

应用于岩石强度的双剪准则

王振山 李跃明 俞茂铨
(西安交通大学建筑与结构工程系)

一、前言

有关岩石强度的理论和实验研究已有许多报道。目前在岩石力学中应用较多的是莫尔-库仑理论^[1,2]。但这一理论只考虑了最大剪应力 τ_{13} 及其相应面上正应力 σ_{13} 的作用,而未考虑中间主剪应力 τ_{12} 或 τ_{23} 的作用,即没有考虑中主应力 σ_2 的影响,所以莫尔-库仑理论也可称之为单剪理论。有些实验表明这与实际不符,例如茂木清夫(Mogi, K.)经过多年研究认为 σ_2 对岩石破坏的影响是相当大的^[3],因此曾建议采用修正的八面体剪应力条件^[4],并提出了如下形式的破坏准则 $\tau_8 = f(\sigma_1 + \sigma_3 + \alpha\sigma_2)$;此外,文献[5]给出了一个岩石的三维破坏准则,该准则以第一和第三应力不变量表达,但这似乎只是一种数学上的组合,缺乏物理意义。另外,还有许多半经验形式的准则等^[6,7]。

本文将基于俞茂铨提出的双剪应力准则^[8],和以主剪应力作用面的菱形十二面体作为单元体,进一步考虑十二个面上相应正应力效应而得到的适合于脆性材料破坏情况的广义双剪应力准则^[9]应用于岩石强度的破坏判别。与莫尔-库仑强度准则相比,它的特点是不仅考虑了最大剪应力及其作用面上正应力的影响,而且还考虑了中间主剪应力(τ_{12} 或 τ_{23})及其相应面上正应力的影响。本文详细叙述了该准则的物理意义,讨论了 σ_2 对破坏的效应。因此,可以认为它是对莫尔-库仑理论的发展。

这一新的破坏理论与新近国外的某些实验结果较为符合。

二、广义双剪应力准则及其讨论

莫尔-库仑强度理论认为岩石的剪切破坏与破坏面上的正应力有关: $\tau = f(\sigma)$ 但它只考虑了一个主剪应力 τ_{13} 的作用。任何一个受力单元体中,一般都存在三个主剪应力,莫尔-库仑理论没有计入其它主剪应力 τ_{12} 或 τ_{23} 及其相应作用面上正应力 σ_{12} 或 σ_{23} 的影响,显然有其不足之处。由于最大主剪应力恒等于另两个主剪应力之和,三个主剪应力中只有两个独立量,因此,需要考虑两个主剪应力的共同作用,得出考虑三个主剪应力中两个较大的主剪应力之和达到某一极限值时,材料开始屈服的双剪应力屈服准则^[8,10]:

$$\tau_{13} + \tau_{12} = C \quad \text{或} \quad \tau_{13} + \tau_{23} = C^*$$

写成一般形式为

到稿日期: 1989年7月10日。

$$[|\tau_{13}| + |\tau_{12}| - C] \cdot [|\tau_{21}| + |\tau_{23}| - C] \cdot [|\tau_{31}| + |\tau_{32}| - C] = 0$$

在菱形十二面体中, 在剪应力的基础上再考虑相应作用面上正应力对剪切破坏的贡献, 即得广义双剪应力准则

$$\tau_{\text{双}} = f(\sigma_{\text{双}})$$

以线性形式表达, 则为^[9]

$$\left. \begin{aligned} F &= \tau_{13} + \tau_{12} + \beta(\sigma_{13} + \sigma_{12}) = C && (\text{当 } F \geq F' \text{ 时}) \\ F' &= \tau_{13} + \tau_{23} + \beta(\sigma_{13} + \sigma_{23}) = C && (\text{当 } F' \geq F \text{ 时}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 β 为反映正应力对剪切滑移的影响系数。 β , C 可由简单压缩、拉伸试验确定。设 σ_c , σ_t 分别为压缩、拉伸极限应力, 可求得

$$\beta = \frac{\sigma_t - \sigma_c}{\sigma_t + \sigma_c}, \quad C = \frac{2\sigma_t\sigma_c}{\sigma_t + \sigma_c}$$

设压拉特性系数 $k = \sigma_c/\sigma_t$, 则 $\beta = \frac{1-k}{1+k}$, $C = \frac{2\sigma_c}{1+k}$, 代入式(1)便得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \frac{k}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) &= \sigma_c && (\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + k\sigma_3}{1+k} \text{ 时}) \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - k\sigma_3 &= \sigma_c && (\text{当 } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + k\sigma_3}{1+k} \text{ 时}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

若以材料拉伸强度极限 σ_t 和拉压特性比 $\alpha = \sigma_t/\sigma_c$ 表示, 则上式可写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \frac{\alpha}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) &= \sigma_t && (\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \text{ 时}) \\ \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \alpha\sigma_3 &= \sigma_t && (\text{当 } \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha} \leq \sigma_2 \text{ 时}) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

