

用有限比较法进行拟合优度检验

张 博 庭

(中国水力发电工程学会, 北京)

一、前 言

把工程设计建立在可靠性分析的基础上是当前的发展趋势。我国的工民建部门从50年代起就着手做可靠性分析方面的准备工作, 现已制定出全国的“建筑结构设计统一标准”。在水利水电工程界, 由于施工情况复杂, 这方面的工作起步较晚, 目前尚处于收集资料、确定参数和制定统一标准的准备阶段。大量的数据收集及统计检验是一项不可避免的但又是十分困难的工作。因为有些情况下, 人们很难获得充份的检验数据(子样)。例如, 对水工建筑物的大型结构模型试验, 每进行一次都要耗费大量资金, 所以一般不可能进行多次试验, 因而也就很难取得充分的检验子样。因此, 如何对小子样问题进行检验, 是人们较为关心的问题。本文根据概率统计的理论和方法, 针对在子样较少情况下拟合优度检验的某些问题, 建议一种能适合较少子样的有限比较检验法。并用计算机模拟发生的随机数作为检验数据, 对本文提出的有限比较检验法进行验证, 同时给出应用算例。

二、方法的提出

所谓“拟合优度检验”就是要通过对随机采集到的数据的检验, 确定出拟合度最好的母体分布概型。常用的拟合优度检验法有: 概率纸检验法, χ^2 检验法以及K-S, C-M, A-D等多种“EDF”检验法。其中概率纸检验法一般只能应用于正态分布的检验, 而且检验结果较粗, 一般较少在工程上应用。 χ^2 法也称皮尔逊(Pearson)检验法^[2], 它根据皮尔逊定理, 利用当子样充分大时, 统计量总是渐近地服从自由度为 $K-r-1$ 的 χ^2 分布的特点, 来进行拟合优度检验的。该方法在子样充足时检验效果极佳, 是一种较为常用的检验法。但 χ^2 法要求检验分组数不得少于5组, 每组内的理论频数也要多于5个, 所以, 对于子样数少于50的问题, χ^2 法不易得到可靠的检验结果, 因而不适用于小子样检验。各种“EDF”检验法是通过实际观察值(子样), 构造一个经验分布函数 $F_n(x)$ ^[3], 然后根据经验分布函数与假设分布函数的检验偏差来确定是否接受假设。针对不同的检验统计量, “EDF”法可分为K-S检验法^[4], C-M检验法^[5]以及A-D检验法^[6]等多种检验方法。由于“EDF”检验法的物理意义直观, 又不必人为地对数据分组, 所以在子样较少时也能得到比较稳定的检验结果。因而比较适用于小子样检验。因此, 本文以“EDF”法作为基础, 讨论解决小子样检验问题。

在统计检验中, 所出现的错误无非是两种可能: 一是把正确的分布假设判定为不正确, 这种错误称为“弃真”, 犯“弃真”错误的概率用“ α ”来表示。另一种是把错误的分布假设判定为正确, 这称为“取伪”, 犯“取伪”错误的概率用“ β ”来表示。定理^[2]已经证明, 当样本容量(子样数)确定之后, “ α ”和“ β ”成固定的反比关系, 一种误差减少另一种误差就要加大, 不可能同时降低犯两种错误的概率。因此在进行统计检验时, 对于一种分布假设 H , 一般都先固定“ α ”的取值, 然后对假设进行检验, 当检验统计量不超过某一临界值时, 便认为假设 H 在“ α ”水平上接受检验。

用这种方法进行小子样检验时, 经常遇到同时接受多种不同假设的情况。从理论上讲, 这正是由于子样少, 而犯“弃真”错误率又固定, 因而必然会加大取伪错误率, 所以自然会出现同时接受几种假设的取伪现象。在这种情况下, 按经典的概率理论, 只能通过加大子样数目来降低取伪错误率, 从而唯一的确定原分布假设。然而, 根据经常接触到的实际工程问题的某些特点, 人们一般可以通过对某一类具体问题的分析和经验, 大体确定出几种可能的分布概型。有了这个前题, 可以将纯数学的拟合优度检验, 转换为对几种可能概型的检验判别。通过对有限多种可能分布的检验比较, 确定出小子样问题的最佳拟合分布函数。下面首先以“EDF”检验法中的 $K-S$ 法为例, 简单说明小子样检验存在的问题, 以及进行比较检验的机理和过程。

