

岩石样本力学参数值的随机-模糊处理方法*

熊文林

李胡生

(武汉水利电力学院, 430027)

(同济大学地下工程系, 上海200092)

提 要

本文探讨了岩石力学参数试验结果的处理方法。文中认为岩石样本是典型的随机-模糊样本, 并应用模糊数学的原理推导了岩石力学参数样本值的随机-模糊统计公式。证明了随机统计公式是本文提出的随机-模糊统计公式的一种特例。文中提供的算例表明本文方法切合实际, 并优于传统方法。

一、前 言

通过岩石样本力学参数试验获得工程地质岩组的岩石力学参数, 是进行岩石工程稳定性分析的基础工作。过去处理岩石样本的很离散的试验结果有两种方法: 一种方法认为“孤值”没有代表性而将其剔除; 另一种方法则认为试验输出的任一信息都来自工程地质岩组, 都代表了其中实际性态的一部分, 因而将全部试验结果参与取平均值。笔者认为, 这两种方法都存在不足之处, 前一方法丢掉了部分试验信息, 其结果必然导致人为的歪曲; 后一方法将使试验结果的平均值受少数信息的干扰太大而产生偏差。鉴于如何利用全部试验信息最佳地估计工程地质岩组的岩石力学参数是迄未解决好的问题, 本文提出一种随机-模糊处理方法, 以利用全部岩石样本力学参数试验结果有效地估计工程地质岩组的岩石力学参数。

二、岩石样本力学参数的不确定性

在实际工作中, 岩组划分是地质师依据现场调查和个人经验推断确定的。根据“不相容原理”, 当一个系统的复杂性增大时, 人们使它精确化的能力减小, 在达到一定的阈值之后, 复杂性和精确性将相互排斥。所以, 对处在地质环境中的岩石工程这种极其复杂的系统, 岩组的划分不可能过细, 每一岩组必须包括相当大的空间范围。岩石力学性质的空间变异性和个人经验因素的影响, 使工程岩组分类难以确切, 这是问题的一个方面。问题的另一方面是人们无法找到精确的工程岩体分类标准, 很难明确断言某一处的岩体是否属于某一工程地质岩组。例如, 新鲜花岗闪长斑岩、风化花岗闪长斑岩、强风化花岗闪长斑岩之间就没有绝对分明的界限。这两方面的综合使得每一工程地质岩组范围内的岩体的类属具有不确定性, 而这种不确定性即是类属的模糊性。工程岩体从属于某一工程地质岩组到不属于该岩组是逐步过渡而非突然改变的, 并且这种过渡形式在某一工程地质岩组所包含的空间范围内也是不确定的。某一工程地质岩组所包含的空间范围越大, 这种变异和过渡就越复杂。显然, 工程地

*本课题得到国家教委高校博士点基金和中科院地质所工程地质力学开放实验室的资助。

到稿日期: 1991-12-21.

质岩组是一个模糊集合,同一岩组中不同位置处的岩体客观上都以不同的隶属度从属于该岩组。这种工程地质岩组划分的模糊性通过取样传递给岩石样本,使岩石样本力学参数具有不确定性-模糊性。这种不确定性正如L.A.Zadeh在其开创性论文《模糊集合》^[1]中所指出的那样,模糊事物“不确定性的根源在于缺乏明确的类别隶属判据”。

诚然,人们在进行岩组划分时,总是以岩体的某些性态为标准的。问题是某处岩体往往在一定程度上具有某种性态的同时,又不完全具有那种性态,岩组划分的不清晰性来源于岩体性态的不确定性。所以,这种由于岩组划分所带来的岩石样本值的模糊性不仅包含了划分岩组过程中地质师判断的不确定性,也是岩体性态不确定性的客观反映。