由此可见, 广义双剪应力准则与莫尔-库仑准则极其相似, 所不同的是中间主应力 σ_2 的大小对破坏的影响在广义双剪应力准则中有着明确的反映。在 σ_2 接近 σ_1 或 σ_3 时, 广义双剪应力理论所运用的表达式也有所不同, 并且其屈服或破坏方式也有明显的区别^[9]。式(2)不仅适用于脆性材料, 而且适用于 $\sigma_t = \sigma_c$, 则 $k = 1$ 的塑性材料, 此时式(2)即为双剪应力屈服准则。对于岩石来说, 一般 $\sigma_c > \sigma_t$, 故 $k > 1$ 。现在讨论实验室常见的几种岩石应力状态:

1. $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3 > 0$ 应力状态

这是一种常见的岩石三轴试验加载情况, 因为此时 $\sigma_2 < \frac{\sigma_1 + k\sigma_3}{1+k}$, 故有

$$\sigma_1 = k\sigma_2 + \sigma_c \quad (4)$$

式(4)表明, 在此三轴应力状态下, 轴压极限破坏应力 σ_1 随 σ_2 的增加而增加且与压拉特性系数 k 有关。由于式(4)同样可写成 $\sigma_1 = k\sigma_3 + \sigma_c$, 即在 $\sigma_2 = \sigma_3$ 时, 本文准则与莫尔准则形式相

同,但在莫尔理论中,不计 σ_2 的贡献,故无论 σ_2 怎样,准则形式都为 $\sigma_1 = k\sigma_3 + \sigma_c$ 。

2. $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ 应力状态

在该应力状态下, $\sigma_2 > \frac{\sigma_1 + k\sigma_3}{1+k}$, 所以由式(3)得

$$\sigma_1 = k\sigma_3 + \sigma_c$$

在此应力状态下,与莫尔-库仑准则完全相同,所以莫尔准则是广义双剪应力准则的特殊情况。

3. $\sigma_3 = 0$ 的双轴应力状态

因为 $\sigma_3 = 0$,所以可将式(2)写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{k}{2}\sigma_2 + \sigma_c \quad \left(\text{当 } \sigma_2 \leq \frac{\sigma_1}{1+k} \right) \\ \sigma_1 &= 2\sigma_c - \sigma_2 \quad \left(\text{当 } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1}{1+k} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

在双向压应力状态下,当 σ_2 较小时破坏极限应力 σ_1 随 σ_2 的增加而增加,而当 σ_2 较大时则 σ_1 随 σ_2 减小。

广义双剪应力准则在二维应力空间的极限迹线如图1所示。

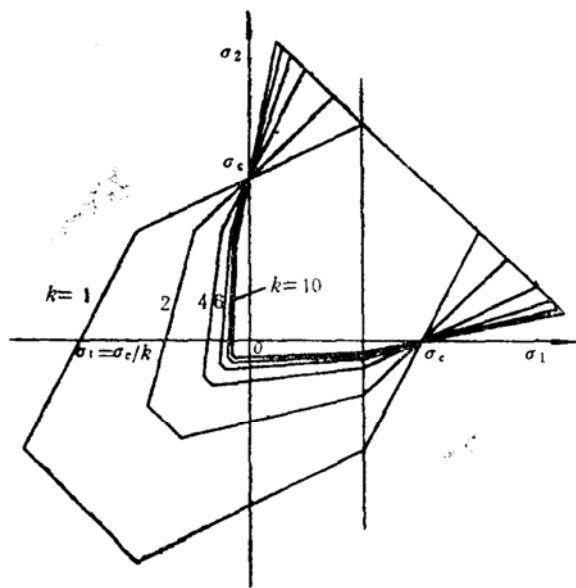


图1 广义双剪应力准则的平面极限迹线

三、与实验资料的比较

如图2所示,我们给出了双向压应力状态下广义双剪应力准则随 σ_2 变化与白云岩实验结

果^[6]的比较。原实验资料中未给出具体的 k 值,不过,可以看出 $\sigma_3 = 0$, $\sigma_2 < \frac{\sigma_1}{1+k}$ 时,广义双剪应力准则与该实验结果的符合趋势较莫尔-库仑准则及米赛斯(Mises)准则好些。破坏是典型的剪切破坏。