$K-S$ 检验法又称柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)检验, 它是以柯尔莫哥洛夫定理^[4]为基础, 认为当子样数趋于无穷时, 经验分布函数 $F_n(x)$ 与母体分布函数的极差——检验统计量 D_n 以概率为1趋于零。定理还进一步证明了 D_n 与 $1/\sqrt{n}$ 是同阶无穷小, 因而对给定的接受水平“ α ”可根据

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n} D_n > \mu_\alpha\} = \alpha \quad (1)$$

来决定检验否定域的临界值, 即可计算出一个 μ_α , 使得 $D_n > \mu_\alpha/\sqrt{n}$ 时, 便认为检验极差过大不接受检验, 反之亦然。同时定理还给出了当 n 趋于无穷时 $\mu_\alpha/\sqrt{n}$ 的近似计算公式。目前人们常用的 $K-S$ 法检验表就是根据该公式针对不同的子样数“ n ”和接受水平“ α ”计算出来的临界值表, 一般将 $\mu_\alpha/\sqrt{n}$ 记为 $D_{n,\alpha}$ 。在进行 $K-S$ 检验时, 只需比较 D_n 与 $D_{n,\alpha}$ 就可判定是否能接受假设。但是由于在统计检验中子样数不可能无穷大, 所以实际上我们常用的 $K-S$ 法检验表中的临界值 $D_{n,\alpha}$ 都是近似值。当子样很少时, 表中临界值的误差往往是较大的。这时因“弃真”的误差“ α ”是固定的, 所以仅应用检验表上的临界值判别小子样问题必然会加大取伪误差, 导致同时接受多种假设的结果。由此可见, 造成取伪错误的原因是检验统计量的判别值不准确。要解决这一问题除加大子样数外, 只能探讨新的检验判别标准。

通过分析概率的母体分布与样本之间的关系可知, 统计检验的结果应该是对原分布假设的拟合度最优。因此我们推论, 在一定的子样范围内, 虽然可能出现一组样本同时接受多种假设的情况, 但其接受的水平即拟合优度不可能一样。而且应该是对符合原分布的假设, 接受水平最高, 拟合度最优。具体的说, 根据 $K-S$ 法的定义和物理意义, 可以认为, 检验的极差——检验统计量 D_n 越小, 拟合度越优, 检验的接受水平越好。为了能与标准的常规 $K-S$ 检验法衔接和进行定量的比较, 我们定义: 检验统计量 D_n 与标准临界值 $D_{n,\alpha}$ 之比为接受水平。对分布假设 H_i , 可记为:

$$K_{ni} = D_n^i / D_{n,\alpha}^i \quad (2)$$

为检验接受水平。按照这种定义可以看出, 常规的 $K-S$ 检验法判别接受检验的标准是 $K_{ni} < 1$ 。

但是当子样数目很少时,由于近似误差加大了取伪错误率,必然会有多个 $K_{n_i} < 1$ 的情况出现。这时根据检验偏差最小,拟合度最优的原则,按照对检验判别值接受水平的概念,可以仅取 $K_{n_j} = \min\{K_{n_i} | (i=1, 2, \dots, m)\}$ 为接受检验,而对其它的 $K_{n_i} (i \neq j)$,虽然可能小于1,但认为是子样数过少造成的取伪误差所致,所以仍视为不能接受假设。这样便可形成一种以常规检验法为基础的,能够唯一地确定小子样问题检验结果的拟合优度检验法——有限比较检验法。

该方法也能适用于其它“EDF”检验法。例如,在C-M检验法中,对检验统计量 W_n^2 和临界判别值 $W_{n,\alpha}^2$,只需取 $K_{n_i} = W_n^2 / W_{n,\alpha}^2$ 即可。在A-D检验法中可取 $K_{n_i} = A_n^2 / A_{n,\alpha}^2$ 。总之,只要定义了检验统计量与临界值之比为接受水平 K_{n_i} ,各种“EDF”检验法均能用有限比较的方式唯一地确定小子样问题的母体分布概型。

