

软土地基Biot固结的一种有限元方法

王志建

陶大江

廖济川

(安徽建筑工业学院, 合肥) (安徽省水利厅, 合肥) (合肥工业大学)

一、前言

近十几年来, 国内外学者在研究软土地基Biot固结的有限元分析计算方面, 已作了大量卓有成效的工作^[1-6]。但大多采用三角形单元或双线性四边形单元, 在模拟地基中的位移、应力和孔隙水压力分布时, 所需单元数目较多, 精度尚不理想。本文引入精度较高的八结点等参元, 在推导Biot固结的有限元方程中, 仍采用虚位移原理建立平衡方程; 但在给出连续性方程时, 提出结点等价流量改变量, 等于渗流方向上的流速在单元域上与该方向上的结点等效面积改变量的乘积。数学严谨, 物理概念明确, 比泛函方法简捷, 文献[1]、[4]对常应变单元引入的结点“领域”上的流量变化而建立连续性方程, 是本文方法的特例。

本文在有限元计算中, 选用的是弹性非线性 $E-\mu$ 类模型。因而在反映土的剪胀性方面存在较大的局限性^[6], 并且不能反映应力路径的影响和准确地描述接近破坏时土体的性状。但这类模型的参数较易测取, 并已建立多种土的参数数据。当地基中的加荷路径与室内试验应力路径大体相同时, 计算结果尚能满足, 从而在工程界应用较广。

根据本文的方法及程序, 在算例中, 对金山石化总厂的101号油罐地基的充水预压过程进行了计算, 并将计算结果与实测资料^[9]及文献[1]的计算结果作了比较。

二、轴对称问题Biot固结的有限元方程

(一)、单元选择及位移模式

由外荷载引起的地基中的位移、应力和孔隙水压力一般为非线性分布。根据有限元理论, 对这一类问题, 若采用高价单元, 当结点数相同时, 其计算精度高于低价单元, 且单元数目大为减少, 减轻了数据输入工作。

今选取矩形八结点等参元, 对轴对称问题, 所取单元是一个在 roz 平面上投影为矩形的圆环, 各单元之间由结圆铰结, 结圆与 γoz 平面的交点即为结点, 如图1所示。

单元的位移模式可用完备的二次多项式来描述, 其任一结点的形函数 N_i 用局部坐标(图1)可表示为

$$N_i = (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1)\xi_i^2\eta_i^2/4 + (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 - \xi_i^2)\eta_i^2/2 \\ + (1 - \eta^2)(1 + \xi_0)(1 - \eta_i^2)\xi_i^2/2 \quad (1)$$

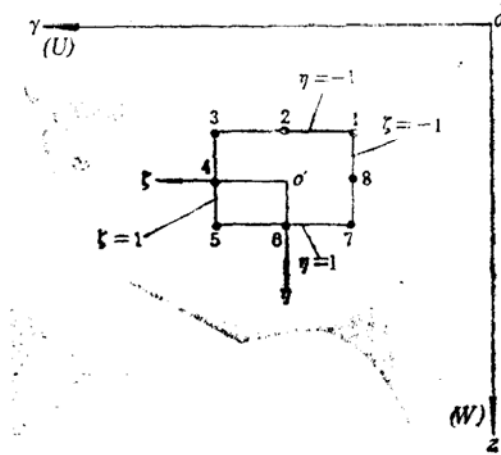


图1 八结点等参元

式中 $\xi_i = \xi_i \xi$, $\eta_i = \eta_i \eta$ ($i = 1, 2, \dots, 8$)

单元的基本未知量, 径向位移 U , 竖向位移 W 及孔隙水压力 P_w 可表示为

$$\begin{Bmatrix} U \\ W \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}^e \quad (2)$$

$$P_w = [N'] \{p\}^e \quad (3)$$

式中 $[N] = [IN_1 \quad IN_2 \quad \dots \quad IN_8]$, I 为二阶单位阵; $[N'] = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_8]$; $\{\delta\}^e = [U_1 \quad W_1 \quad U_2 \quad W_2 \quad \dots \quad U_8 \quad W_8]^T$, 为单元结点的位移矢量; $\{p\}^e = [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_8]^T$, 为单元结点的孔隙水压力矢量。

单元任一点的整体坐标表示为

$$r = [N'] \{r\}^e, \quad z = [N'] \{z\}^e \quad (4)$$

式中 $\{r\}^e = [r_1 \quad r_2 \quad \dots \quad r_8]^T$; $\{z\}^e = [z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_8]^T$ 。