图3为印第安那石灰石的真两轴实验结果^[11]与本文准则的比较。

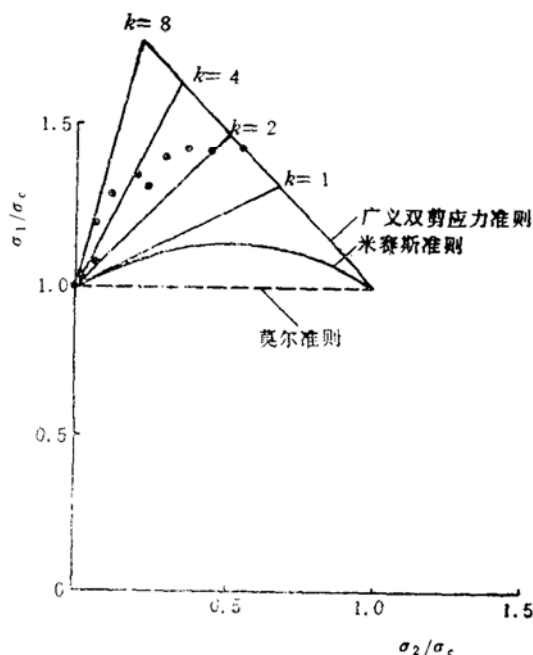


图2 σ_2 对破坏的影响与各准则的比较

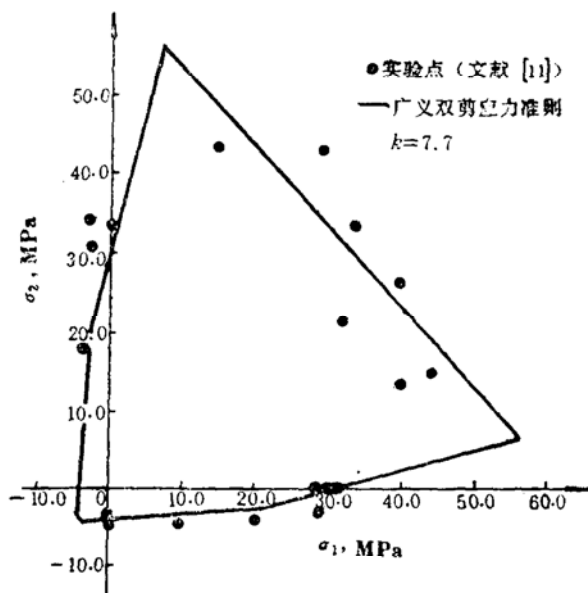


图3 广义双剪应力准则与Indiana石灰石真两轴实验结果的比较

从实验结果^[6,11]可以看出,岩石破坏极限应力都随中主应力 σ_2 的增加而略有增加,本文准则与实验结果吻合甚好。因此广义双剪应力准则较好地体现了 σ_2 对破坏的贡献,并且物理概念明确。

这里应指出,在 $\sigma_2 = \sigma_3$ 的三向应力状态下,式(4)只适用于 σ_2 较小于 σ_1 的情况。 $\sigma_2 = \sigma_3$ 很接近 σ_1 时,为等向压缩,此时对于岩土类材料,需补充以一个帽子模型,我们已另文讨论^[12]。 $\sigma_1 = \sigma_2$ 的任何应力状态,广义双剪应力准则与莫尔准则相同,这也可从图2,3中看到。

文献[6]认为,推广的米赛斯准则与实验结果比较不能令人满意。

四、结 束 语

材料的强度理论是一个复杂而重要的问题,在实际中迫切需要解决及完善。因此在该领域中,已依据不同假设提出了许多型式的准则和经验公式,其中有的没有计入中间主应力 σ_2 对破坏的效应,有一些考虑 σ_2 影响的,大多是经验或半经验公式,未能从理论上阐述明确的物理意义。此外,由于材料众多,它们的力学性质相差较大,似乎也不能用一个准则去说明各种不同材料的破坏问题。

本文应用文献[9]提出的广义双剪应力准则作为判别岩石破坏的强度准则,讨论了中主

应力 σ_2 对破坏的效应,物理概念较为明确,符合实验结果,在已知主应力大小的情形下,便于应用,具有一定的特色,较莫尔强度准则有了新的发展。可望成为一个新的岩石破坏准则。

参 考 文 献

- [1] Jaeger, J.C., Cook, N.C.W., Fundamentals of Rock Mechanics, 2nd edition, Chapman and Hall, 1976, p. 95.
- [2] 徐小荷、余静, 岩石破碎学, 煤炭工业出版社, 1984, pp. 11—18.
- [3] Mogi, K., Flow and Fracture of Rocks under General Triaxial Compression, 4th Inter. Conf. of Rock Mechanics, 1979.
- [4] 武汉水利电力学院, 土力学及岩石力学, 水利出版社, 1982, p.382.
- [5] Kim, M.K., Lade, P.V., Modelling Rock Strength in Three Dimensions, Inter. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstract, Vol. 21, No.1, 1984, pp.21—23.
- [6] Mogi, K., Effect of Intermediate Principal Stress on Rock Failure, J.Geophys. Res., 72, 1967, p. 5117—5131.
- [7] Maso, J., Lerau, J., Mechanical Behavior of Darney Sandstone (Vosges, France) in Biaxial Compression, Inter. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstract, Vol. 17, 1980, p. 109.
- [8] Yu Maohong, Twin Shear Stress Yield Criterion, Inter. J. Mech. Sci., Vol.25, No.1, 1983.
- [9] 俞茂铨、何丽南、宋凌宇, 双剪应力强度理论及其推广, 中国科学, A辑, Vol. 28, No.12, 1985, p.1113.
- [10] 俞茂铨、何丽南, 从纯剪切状态推导双剪应力屈服准则和双剪应变屈服准则, 双剪应力强度理论研究, 西安交通大学出版社, 1988.
- [11] Amadei, B., et al, Strength of Indiana Limestone in True Biaxial Loading Conditions, 24th Conf. of Rock Mechanics of America, Chapter 36, 1984, p.338.
- [12] 俞茂铨、李跃明, 广义剪应力双椭圆帽子模型, 第五届全国土力学与基础工程学术会议论文, 1987.