

堆石坝变截面防渗面板计算

叶梅新 倪国荣

(长沙铁道学院数理力学系)

一、概 述

近年来,高堆石面板坝在我国逐渐得到推广,其原因是采用现代机械化施工,变人工抛石为机械震碾堆石,使工期大为缩短,不均匀沉陷得到控制,堆石质量有了保障。这样,混凝土防渗面板的内力计算便至关重要了。

诚然按单宽梁考虑,用等截面弹性地基梁方法不难求解面板的内力^[1]。但高堆石坝面板却复杂得多:①截面由于荷载和结构要求,呈梯形变截面;②“地基”(堆石体)抗力不再是常数;③荷载多为局部三角形、折线形;④支承条件有滑缝式、铰接乃至自由等。若仍按传统的等截面等弹性抗力系数、分段等截面法^[2,3]或其它近似法^[4],则其基本假定尚待斟酌,这在某种程度上影响对高堆石坝方案的可行性研究。

严格地讲,应把面板和堆石体合成为一个结构体考虑,把堆石的抗力作用按理想弹性、理想弹塑性乃至非线性作有限元分析,我国不少科研单位正在进行此课题的研究。对初步设计而言,本文采用的加权残数法和近似解析法,对不同堆石分区、级配和碾压质量,选定相应的堆石抗力系数,编制了可在微机上实现的 FORTRAN 程序,可进行大量的对比计算,以达到设计精度。同样,可对有限元计算结果、实测资料进行反馈分析,为高堆石坝设计提供有用的参数。

二、加权残数法的控制方程和边界条件

堆石坝典型剖面图和计算简图如图 1, 2 所示。

根据微元横向力平衡条件和 $M = -EJw''$, $Q = M'$ 得控制方程

$$\frac{1}{12}EC^3(x^3w'')'' + K(x)w - q(x) = 0 \quad (1)$$

式中 $w, M, Q, q(x), K(x)$ ——分别为梁的位移(挠度)、弯矩、剪力、外荷载(坐标 x 的函数)和抗力系数; E ——梁的弹性模量, $E = \frac{E^*}{1 - \mu^{*2}}$, 其中 E^*, μ^* 为面板弹性模量和泊松

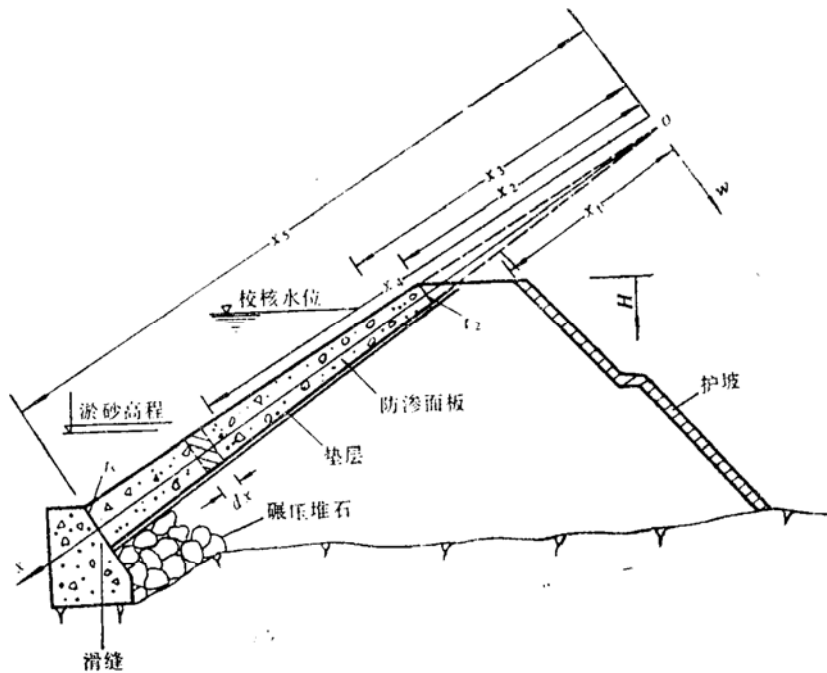


图1 面板堆石坝结构示意图

比, $C = t_5/x_5$, t_5 , x_5 为梁(单宽面板)较厚端的厚度和 x 向坐标。内力正负号见图2, $q(x)$, w 向内为正。

边界条件(自由端以梁顶坐标 x_2 为例, 其它以梁底坐标 x_5 为例):

$$\left. \begin{aligned} \text{自由端 } M_{x-x_2} &= (-EJw'')_{x-x_2} = 0; \\ Q_{x-x_2} &= (-EJw''')_{x-x_2} = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{铰支端 } M_{x-x_5} &= (-EJw'')_{x-x_5} = 0; \\ w_{x-x_5} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{滑缝端 } M_{x-x_5} &= (-EJw'')_{x-x_5} = M_F; \\ Q_{x-x_5} &= (-EJw''')_{x-x_5} = Q_5 \end{aligned} \right\}$$