三、用模拟随机数验证有限比较法

为验证本文提出的方法,我们采用计算机发生模拟随机数作为数据,然后对这些已知其母体分布的随机数进行拟合优度检验,由检验结果的正确性反过来验证有限比较检验法的正确性。实验中,我们分别采用工程结构可靠度分析中常见的正态分布,对数正态分布和极值I型分布为母体概型。每种概型分别发生4, 5, 6, 8, 10, 20, 50和150个数据共24组。首先用K-S检验对其进行比较检验。

根据K-S检验法的要求,对每组数据分别求出其检验统计量 $D_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F_0(x_0)|$ 。并取“ α ”=0.1,然后分别从K-S法检验中查得各组相应的临界值 $D_{n,\alpha}$ 。为便于说明问题,现将子样数分别为8, 10, 20, 50,的十二组数据的检验结果列于表1中。

表1 K-S法检验结果比较表,取 $\alpha=0.1$

n	母体 检验 $F_0(x)$	正 态		对数正态		极值 I 型	
		$\max\{D_n\}$	$D_n/D_{n,\alpha}$	$\max\{D_n\}$	$D_n/D_{n,\alpha}$	$\max\{D_n\}$	$D_n/D_{n,\alpha}$
8	正态	0.07813	0.32	0.0882	0.361	0.13767	0.42
	对数正态	0.086	0.35	0.0802	0.328	0.1249	0.366
	极值 I 型	0.112	0.46	0.0987	0.404	0.09947	0.304
10	正态	0.06673	0.279	0.07542	0.315	0.1245	0.42
	对数正态	0.0732	0.306	0.05812	0.243	0.1109	0.374
	极值 I 型	0.1018	0.426	0.08761	0.366	0.08317	0.281
20	正态	0.030805	0.218	0.04871	0.28	0.09831	0.459
	对数正态	0.0639	0.367	0.3889	0.223	0.08317	0.388
	极值 I 型	0.08071	0.464	0.06591	0.379	0.04919	0.23
50	正态	0.01828	0.161	0.03097	0.272	0.08201	0.594
	对数正态	0.02897	0.255	0.01809	0.159	0.06489	0.47
	极值 I 型	0.07178	0.63	0.05471	0.481	0.02579	0.187

由表1可见,当子样数在8—50之间时,检验结果都是 $K_{n_i} < 1$,按传统的K-S检验法去判别,全都为接受检验,根本无法确定到底哪一种假设符合母体分布。但比较各种假设的 K_{n_i} 值可以看到,对各种不同的假设,检验的接受水平确实不一样。而且全部实验结果都无一例外的符合我们的推论,即对符合原分布的假设接受水平最好。

为进一步验证有限比较法, 我们又用C-M检验法对同样的数据进行了检验。检验中, 检验统计量 W_n^2 的计算公式为:

$$W_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_n(x) - F_0(x)]^2 dF_0(x) = \frac{1}{12n^2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left[F_0(x_i) - \frac{2i+1}{2n} \right]^2 \quad (3)$$

同样取“ α ”=0.1, 并由C-M法检验表查出各个相应的 $W_{n,\alpha}^2$ 值。取 $K_n = W_n^2 / W_{n,\alpha}^2$, 最后将 W_n^2 和 K_n 的部份结果列于表2。

表2

C-M法检验结果比较表

取 $\alpha=0.1$

n	检验 F(x)母体	F ₀ (x)正态		F ₀ (x)对数正态		F ₀ (x)极值 I 型	
		W ²	W ² /W _{n,α} ²	W ²	W ² /W _{n,α} ²	W ²	W ² /W _{n,α} ²
50	正态	0.00328	0.032	0.01034	0.1	0.1071	0.605
	对数正态	0.009259	0.09	0.00342	0.033	0.06551	0.371
	极值 I 型	0.07829	0.76	0.0403	0.391	0.00741	0.043
20	正态	0.00579	0.057	0.00835	0.082	0.04818	0.274
	对数正态	0.00774	0.076	0.0059	0.058	0.03311	0.188
	极值 I 型	0.02983	0.294	0.0175	0.172	0.0097	0.0551
10	正态	0.00959	0.097	0.01072	0.108	0.0311	0.179
	对数正态	0.01037	0.105	0.0097	0.098	0.02431	0.14
	极值 I 型	0.01881	0.19	0.01394	0.141	0.01303	0.075
8	正态	0.0114	0.115	0.01233	0.125	0.02859	0.165
	对数正态	0.0121	0.122	0.01148	0.116	0.02361	0.136
	极值 I 型	0.0181	0.183	0.01461	0.148	0.014718	0.085