岩石样本力学参数试验值的另一类不确定性是随机性,它是在岩体类属完全确定的条件下,在取样和试验过程中产生的,包括取样方式误差、岩样加工误差、试验过程误差等。

综上所述,岩石样本力学参数的不确定性同时包含有随机性和模糊性。大体上讲,岩石样本力学参数的随机性是岩石取样测试过程中的一种客观的不确定性,而其模糊性则是人们在判别同一岩组中岩体力学特性的整个过程中所反映出来的一种主观的不确定性。从信息观点看,岩石样本力学参数的随机性只涉及到信息的量,如果对同一母体反复抽样,进行大量试验就可以逼近该母体的力学特性;其模糊性则关系到信息的意义,它反映的是样本对模糊集合—工程地质岩组的隶属程度。因此,岩石样本力学参数的模糊性是一种比其随机性更为基本、更为深刻的不确定性。

三、岩石样本力学参数随机-模糊处理方法

岩石样本是随机-模糊样本,它包含了随机和模糊这两类不确定性。过去惯用仅仅研究抽样随机性的数理统计方法处理岩石样本测试信息显然是不合适的。这里提出一种随机-模糊处理方法。

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为指定的工程地质岩组中岩石某力学参数(如 E, μ, c, φ 等)样本值,我们的任务是要用样本估计整体,即要求样本值的均值 $\bar{x}$ 、方差 σ^2 及两样本间的协方差 m_{xy} 。现分述如下:

(一)岩石样本力学参数均值 $\bar{x}$

对于这里所研究的问题,取论域为 $U=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, A 为 U 上的一个模糊子集,论域 U 中的元素 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 对于 A 的隶属度为 $\mu_A(x_i)$,所求的 A 的核 A 为

$$A=\{x | \mu_A(x)=1\} \quad (1)$$

如果上式中的 $\bar{x}$ 能够表示成

$$\bar{x}=f(x_i) \quad (2)$$

那么(2)式就是给定的工程地质岩组某力学参数所具有的统计性征。

根据所论问题的性质,采用如下形式的隶属函数^[2]

$$\mu_A(x_i)=\exp[-D_n(x_i, \bar{x})] \quad (3)$$

式中 D_n 是 x_i 关于模糊集合 A 的核点 $\bar{x}$ 的马氏距离。其表达式为

$$D_n=(x_i-\bar{x})^2 \cdot w_i \quad (4)$$

这里, w_i 习惯上称为权重。为方便起见, 取

$$w_i = \text{const} = w_{01} \quad (5)$$

显然, 隶属函数(3)式具有这样的规律, x_i 距核点 $\bar{x}$ 的马氏距离 D_{i1} 越大, 则它对 A 的隶属度越小; x_i 距核点 $\bar{x}$ 的马氏距离越小, 则它对 A 的隶属度越大; 在核点处, 隶属度最大为1。因此, $\mu_A(x_i)$ 可以写成

$$\mu_A(x_i) = \nu_A(D_{i1}) \quad (6)$$

隶属函数确定之后, 可按使实际样本值整体上隶属于样本模糊子集 A 的程度最大的原则, 寻找 $\bar{x}$ 所具有的统计特征。为此, 组成目标函数

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) = \max \quad (7)$$

将式(6)代入式(7)得

$$J_1 = \sum_{i=1}^n \nu_A(D_{i1}) = \max \quad (8)$$

对应于式(8)有

$$\frac{dJ_1}{d\bar{x}} = \frac{\partial J_1}{\partial D_{i1}} \cdot \frac{dD_{i1}}{d\bar{x}} = \sum_{i=1}^n \nu'_A(D_{i1}) \cdot \frac{dD_{i1}}{d\bar{x}} = 0 \quad (9)$$

将式(4)、(5)、(6)代入式(9)得

$$\sum_{i=1}^n \nu'_A(D_{i1}) \cdot [-2w_{01} \cdot (x_i - \bar{x})] = 0 \quad (10)$$

由式(10)得

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \nu'_A(D_{i1}) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n \nu'_A(D_{i1})} \quad (11)$$