(2)

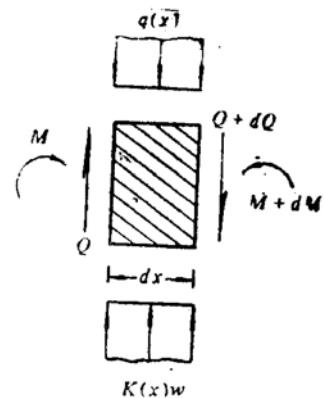


图2 面板(单宽)微元内力图

实际施工中一般不用固定端, 故不列出。滑缝端(面板底部)属弹性连接, 即面板与底座有伸缩缝分开, 缝中有沥青砂浆等填料。 M_F 的作用使缝口一面受拉一面受压。受压处可考虑砂浆压缩模量, 受拉处可考虑止水片的拉伸模量(有时可取其为零, 乃至不计 M_F 值。 Q_5 可按面板轴向力(x 方向力)与填料摩擦系数乘积而定。现代高堆石面板坝发展趋势是尽量减少水平分缝, 因震碾堆石使不均匀沉陷得到了控制。

面板厚度(变截面)按经验公式 $t = 0.3 + \xi H$ 而定^[8], H 为自坝顶向下算的高度。通常 $\xi = 0.002 \sim 0.003$; 文献[3]给出 $\xi = 0.0060 \sim 0.0075$ (系国外已建高堆石坝取值) 看来偏大, 本文计算结果表明 ξ 值可小些。

加权残数法(MWR)的优点是只要给定控制方程和边界条件, 即使不存在泛函也能求解^[5,9], 其方法简单易懂、程序工作量大、机时少、便于工程技术人员采用。

本文采用配点法及最小二乘配点法。

$$\text{设位移函数为 } w = \sum_{j=1}^n C_j (x/x_5)^{j-2} \quad (3)$$

式中 C_j ——待定常数。

通常 w 对式 (1)、(2) 均不满足, 这样将其代入时, 在 $x_2 < x < x_5$ 域必然会产生残数 R_i 。现将 R_i 及有关 M , Q 表达式罗列于下:

$$R_i = \sum_{j=1}^n C_j \left\{ \left[\frac{EC^3 (j-1)(j-2)^2(j-3)}{12x_i} + K(x_i) \right] \left(\frac{x}{x_5} \right)^{j-2} \right\} - q(x_i) \quad (4)$$

$$M = -\frac{EC^3}{12} \sum_{j=1}^n C_j (j-2)(j-3) \left(\frac{x}{x_5} \right)^{j-3} x \quad (5)$$

$$Q = -\frac{EC^3}{12} \sum_{j=1}^n C_j (j-1)(j-2)(j-3) \left(\frac{x}{x_5} \right)^{j-3} \quad (6)$$

式中 j ——试函数 w 表达式中的项数; i ——梁内配点数列, 与配点位置坐标 x_i 相对应, $i = 1, 2, \dots, m-4$, 通常取 $m = n$, 另外四个配点由上下端边界四个边界条件定, 任一端为两个。

对自由端 ($x = x_2$) 边界残数为

$$R = M_{x=x_2}; \quad R = Q_{x=x_2} \quad (7)$$

对铰支端 ($x = x_5$) 边界残数为

$$R = M_{x=x_5}; \quad R = w_{x=x_5} \quad (8)$$

对滑缝端 ($x = x_5$) 边界残数为

$$R = M_{x=x_5} - M_5; \quad R = Q_{x=x_5} - Q_5 \quad (9)$$

对一定的梁, 边界上 $x = x_2$ 及 $x = x_5$ 共有四个边界残数。内部有 $(m-4)$ 个残数。可以把它们综合写成矩阵形式

$$\{R\} = [A]\{C\} - \{q\} \quad (10)$$

式中 $\{R\}$, $\{q\}$ —— m 元列阵; $[A]$ —— $m \times n$ 矩阵; $\{C\}$ ——待定系数列阵。

若取 $m = n$, 令 $\{R\} = 0$, 即可求出待定系数列阵 $\{C\}$, 进而求出位移和内力, 此即配点法。

如果令残数的平方和 I 取最小值, 即

$$I = \{R\}^T \{R\} = ([A]\{C\} - \{q\})^T ([A]\{C\} - \{q\})$$

$$\frac{\partial I}{\partial C_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

由此得线性方程组

$$[A]^T [A] \{C\} = [A]^T \{q\} \quad (11)$$

解出 $\{C\}$, 进而求出位移、内力, 此即最小二乘配点法。

在堆石坝中荷载(参见图2)如下:

$$q(x) = \begin{cases} \frac{q_s x}{x_5} & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \frac{q_s x}{x_5} + \frac{q_w(x - x_3)}{x_5 - x_3} & x_3 \leq x \leq x_4 \\ \frac{q_s x}{x_5} + \frac{q_w(x - x_3)}{x_5 - x_3} + \frac{q_b(x - x_4)}{x_5 - x_4} & x_4 \leq x \leq x_5 \end{cases}$$