对比表2的结果, 同样可以看到: 对符合原分布的假设接受水平最好, 即 K_n 最小。这不仅再次证明了有限比较法的推论的正确的, 而且也说明有限比较法也适用于C-M检验法。此外我们还用A-D检验法等一些其它“EDF”检验法进行了同样的检验, 共检验数据60余组。其结果均符合我们的推论, 因篇幅关系不一列出。因此, 可以认为在子样数在8—50之间时, 完全可以用有限比较检验法唯一地确定子样的母体概型。

未在表中列出的实验结果还表明: 当子样数大于150时, 其检验结果可以由传统的检验方法唯一地确定, 因此没有必要考虑比较的问题。对于子样数少于8个的统计检验问题, 情况比较复杂, 首先要区分是含未知参数的检验, 还是非参数检验。对于非参数检验, 因分布参数已知(如本试验的情况)即使只有4个子样也能很好地符合对原分布假设接受水平最好的推论, 从而可以用有限比较法得到正确的检验结果。而在含数参的检验中, 由于子样太少也严重地影响了参数估计的准确性。这样检验的误差和参数估计的误差交织在一起, 有可能导致不正确的检验结果。考虑到实际工作中进行的拟合优度检验一般都不可能事先知道准确的分布参数。因此, 我们认为对子样数少于8的参数检验应慎重对待, 并进行专门的研究。

四、算 例

已知某水库11年间的最高水位记录如表3。将最高水位数据按从小到大排列成 $x_1 \cdots x_{11}$ 。为进行分析, 以每5m为单位将数据 x_i 分组, 并画出相应的频率直方图, 见图1。

从直方图形看, 年最高水位的分布有可能是正态、对数正态或是极值 I 型分布中的任何一种。理论分析也说明一般工程问题多属这三种分布。因此, 我们用有限比较法, 以正态分布、对数正态分布和极值 I 型分布三种假设进行比较检验。

首先计算出数据的一阶矩和二阶矩

$$\bar{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = 38.294 \text{ (m)}$$

$$\sigma_i \approx S_{xi} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2} = 6.975$$

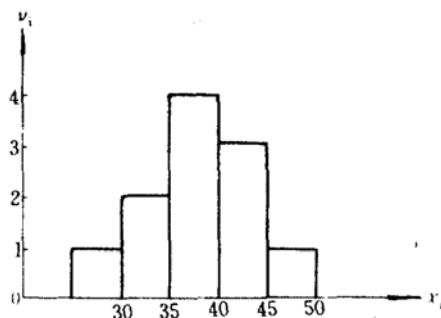


图1 年最高水水位分布直方图

表3

某水库年最高水位表

年 份	最高水位(m)	排 序	年 份	最高水位(m)	排 序
1973	33.76	x_2	1979	43.0	x_8
1974	46.1	x_{10}	1980	36.6	x_6
1975	49.19	x_{11}	1981	35.95	x_5
1976	43.42	x_9	1982	39.31	x_7
1977	35.56	x_4	1983	33.91	x_3
1978	24.22	x_1			

设分布假设为

H_1 , 极值I型分布:

$$F(x) = F_0(x) = \exp\{-\exp[-\alpha(x_i - \mu)]\} \quad (4)$$

$$(\text{式中: } \alpha = \pi / S_{xi} \sqrt{6}; \mu = \bar{x}_i - 0.5772 / \alpha)$$

H_2 , 正态分布:

$$F(x) = F_0(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp\left[-\left(\frac{t - \bar{x}_i}{\sigma_x}\right)^2\right]}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} dt \quad (5)$$

H_3 , 对数正态分布:

$$F(x) = F_0(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\ln x_i}} \exp\left[-\left(\frac{\ln t - m_{\ln \bar{x}_i}}{\sigma_{\ln x_i}}\right)^2\right] dt \quad (6)$$

$$(\text{式中: } m_{\ln x_i} = \overline{\ln x_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i; \sigma_{\ln x_i} = S_{\ln x_i} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - m_{\ln x_i})^2})$$

根据K-S检验法的要求, 经验分布函数 $F_n(x)$ 由下式求得:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ \frac{i}{n}, & x_i < x \leq x_{i+1} \\ 1, & x > x_n \end{cases} \quad i=1, \dots, n-1, \quad (7)$$