(二) 岩石样本方差 σ^2

设 ξ 是基于岩石样本值 $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 的随机-模糊变量, 即令

$$\xi_i = (x_i - \bar{x})^2 \quad (12)$$

取值为 $R = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} = \{(x_1 - \bar{x})^2, (x_2 - \bar{x})^2, \dots, (x_n - \bar{x})^2\}$ 。取 ξ_i 对于论域 R 上的模糊子集 B 的隶属函数为

$$\mu_B(\xi_i) = \exp[-D_{i2}(\xi_i, S^2)] \quad (13)$$

式中 D_{i2} 是 ξ_i 关于模糊子集 B 的核点 S^2 的马氏距离, 其表达式为

$$D_{i2} = (\xi_i - S^2) \cdot w_{02} \quad (14)$$

w_{02} 为常数, 顾及到 x_i , ξ_i , D_{i2} 之间的关系, 可以将 $\mu_B(\xi_i)$ 记为

$$\mu_B(\xi_i) = F_B(x_i) = \nu_B(D_{i2}) \quad (15)$$

组成目标函数

$$J_2 = \sum_{i=1}^n F_B(x_i) = \sum_{i=1}^n \mu_B(\xi_i) = \max \quad (16)$$

将式(15)代入式(16)得

$$J_2 = \sum_{i=1}^n \nu_B(D_{i2}) = \max \quad (17)$$

对应于式(17)有

$$\frac{dJ_2}{dS^2} = \frac{\partial J_2}{\partial D_{i2}} \cdot \frac{dD_{i2}}{dS^2} = \sum_{i=1}^n \nu'_B(D_{i2}) \cdot \frac{dD_{i2}}{dS^2} = 0 \quad (18)$$

将式(14)代入式(18)得

$$\sum_{i=1}^n \nu'_B(D_{i2}) \cdot [-2w_{02} \cdot (\xi_i - S^2)] = 0 \quad (19)$$

由式(19)并顾及到式(12)得

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \nu'_B(D_{i2}) \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n \nu'_B(D_{i2})} \quad (20)$$

式(20)为总体方差所服从的随机-模糊统计公式, 而样本方差所服从的随机-模糊统计关系为

$$\sigma^2 = \frac{n}{n-1} S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \nu'_B(D_{i2}) \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n \nu'_B(D_{i2})} \quad (21)$$

(三) 岩石样本间协方差 m_{xy}

设 x, y 分别为某工程地质岩组力学参数的两个岩石样本, x, y 的样本值分别为 x_i, y_i ($i=1, 2, \dots, n$)。取基于 x, y 的随机-模糊变量 η 为

$$\eta_i = (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (22)$$

其取值为 $T = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\} = \{(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}), (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}), \dots, (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})\}$, C 为论域 T 上的模糊子集。取 η_i 对于 C 的隶属函数为

$$\mu_C(\eta_i) = \exp[-D_{i3}(\eta_i, m_{xy})] \quad (23)$$

$$D_{i3} = (\eta_i - m_{xy})^2 \cdot w_{03} \quad (24)$$

w_{03} 为常数, 记

$$\mu_C(\eta_i) = F_C(x_i, y_i) = \nu_C(D_{i3}) \quad (25)$$

组成目标函数

$$J_3 = \sum_{i=1}^n F_C(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n \mu_C(\eta_i) = \sum_{i=1}^n \nu_C(D_{i3}) = \max \quad (26)$$

对应于式(26)有

$$\frac{dJ_3}{dm_{xy}} = \sum_{i=1}^n \nu'_C(D_{i3}) \cdot \frac{dD_{i3}}{dm_{xy}} = 0 \quad (27)$$

将式(24)代入式(27), 经整理得

$$m_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n \nu'_C(D_{i3}) \cdot \eta_i}{\sum_{i=1}^n \nu'_C(D_{i3})} \quad (28)$$