(二), Biot固结理论的有限元平衡方程

根据有效应力原理, 几何物理方程和虚位移原理, 可推导出Biot固结的有限元平衡方程, 对弹性非线性本构模型或 $t - (t + \Delta t)$ 计算时段荷载匀速施加情形, 可将方程写成增量形式

$$[K_e] \{\Delta \delta\} + [K_{ep}] \{\Delta p\} = \{\Delta R\} \quad (5)$$

式中 $[K_e]$ 为计算域在某计算时段对应于结点位移的总刚度矩阵;

$$[K_e] = \sum_e 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B]^T [D] [B]) \cdot ([N'] \{r\}^e) \cdot |J| d\xi d\eta \quad (6)$$

其中 $[B]$ 为单元的应变矩阵, $[B] = [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_8]$;

$$[B_i] = - \begin{bmatrix} N_{i,r} & 0 \\ N_{i,r} & 0 \\ 0 & N_{i,z} \\ N_{i,z} & N_{i,r} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

记号 $N_{i,r} = \frac{\partial N_i}{\partial r}$, $N_{i,z} = \frac{\partial N_i}{\partial z}$, 下同。当 $r = 0$ 时, 有 $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta$, 则在上式中令 $N_{i,r}/r = N_{i,r}$, 以消除奇异项。

$[D]$ 为某计算时段, 单元土骨架的切线刚度矩阵。

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

其中 E , μ 分别为切线杨氏模量和切线泊松比。

$|J|$ 为雅可比(Jacobian)行列式;

$$|J| = \sum_{i=1}^8 N_{i,\xi} r_i \cdot \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} z_i - \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} r_i \cdot \sum_{i=1}^8 N_{i,\xi} z_i$$

$\{\Delta\delta\}$, $\{\Delta p\}$ 为计算域在某计算时段的结点位移增矢量和孔隙水压力增矢量;

$[K_{ep}]$ 为计算域在某时段对应于孔隙水压力的总刚度矩阵;

$$[K_{ep}] = \sum_{e=1}^E 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([B]^T \{M\} [N']) ([N'] \{r\})^e |J| d\xi d\eta \quad (7)$$

其中 $\{M\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 为变换列阵, $\{\Delta R\}$ 为某计算时段荷载增量所对应的结点力增矢量。

三、Biot固结理论的有限元连续性方程

1. Darcy定律

$$\{v\} = \frac{1}{\gamma_w} [k_q]^e [J]^{-1} \{\nabla\} [N'] \{p\}^e \quad (8)$$

式中 $\{v\}$ 为孔隙水流速度矢量, $\{v\} = [v_r \ v_z]^T$; γ_w 为水的密度; $[k_q]^e$ 为单元渗透系数矩

阵, $[k_q]^e = \begin{bmatrix} k_r & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix}$; $[J]^{-1}$ 为雅可比矩阵 $[J]$ 的逆阵;

$$[J]^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} \cdot z_i & - \sum_{i=1}^8 N_{i,\xi} \cdot z_i \\ - \sum_{i=1}^8 N_{i,\eta} \cdot r_i & \sum_{i=1}^8 N_{i,\xi} \cdot r_i \end{bmatrix}; \{\mathcal{D}\} \text{ 为微分算子, } \{\mathcal{D}\} = \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \quad -\frac{\partial}{\partial \eta} \right]^T$$

2. 饱和粘土的体积变形与流量的关系

在单元中任取一微元体 $d\Omega = 2\pi r dr dz$ 。在该微元体上, i 结点的等效体积为 $d\Omega_i = N_i d\Omega$, 它在 r 方向上的等效面积改变量为 $dA_{i,r} = N_{i,r} d\Omega$ 。在任一时刻 t , 微元体上的渗流速度可看作是常量。因此, 单位时间 i 结点在微元体上 r 方向的等价结点流量改变量为

$$d(\Delta Q_{i,r}') = v_r \cdot N_{i,r} d\Omega \quad (9)$$

对整个单元有

$$\Delta Q_{i,r}' = \int_{\Omega} v_r \cdot N_{i,r} d\Omega \quad (10-a)$$

$$\text{同理} \quad \Delta Q_{i,z}' = \int_{\Omega} v_z \cdot N_{i,z} d\Omega \quad (10-b)$$

因此, 单位时间 i 结点在单元上的等价结点流量改变量为

$$\begin{aligned} \Delta Q_i' &= \Delta Q_{i,r}' + \Delta Q_{i,z}' \\ &= \int_{\Omega} [N_{i,r} \quad N_{i,z}] \cdot \{v\} d\Omega \end{aligned} \quad (11)$$