现将三种假设的计算过程及查表后求出的检验结果列于表4;

表4 年最高水位分布K-S法检验表

x_i	$F_n(x_i)$	$H_1: \alpha=0.192849$ 极值 I 型 $\mu=35.3005741$			$H_2: \bar{x}=38.294$ 正态分布 $\sigma=6.975$			$H_3: \ln \bar{x}_i=m=3.629$ 对数正态分布 $\sigma_{\ln x}=0.19454$			
		$\alpha(x_i-\mu)$	$F_0(x_i)$	$ F_n(x_i)-F_0(x_i) $	$\frac{(x_i-\bar{x})}{\sigma_x}$	$F_0(x_i)$	$ F_n(x_i)-F_0(x_i) $	$\ln x_i$	$\frac{(\ln x_i-m)}{\sigma_{\ln x}}$	$F_0(x)$	$ F_n(x_i)-F_0(x_i) $
24.22	0.091	-2.1368	0.00021	0.091	-20.176	0.02169	0.07	3.18718	-2.2706	0.0116	0.08
33.67	0.128	-0.3144	0.252296	0.0722	-0.6528	0.2546	0.072	3.5166	-0.5772	0.2843	0.102
33.91	0.273	-0.2681	0.9905	0.003	-0.62845	0.2643	0.011	3.5237	-0.5407	0.2946	0.021
35.56	0.364	0.05003	0.38637	0.02227	-0.3919	0.3483	0.024	3.5712	-0.2965	0.3859	0.021
35.95	0.455	0.1252	0.4138	0.0412	-0.366	0.3669	0.088	3.5821	-0.2404	0.4052	0.051
36.6	0.545	0.2506	0.45917	0.0858	-0.2428	0.4052	0.1398	3.60005	-1.4833	0.44	0.105
39.31	0.636	0.7732	0.6303	0.0057	0.1457	0.4404	0.1956	3.6715	0.2188	0.5832	0.058
43.3	0.727	1.5427	0.8075	0.0805	0.7177	0.762	0.035	3.76815	0.71578	0.7611	0.042
43.42	0.818	1.5658	0.81146	0.0065	0.7349	0.7673	0.051	3.7709	0.730001	0.7673	0.05
46.1	0.909	2.0826	0.8828	0.02615	1.1192	0.8686	0.0404	3.83081	1.03787	0.8485	0.072
49.19	1	2.6785	0.9336	0.0664	1.5621	0.9406	0.0594	3.89569	1.3714	0.9147	0.086
D_n		0.091			0.196			0.105			
$D_n/D_{n,\alpha}=K_n$		0.233			0.5			0.268			

由表4可见, 对三种假设 H_1 , H_2 和 H_3 用K-S法检验的结果分别为 $K_{n1}=0.233$, $K_{n2}=0.5$

和 $K_{H_3}=0.268$ 均小于1。按常规 $K-S$ 检验法无法确定检验结果, 因而根据有限比较检验法可仅取 $\min\{K_{H_i}\}=K_{H_1}$, 为接受检验, 即认为只有 H_1 为可接受的假设。所以得到该水库的年最高水位分布为极值 I 型分布的结论。其分布为

$$F(x)=\exp\{-\exp[-0.193(x-35.3)]\} \quad (8)$$

对同一算例再用 $C-M$ 法进行检验, 其中检验统计量 W_n^2 由下式计算,

$$W_n^2=\frac{1}{12n^2}+\sum_{i=1}^n\left(F_0(x)-\frac{2i-1}{n}\right)^2 \quad (9)$$

检验过程及查 $C-M$ 法检验表后得到的 K_{H_i} 值见表5;