将式(22)代入式(28)得

$$m_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n \nu'_C(D_{i3}) \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n \nu'_C(D_{i3})} \quad (29)$$

这就是岩石样本间协方差所服从的随机-模糊统计关系。

现在来证明这种随机-模糊处理方法的合理性。

首先, 由式(11), (21), (29)可以看出, 经过随机-模糊处理获得的岩石样本力学参数均值、方差、协方差, 实际上是以基于岩石样本值的随机-模糊变量 x , ξ , η 关于相应模糊子集 A , B , C 的隶属函数 $\mu_A(x_i)$, $\mu_B(\xi_i)$, $\mu_C(\eta_i)$ 的导数为权重对随机-模糊变量 x , ξ , η 的加权平均值, 即随机-模糊处理的实质是一种加权平均, 可见这种处理方法符合数学逻辑的。

其次, 由式(3)并顾及式(6), 由式(13)并顾及式(15), 由式(23)并顾及式(25)得

$$\nu'_A(D_{i1}) = -\nu_A(D_{i1}) \quad (30)$$

$$\nu'_B(D_{i2}) = -\nu_B(D_{i2}) \quad (31)$$

$$\nu'_C(D_{i3}) = -\nu_C(D_{i3}) \quad (32)$$

将式(30)代入式(11), 式(31)代入式(21), 式(32)代入式(29)得

$$\bar{x} = \frac{-\sum_{i=1}^n \nu_A(D_{i1}) \cdot x_i}{-\sum_{i=1}^n \nu_A(D_{i1})} = \frac{\sum_{i=1}^n \nu_A(D_{i1}) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n \nu_A(D_{i1})} \quad (33)$$

$$\sigma^2 = \frac{-\sum_{i=1}^n \nu_B(D_{i2}) \cdot (x_i - \bar{x})^2}{-\sum_{i=1}^n \nu_B(D_{i2})} = \frac{n}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \nu_B(D_{i2}) \cdot (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n \nu_B(D_{i2})} \quad (34)$$

$$m_{xy} = \frac{-\sum_{i=1}^n \nu_C(D_{i3}) \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{-\sum_{i=1}^n \nu_C(D_{i3})} = \frac{\sum_{i=1}^n \nu_C(D_{i3}) \cdot (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n \nu_C(D_{i3})} \quad (35)$$

若岩石样本不含模糊性, 则随机-模糊样本蜕变成随机样本、模糊子集蜕变成普通集合。依据模糊集合核的定义和普通集合的定义, 并注意到式(1), 则有

$$D_{i1} = D_{i2} = D_{i3} = 0 \quad (36)$$

$$\mu_A(x_i) = \nu_A(D_{i1}) = 1 \quad (37)$$

$$\mu_B(\xi_i) = \nu_B(D_{i2}) = 1 \quad (38)$$

$$\mu_C(\eta_i) = \nu_C(D_{i3}) = 1 \quad (39)$$

上面各式中 $i=1, 2, \dots, n$ 。将式(37), (38), (39)分别代入式(33), (34), (35)它们便蜕变成

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (40)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (41)$$

$$m_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} \quad (42)$$

式(40)、(41)、(42)即为随机变量的均值、方差、协方差计算公式^[3]。可见,传统的随机处理方法是这里提出的随机-模糊处理方法的一种特例。

综上所述,说明本文提出的随机-模糊处理方法是合理的。

将式(3)、(4)、(5)、(6)代入式(11);式(13)、(14)、(15)代入式(21);式(23)、(24)、(25)代入式(29);并在以上各式中取

$$\omega_{01} = \frac{1}{(d_{1\max} - d_{1\min})/2} \quad d_{1i} = (x_i - \bar{x})^2 \quad (43)$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{(d_{2\max} - d_{2\min})/2} \quad d_{2i} = [(x_i - \bar{x})^2 - \sigma^2]^2 \quad (44)$$

$$\omega_{03} = \frac{1}{(d_{3\max} - d_{3\min})/2} \quad d_{3i} = [(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - m_{xy}]^2 \quad (45)$$