对单元中各结点都写出上式, 并用矩阵表示, 则有

$$\begin{aligned} \{\Delta Q'\} &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] [N']^T \{v\} d\Omega \\ &= [k_p]^e \{p\} \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $[k_p]^e$ 为单元渗透流量矩阵,

$$\begin{aligned} [k_p]^e &= \frac{2\pi}{\gamma_w} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\{\mathcal{D}\}^T [N']^T [[J]^{-1}]^T [k_q]^e [J]^{-1} \{\mathcal{D}\} [N']) \\ &\quad \cdot ([N'] \{r\})^e |J| d\xi d\eta \end{aligned} \quad (13)$$

式(12)对不同位移模式的单元具有一般性。文献[1]中的式(27)和文献[4]中的式(19)分别是本文方法的特例。

在某计算时段 $t - (t + \Delta t)$ 内, 有

$$\{\Delta Q\} = [k_p]^e \int_t^{t+\Delta t} \{p\}^e dt \quad (14)$$

上式可近似地表达为

$$\{\Delta Q\} = [k_p]^e (\{p_t\}^e + \beta \{\Delta p\}^e) \Delta t \quad (15)$$

式中 $\{p_t\}$ 为 t 时刻单元结点孔隙水压力矢量; $\{\Delta p\}^e$ 为 $t - (t + \Delta t)$ 时段, 单元结点孔隙水压力增量; β 为时间差分系数, 其值取决于该时段内, $\{\Delta p\}^e$ 假定的变化形式; [6,8]

在 $t - (t + \Delta t)$ 时段, i 结点的等价体积压缩量为

$$\begin{aligned} \Delta V_i &= \int_{\Omega} \Delta \varepsilon_v \cdot N_i d\Omega \\ &= \int_{\Omega} N_i \{M\}^T [B] d\Omega \cdot \{\Delta \delta\}^e \end{aligned} \quad (16)$$

对单元的各结点都写出上式, 并用矩阵表示

$$\{\Delta V\} = [k_v]^e \cdot \{\Delta \delta\}^e \quad (17)$$

式中 $[k_v]^e$ 为单元的体变矩阵。

根据饱和粘土条件, 在 $t - (t + \Delta t)$ 时段内, 有

$$\{\Delta V\} = \{\Delta Q\} \quad (18)$$

$$\text{即} \quad [k_v]^e \cdot \{\Delta \delta\}^e - \beta \cdot \Delta t [k_p]^e \cdot \{\Delta p\}^e = \{\Delta R_w\}^e \quad (19)$$

式中 $\{\Delta R_w\}^e$ 为 t 时刻单元结点孔隙水压力所对应的结点力矢量。

$$\{\Delta R_w\}^e = \Delta t [k_p]^e \{p_t\}^e \quad (20)$$

对计算域上各结点, 都写出式(19), 并注意到 $[K_v] = [K_{ep}]^T$, 可得Biot固结的有限元连续性方程组

$$[K_{ep}]^T \{\Delta \delta\} - \beta \Delta t [K_p] \{\Delta p\} = \{\Delta R_w\} \quad (21)$$

联立式(5)和式(21), 可得轴对称问题Biot固结的有限元方程

$$\begin{pmatrix} K_e & K_{ep} \\ K_{ep}^T & -\beta \Delta t K_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \delta \\ \Delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta R \\ \Delta R_w \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\text{或简写为} \quad [K] \{\Delta\} = \{\Delta F\} \quad (23)$$

对平面问题, 只需将上述方程中的 $[B]$ 和 $[D]$ 矩阵的第二行删去, 并使 $\{M\} = [1 \ 1 \ 0]^T$ 及 $2\pi [N'] \{r\}^e = 1$, 即可得平面问题Biot固结的有限元方程。

根据式(23), 笔者编制了可应用线弹性模型、非线性弹性 $E-\mu$ 模型及 $K-G$ 模型的有限元计算程序。在程序中将各结点的三个未知量列在一起, 从而使总系数矩阵 $[K]$ 的半带宽进一步减小, 以利求解。