表5 年最高水位分布 $C-M$ 法检验表

x_i	$\left(\frac{2i-1}{2n}\right)$	H_1 极值 I 型分布			H_2 正态分布			H_3 对数正态分布			
		$a(x_i-\mu)$	$F_0(x_i)$	$\left(F_0(x_i)-\frac{2i-1}{2n}\right)^2$	$\frac{(x_i-\bar{x})}{\sigma}$	$F_0(x_i)$	$\left(F_0(x_i)-\frac{2i-1}{2n}\right)^2$	$\ln x_i$	$\frac{(\ln x_i - m)}{\sigma_{\ln x}}$	$F_0(x_i)$	$\left(F_0(x_i)-\frac{2i-1}{2n}\right)^2$
24.22	0.04545	-2.1368	0.00021	0.002047	-2.0176	0.02169	0.000565	3.1872	-2.2706	0.0116	0.001146
33.67	0.13636	-0.3144	0.2542	0.013886	-0.66286	0.2546	0.01398	3.5166	-0.5772	0.2843	0.021886
33.91	0.2273	-0.26817	0.2705	0.001866	-0.62845	0.2643	0.00143	3.5237	-0.5407	0.2946	0.004533
35.56	0.3182	0.05003	0.3863	0.004637	-0.3919	0.3183	0.000907	3.5712	-0.2965	0.3859	0.004586
35.95	0.4091	0.12524	0.4138	0.000023	-0.396	0.3669	0.0017816	3.5821	-0.2404	0.4052	0.000015
36.6	0.5	0.2505	0.4592	0.001665	-0.2428	0.4052	0.002488	3.6	-0.1483	0.44	0.0036
39.31	0.5909	0.7732	0.6303	0.001552	0.1457	0.4404	0.02265	3.6715	0.2188	0.5832	0.000074
43.3	0.6818	1.5427	0.8075	0.015796	0.7177	0.762	0.006432	3.7681	0.7158	0.7611	0.006288
43.42	0.7727	1.5658	0.8115	0.0015	0.7349	0.7673	0.0000291	3.7709	0.73	0.7673	0.000029
46.1	0.8636	2.08263	0.8829	0.000369	1.1192	0.8686	0.000025	3.8308	1.0379	0.8485	0.00229
49.19	0.9545	2.6785	0.9336	0.000437	1.5621	0.9406	0.0001934	3.8957	1.3713	0.9147	0.001588
$\left(F_0(x)-\frac{2i-1}{2n}\right)^2$		0.04371			0.049777			0.046			
W^2		0.044471			0.051066			0.0467			
$W^2/W_{\alpha,0}^2=K_{H_i}$		0.369			0.42			0.3876			

从表5的结果可以看到, 尽管采用 $C-M$ 检验法所计算的统计量及查出的临界值与 $K-S$ 法完全不同, 但是该检验所得到的结论确与 $K-S$ 检验法的结论完全一致。同样有 K_{H_1} , K_{H_2} , K_{H_3} , 均小于1, 采用比较检验后取 $\min\{K_{H_i}\}=K_{H_1}$, 即 H_1 为接受假设, 水库年最高水位呈极值 I 型分布。

通过算例可以看到, 一些子样数较少的拟合优度检验问题, 很难由常规的检验法确定其分布概型。但通过分析估计出几种的可能分布后, 完全可以用有限比较的方法确定出拟合度最优的分布概型。

五、小 结

本文建议的有限比较检验法是建立在传统的统计检验过程上的比较方法。其应用的前提是要保证所设的几种可能假设中, 确实已包括了母体分布的概型, 否则比较的结果将毫无意义。此外, 对于“检验的结果对原分布假设的接受水平最好”这一概念, 不少工程技术人员早

就在实际中有意无意地应用过, 本文的作用仅在于以下两点:

1. 为便于比较, 确定了一种定量比较的方法, 即对于几种不同的假设 $H_i (i=1\cdots m)$, 引用检验接受水平 K_{H_i} 为检验统计量与检验临界判别值之比, 并取 $\min|K_{H_i}|$ 为检验结果。

2. 通过对计算机发生的几十组上万个模拟随机数的几种不同检验法的检验, 证明本文所提出的推论及有限比较检验法的可行性, 并确定了大概的应用范围。

参 考 文 献

- [1] Stehens, M. A. , EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparision, Journal of American Math Statistical Association, Vol. 69, 1974, pp. 730—737.
- [2] Fisz, M. , 概率论及数理统计, 王福保译, 上海科技出版社, 1962。
- [3] 陈希孺, 数理统计引论, 科学出版社, 1981。
- [4] Liffiefors, H. W. , On the Kolmogolov—Smirnov Test for Exponential Distribution With Mean Un-know, Journal of American Math Statistical Association Vol. 64, 1969, p. 387.
- [5] Qawis, Petos. A. U. , Distribution of the Anderson Darling Statistics, Annual of Math Statistics, Vol. 32, Dec. 1961, p. 118.