经过运算得到

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n \exp\left\{\frac{-2(x_i - \bar{x})^2}{d_{1\max} - d_{1\min}}\right\} x_i}{\sum_{i=1}^n \exp\left\{\frac{-2(x_i - \bar{x})^2}{d_{1\max} - d_{1\min}}\right\}} \quad (46)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \exp\left\{\frac{-2[(x_i - \bar{x})^2 - \sigma^2]^2}{d_{2\max} - d_{2\min}}\right\} (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n \exp\left\{\frac{-2[(x_i - \bar{x})^2 - \sigma^2]^2}{d_{2\max} - d_{2\min}}\right\}} \quad (47)$$

$$m_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n \exp\left\{\frac{-2[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - m_{xy}]^2}{d_{3\max} - d_{3\min}}\right\} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n \exp\left\{\frac{-2[(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) - m_{xy}]^2}{d_{3\max} - d_{3\min}}\right\}} \quad (48)$$

上述各式中 $d_{j\max}$, $d_{j\min}$ 分别是 d_{ji} ($j=1, 2, 3$; $i=1, 2, \dots, n$) 中的最大值、最小值。式(46)、(47)、(48)即是岩石力学参数样本均值、方差、协方差的计算公式,而且都是隐函数式,需用迭代法求解。具体计算步骤可以协方差为例说明如下

1. 取初值 $\bar{x}_0 = \bar{X}$, $\bar{y}_0 = \bar{Y}$, $m_{xy0} = M_{xy}$; $\bar{X}, \bar{Y}, M_{xy}$ 分别为样本的随机均值和协方差。
2. 由式(46)计算岩石样本均值 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 。
3. 由式(48)计算协方差 m_{xy0} 。
4. 判断, 若 $|m_{xy} - m_{xy0}| < \varepsilon$ (ε 为指定的精度), 则 m_{xy} 即为所求; 反之, 则令 $m_{xy0} = m_{xy}$ 再返回到第(3)步, 直至满足精度要求为止。

[算例] 确定甲矿山边坡大理岩岩组和乙矿山边坡大理岩岩组、砂卡岩岩组的岩石单轴抗压强度的室内试验结果如表1所示。

表1 室内岩石单轴抗压强度(单位: MPa)

岩石样本号	1	2	3	4	5	6	7	8
甲大理岩	60.72	71.21	63.49	70.83	118.76	74.72	65.21	75.36
乙大理岩	52.63	85.74	45.36	78.54	70.85	82.26	66.71	93.60
乙砂卡岩	34.27	38.76	37.20	39.10	42.63	44.17	/	/

用随机统计方法求岩石样本值的均值、方差公式为式(40)、式(41), 变异系数按下式计算:

$$r = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad (49)$$

其结果列于表2。用本文提出的随机-模糊统计方法求岩石样本值均值、方差分别用式(46)、(47), 变异系数仍采用式(49), 其计算的结果亦列于表2, 计算过程见文献[4]

表2 统计参数值比较表

岩种	传统方法			本文方法		
	$\bar{x}$ (MPa)	σ (MPa)	r	$\bar{x}$ (MPa)	σ (MPa)	r
甲大理岩	75.04	18.44	0.246	70.18	11.00	0.157
乙大理岩	71.96	16.55	0.230	74.21	15.44	0.209
乙砂卡岩	39.36	3.60	0.092	39.12	3.58	0.092