三、算 例

以上海金山石化总厂的 101 号油罐地基的充水预压过程为算例, 工程概况及实测资料取自文献[9]。

计算中各土层的计算模型及参数的选取, 计算荷载、计算时段和计算域的划分均录自文

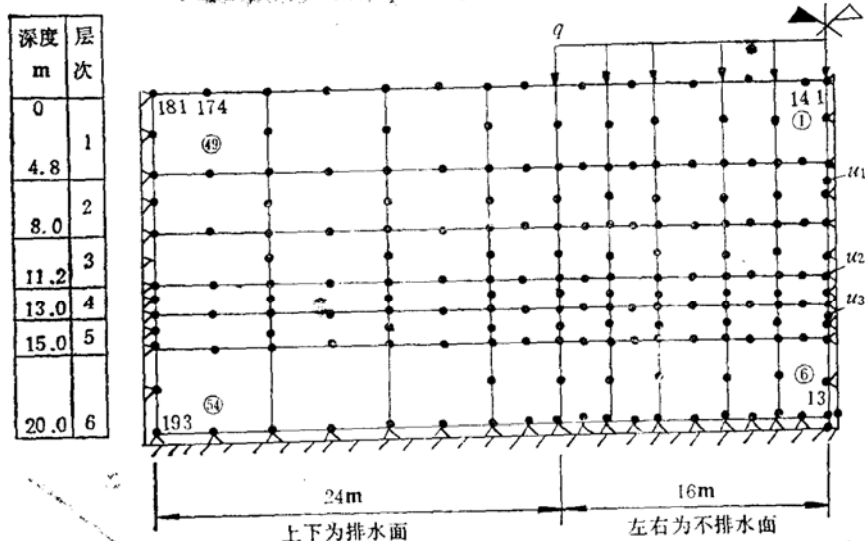


图2 单元划分图

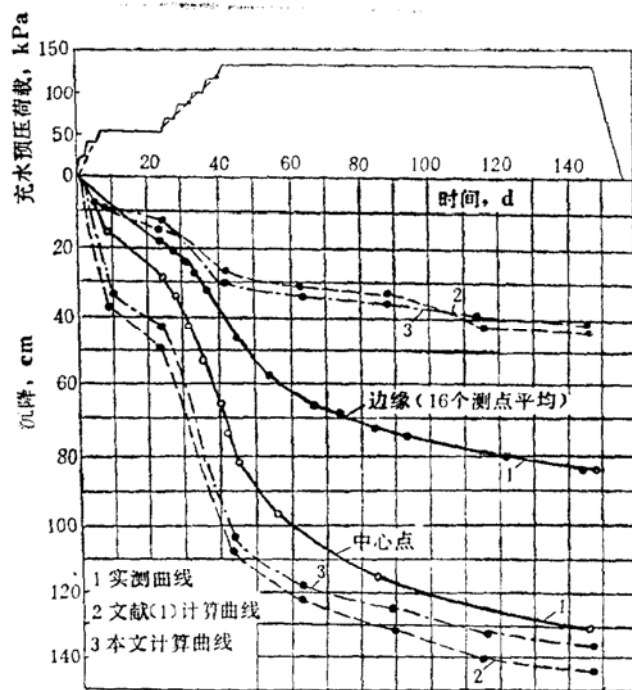


图3 沉降-时间曲线

献[1]。

本文的单元划分见图2，共54个单元，193个结点，略少于文献[1]的204个结点。

图3为油罐中心点和罐边缘的沉降-时间曲线。因砂垫层施工阶段无实测记录，不能比较，故这段计算曲线未在图中绘出。由图可见，对罐中心点的沉降，计算曲线大于实测曲线，在加荷阶段，与实测曲线有一定误差。在后期预压固结阶段，与实测曲线比较接近。在与实测曲线的接近程度上，本文的计算曲线比文献[1]的计算曲线好。对罐边缘点的沉降，本文计算

曲线虽略好于文献[1]的计算曲线。但在后期予压固结阶段, 两计算曲线均小于实测曲线, 且差异较大。

造成沉降过程计算值与实测值差异的主要原因, 可能是在计算中未考虑油罐与环基的刚度及其与地基的共同作用, 仅将基底反力作为柔性均布载荷。文献[1]的作者在后续的研究中, 考虑了油罐基础和地基的共同作用, 显著地改善了沉降计算的精度^[7]。此外, 罐中心点和罐边缘, 地基在实际加荷过程中应力路径的差异较大, 计算中未考虑应力路径的影响, 也是影响计算结果的因素之一。

图4为油罐充水预压过程中孔隙水压力-时间曲线, 测点 u_1 , u_2 , u_3 见文献[9]及图2。对各测点, 本文的计算值除个别外, 与实测值比较接近。本文与文献[1]的计算曲线也比较一致, 其原因可能都是假定在各计算时段, 结点的孔隙水压力 ΔP 呈线性变化, 即取 $\beta = \frac{1}{2}$; 其次是本文的结点数略少。

