顶轴力。

把上式代入式(23), 以 W 表示 D_1 与 Q 之积, 得到

$$b(x_0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ N_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_n \end{pmatrix} \quad (25)$$

由以上方程解出

$$u_0 = \frac{N_0 W_{12}}{W_{22}}, \quad u_n = \frac{N_0}{W_{22}} \quad (26)$$

如桩底 x_n 为自由端, 则

$$b(x_n) = \begin{pmatrix} u_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

桩两端的位移-轴力向量满足以下关系式

$$b(x_0) = W' b(x_n) \quad (28)$$

$$\text{式中 } W' = D_1 Q(x_0, x_n) D_n^{-1} \quad (29)$$

由上式解出桩顶和桩底位移

$$u_0 = \frac{N_0 W'_{11}}{W'_{21}}, \quad u_n = \frac{N_0}{W'_{21}} \quad (30)$$

速度 v 和加速度 a 的计算公式为: $v = -i\omega u$, $a = \omega^2 u$ 。

七、阶梯杆的频率响应

图4是用同种弹性材料制成的阶梯杆。设两段的面积比 n 和长度差系数 m 为

$$n = \frac{A_2}{A_1}, \quad m = \frac{l}{l_1 - l_2} \quad (l = l_1 + l_2)$$

界面传递矩阵为

$$Q(x_{1-}, x_{1+}) = D_1^{-1} D_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

式中 $a = \frac{1}{2}(1+n)$, $b = \frac{1}{2}(1-n)$ 。

设 x_0 为激励端, x_2 为自由端, 两端之间的传递矩阵

$$Q(x_0, x_2) = \begin{pmatrix} e^{i\omega l_1/c} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega l_1/c} \end{pmatrix} Q(x_{1-}, x_{1+}) \begin{pmatrix} e^{i\omega l_2/c} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega l_2/c} \end{pmatrix}$$

用式(29)计算 W' , 令 $W'_{21}=0$, 即得到阶梯杆的频率方程

$$\sin\left(\frac{\pi f}{f_0}\right) = \frac{n-1}{n+1} \sin\left(\frac{\pi f}{mf_0}\right) \quad (31)$$

式中 f 为共振频率; $f_0 = \frac{c}{2l}$, 即长度为 l 的等截面杆的基频。

方程(31)可以通过作图求解: 分别作出式(31)左、右两边函数的图象, 两曲线的交点即为方程的根——共振频率。图5是 $n=2$, $m=2.5$ 时的图象, 图中前五阶共振频率为: $f_1=0.90f_0$, $f_2=2.06f_0$, $f_3=3.07f_0$, $f_4=3.89f_0$, $f_5=5.00f_0$ 。从图5不难看出, 阶梯杆共振频率的分布形式由式(31)右边的正弦函数决定, 它的幅值(与 n 有关)及周期(与 m 有关)对共振频率均有影响。从这种最简单的情况即可看到, 试图直接用共振频率的差值判断杆长和界面位置是难以实现的。

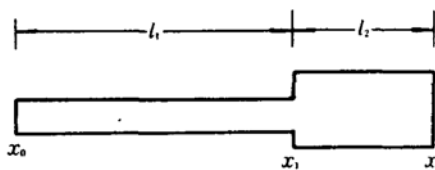


图4

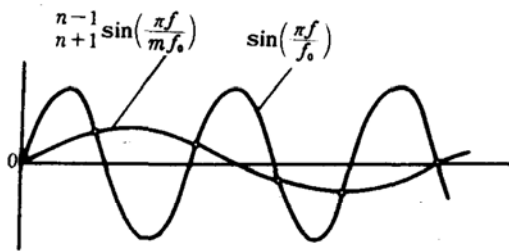


图5

八、数值计算实例

根据本文理论编制了程序, 对文献[2]、[3]中列举的试验桩进行了计算。试验桩长1.5m, 截面积为 $9 \times 9 \text{ cm}^2$, 混凝土的密度约为 2000 kg/m^3 , 有 $\phi 5 \text{ mm}$ 的配筋。桩埋置于砂槽之内, 桩底与土层紧密接触。实测桩内纵波的波速为 4350 m/s 。采用Kelvin粘弹模型描述桩侧表面与砂层作用所造成的耗散。复模量 $\bar{E} = E_0 - i\eta$, E_0 为混凝土的弹性模量, 通过数值计算模拟, 发现取粘性系数 $\xi = \frac{\eta}{E_0} = 10^{-6} \text{ s}$ 较为适宜。

文献[3]所列举的三根缺陷桩的参数如下:

1号桩 在0.95~1.05m处有一颈缩, 颈缩部分的面积为 $3 \times 9 \text{ cm}^2$ 。

2号桩 在0.95~1.05m处有一凸肚, 凸肚部分的面积为 $18 \times 9 \text{ cm}^2$ 。

3号桩 在0.5m处完全断裂, 但上下两段之间连有钢筋。计算模型设裂纹因子 $k=0.99$ 。

文献[3]用原点导纳法所测定的速度导纳的幅频曲线如图6~8中(b)图所示, (a)图

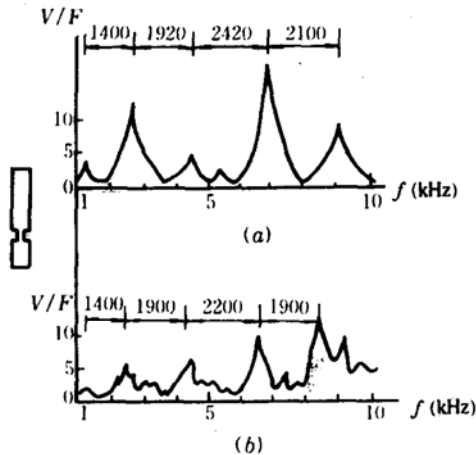


图6

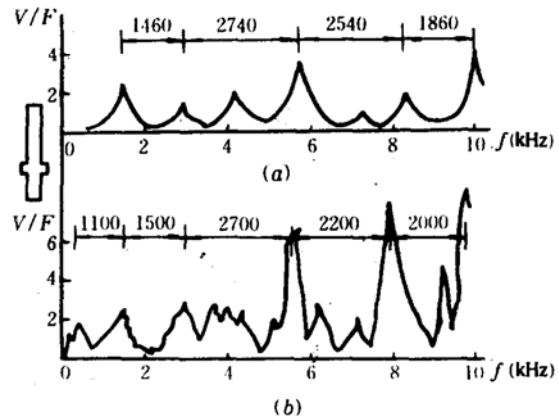


图7

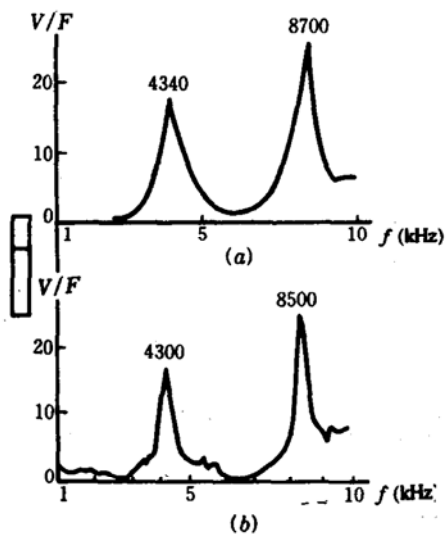


图8

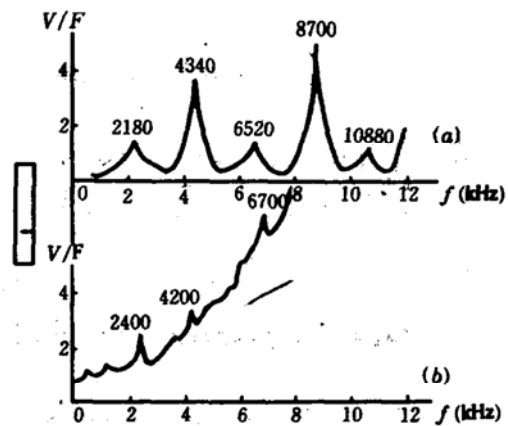


图9

文献[3]未给出半断裂桩的测试结果, 文献[2]中所列举的半断裂桩的参数如下: 4号桩在1m处有一裂纹, 裂纹系数 $k=0.6$ 。

图9中(b)图是用跨点导纳法所测定的4号桩的幅频曲线, (a)图为计算结果。

九、结 语

本文应用传递矩阵法计算缺陷桩的频率响应, 对文献[2]、[3]中所列举的试验桩实地进行了计算, 得到与实测数据大致吻合的结果。理论值与实测值之间的差异主要由以下原因造成:

1. 本文所采用的直杆内纵波的经典理论适用于细长杆, 而试验桩颈缩、凸肚段的长度与截面尺寸相近, 简化为一维杆系是一种近似处理。

2. 数值分析表明, 缺陷桩频响曲线的峰值和峰值频率不仅与缺陷的尺寸、位置有关, 也受桩土体系耗散机制的影响, 采用Kelvin模型只能近似描述桩与土体的作用。

3. 据文献[3]所述, 采用原点和跨点导纳两种方法所测得的峰值有很大差异, 峰值频率也略有不同。因此, 测试技术方面的影响因素也不容忽视。

4. 文献[3]对完整桩(对照桩)所测出的峰值频率不是严格等间距的, 有100Hz的偏差, 这表明在测试技术中或在桩土体系(砂槽装置)中尚存在不明影响因素。

本文对阶梯杆的图解法以及对缺陷桩的数值分析表明, 缺陷桩导纳曲线的峰值频率没有明显的分布规律, 用频率差直接判断缺陷位置缺乏理论根据。本文所提出的方法利用边界和界面的连续、间断等条件严格求解一维杆的振动问题, 为桩检测提供了理论基础。根据这种理论进一步开展试验研究, 可望形成一种实用的动测技术。

参 考 文 献

- [1] 徐攸在, 刘兴满主编. 桩的动测新技术. 北京: 中国建筑工业出版社, 1989: 200~236.
- [2] 朱之基, 朱光汉. 用稳态扫频激振法检验钻孔桩质量的实验室研究. 河南省交通厅公路局, 1982: 15~24.
- [3] 朱之基等. 用稳态正弦扫频激振法(机械阻抗法)检验钻孔灌注桩质量的实验室研究和现场应用. 湖南大学科研处, 1984: 11~14.
- [4] 潘时声. 振动法与传递函数法结合的试桩技术. 岩土工程学报, 1990, 12(6): 63~69.
- [5] Kennett, B L N. Seismic Wave Propagation in Stratified Media. Cambridge University Press, 1983: 99~110.
- [6] Christensen R M. Theory of Viscoelasticity. Academic Press, New York, 1982: 188~193.
- [7] 熊祝华, 郭平. 弹性动力学. 长沙: 湖南大学出版社, 1989: 39~42.

Wave Propagator across Cracks and Its Use in Calculating Frequency Response of Piles with Defects

Guo Ping Luo Song-nan

(Department of Engineering Mechanics, Hunan University, Changsha)

Abstract

Matrix of wave propagator across cracks inside piles is introduced, and applied to the frequency responses of piles with defects such as crack, hollow or swell segment. Numerical analysis is in agreement with experimental results. This theory presents a sound basis for the evaluation of the integrality of piles by impedance method and other dynamic testing technique based on the analysis of frequency response of piles.