由表2看出, 对于同时显著地包含有随机性和模糊性的甲、乙两矿山大理岩样本(样本值较分散), 两种方法计算的结果相差很大; 对于不显著地包含模糊性的乙矿山砂卡岩样本(样本值很集中), 两种计算结果相差甚小。传统的随机方法计算的大理岩单轴抗压强度的变异性结果为 $r_{\text{甲}} > r_{\text{乙}}$; 而本文提出的随机-模糊处理方法计算的结果正好相反, 即 $r_{\text{乙}} > r_{\text{甲}}$ 。比较岩石单轴抗压强度的样本值(图1)可以看出, 乙矿山大理岩单轴抗压强度样本值的整体变异性明显地比甲矿山大理岩单轴抗压强度值的整体变异性大。可见本文提出的随机-模糊处理方法切合实际, 优于传统的随机处理方法。

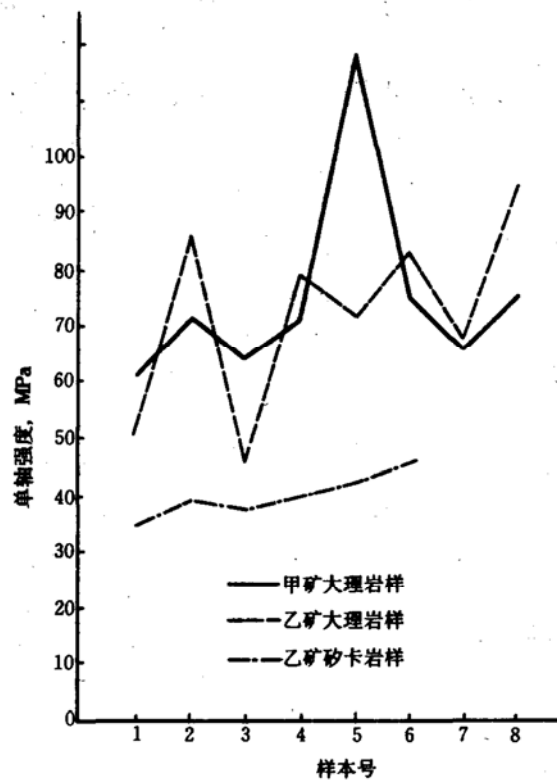


图1 岩石单轴抗压强度样本值

四、结 论

1. 岩石样本是随机-模糊样本, 岩石样本力学参数的不确定性同时包含了随机性和模糊性, 随机性是岩石取样测试过程中产生的一种外在的不确定性, 模糊性则是岩组中岩石力学特性的一种内在的不确定性。

2. 本文提出的处理岩石样本力学参数试验结果的随机-模糊统计方法切合实际, 优于传统的随机统计方法; 传统的随机统计方法是本文提出的随机-模糊统计方法的特例。

3. 本文导出的岩石样本值的随机-模糊统计公式具有确定的形式, 便于应用且计算工作量不大, 利用计算器即可计算。

参 考 文 献

- [1] Zadeh L. A. Fuzzy Sets. Inf. Control, 1968, 8: 338~353.
- [2] Gupta M. M. Approximate Reasoning in Decision Analysis. North-Holland Publishing Company, 1982: 3~11.
- [3] 汪荣鑫. 数理统计. 西安交通大学出版社, 1986. 26~43.
- [4] 李胡生. 边坡工程稳定性分析中的随机-模糊可靠度理论. 武汉水利电力学院, 1991. 7~34.

A Random-Fuzzy Method for Treating the Experimental Data of Mechanical Parameters of Rock Sample

Xiong Wen-lin

(Wuhan University of Hydraulic and Electrical Engineering)

Li Hu-Sheng

(Tongji University)

Abstract

This paper presents a random-fuzzy method for the treatment of the experimental data of mechanical parameters of rock samples. The uncertainty of mechanical parameters of rock samples is discussed. The fundamentals of fuzzy sets are used to derive the random-fuzzy statistics formulae for calculating the numerical characteristics of the experimental data of rock samples. The random statistics formulae are proved to be a special case of the presented formulae. Results shown that the proposed method is more realistic and better than the conventional one.