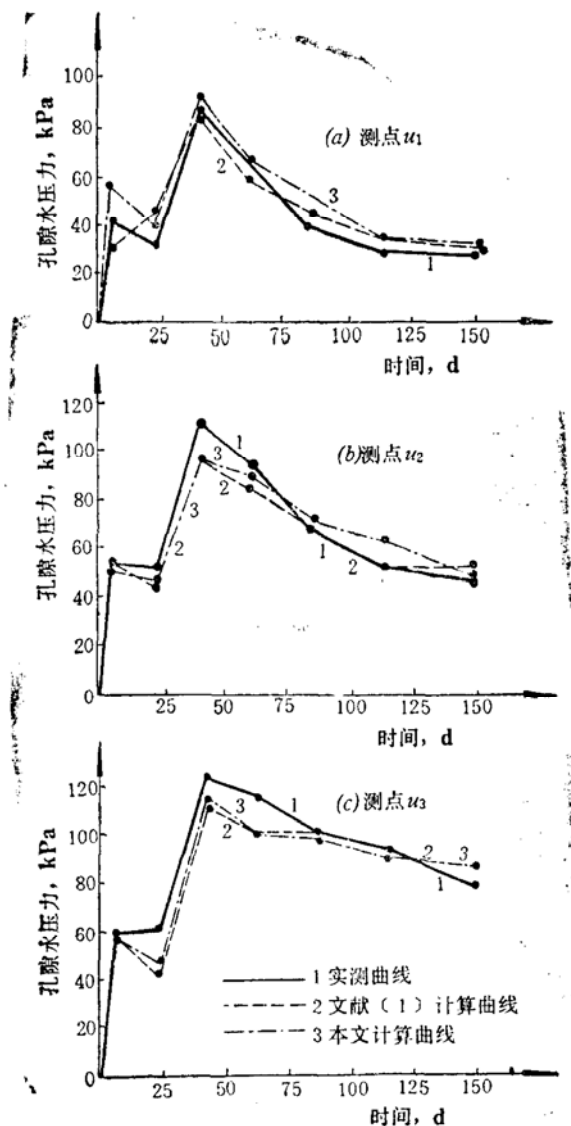


图4 孔隙水压力-时间曲线

四、结 语

1. 本文提出结点等价流量改变量, 等于渗流方向上的流速在单元域上与该方向上的结点等效面积改变量的乘积, 从而给出Biot固结的有限元连续性方程, 概念明确, 数学严谨, 方法简捷, 并具有一般性。

2. 与实测资料相比, 本文在结点数目略少的情况下, 计算精度一般仍高于常应变单元的计算精度, 这与有限元理论基本是一致的。

3. 有限元及其它数值方法已成为计算分析土工问题的有力工具。由于土工问题的复杂性, 理论或数值计算与实际情况之间不可避免地存在着某种程度的差异。应根据工程实践、理论研究和试验验证, 不断完善本构模型, 正确测取计算参数, 合理地考虑工程因素, 改进计算方法, 努力缩小计算与实际的差距。

参 考 文 献

- [1] 曾国熙, 龚晓南, 软土地基固结有限元法分析, 浙江大学学报, 1983年No. 1, pp. 1—14。
- [2] 南京水利科学研究院软土地基组, 用有限单元法计算软土地基的固结变形, 水利水运科技情报, 1977年No. 1, pp. 7—23。
- [3] Christian, J. T., Boehmer, J. W., Plane Strain Consolidation by Finite Elements, Proc. ASCE, SM4, Vol. 96, 1970. pp. 1435—1457.
- [4] 殷宗泽, 徐鸿江, 朱泽民, 饱和土等面固结问题有限元法, 华东水利学院学报, 1978年No. 1, pp. 71—82。
- [5] 殷宗泽, 在有限计算中考虑剪胀性问题, 第一届全国计算岩土力学研讨会论文集(一), 西南交通大学出版社, 1987年, pp. 86—91。
- [6] Christian, J. T., 二维和三维固结, 岩土工程数值方法(中译本), 第十二章, 王贻荪, 中国建筑工业出版社, 1985年, pp. 287—305。
- [7] 曾国熙, 龚晓南, 软粘土地基上一种油罐基础构造及地基固结分析, 浙江大学学报, Vol. 21, No. 3, 1987年, pp. 63—74。
- [8] Zinkiewicz, O. C., 有限元法(中译本, 下册), 尹泽勇, 柴家振译, 科学出版社, 1985年, pp. 600—640。
- [9] 上海石油化工总厂化工一厂, 上海工业建筑设计院, 浙江大学和南京水利科学研究所, 贮罐软基充水预压观测成果, 1976年。