式中 q_s , q_w , q_b ——分别为梁底的自重、水压和淤砂压。

堆石抗力系数 $K(x)$ 是堆石对面板的抗力分布特征。由于堆石的本构关系十分复杂, 严格地讲属非线性弹塑性范畴, 不易精确给定。我们对龙潭堆石坝大量对比计算后发现, K_s 值对内力不甚敏感, K_s 数量级差10倍对内力影响仍不大, 这可以从控制方程(1)以及后面解析解中发现, 内力是和 K_s 的四次方根有关的。这样, 我们可以根据堆石实际分区、级配、碾压质量, 参考已建工程参数和实测堆石变形资料(即反馈法)给定本工程的 K_s 值波动范围, 从而进行计算。实际上, 堆石坝抗力变化影响因素很多, 是一个“模糊”数学值, 因此, 这样选定在工程上是可行的。

根据堆石体受力特征和工程类比, $K(x)$ 值采用如图3所示。

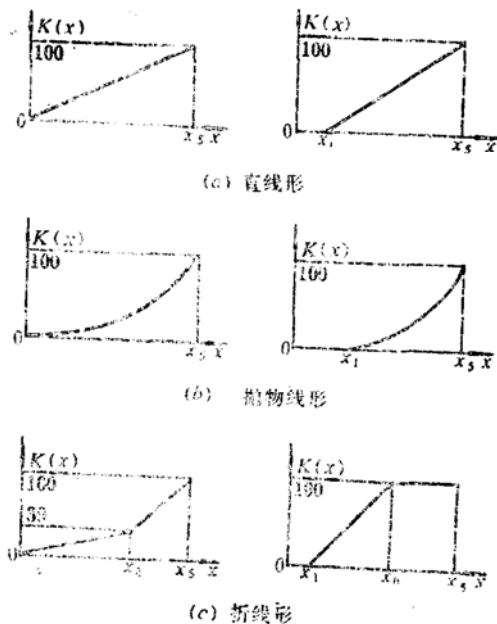


图3 抗力系数分布

$$\text{线性分布} \quad K(x) = K_s(x - x_1)/(x_5 - x_1) \quad (12)$$

$$\text{抛物线分布} \quad K(x) = K_s(x - x_1)^2/(x_5 - x_1)^2 \quad (13)$$

折线分布

$$K(x) = \begin{cases} K_0 + \frac{x-x_1}{x_0-x_1} & x_1 \leq x \leq x_0 \\ K_0 + \frac{(x-x_0)(K_5-K_0)}{x_5-x_0} & x_0 \leq x \leq x_5 \end{cases} \quad (14)$$

对于高堆石坝,可能还有其它更复杂的分布形式,但对加权残数法而言,只要给定 $K(x)$, 计算就没有什么困难。

我们对有着不同几何参数 ($\xi = 0.002 \sim 0.0075$)、不同抗力系数的分布和数值,有着不同分缝段长度的各种面板编制了适于微机计算的通用FORTRAN程序,并结合龙潭面板坝作了大量的对比计算,找到了某些规律性(见表1~6)

表1

不同形式 $K(x)$ 对 M 的影响

$K(x)$ (MN/m^3)		不同 z 处的 M 值 ($\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$)							$M_{\max}$ (相应之 z)
		0.0	1.2	2.4	4.0	6.0	10.2	18.2	
		0.6	1.8	3.0	5.0	8.2	14.2	>20	
直线形	$x_1 = 0$ $K_5 = 100$	0.0 507.9	768.4 856.5	827.4 731.3	510.0 295.0	133.3 -237.5	-317.4 -2.4	1.3 0.0	856.5 (1.8)
	$x_1 \neq 0$ $K_5 = 100$	0.0 502.5	761.5 847.4	817.1 720.8	503.4 293.4	137.3 -192.7	-308.8 -0.8	-2.0 0.0	847.4 (1.8)
抛物线形	$x_1 = 0$ $K_5 = 100$	0.0 510.6	770.0 855.7	828.5 727.8	506.5 290.0	131.1 -19.5	-26.6 -7.9	-2.4 0.0	855.7 (1.8)
	$x_1 \neq 0$ $K_5 = 100$	0.0 423.3	731.7 820.9	737.3 678.7	576.5 390.4	153.4 -84.8	-104.9 164.3	-13.8 0.0	820.9 (1.8)
折线形	$x_1 = 0$ $K_0 = 30$ $K_5 = 100$	0.0 502.0	748.0 742.1	654.2 529.8	233.9 4.0	-84.3 -33.1	154.0 260.6	37.9 0.0	776.0 (1.6)
	$x_1 \neq 0$ $K_0 = K_5 = 100$	0.0 524.3	786.2 875.0	846.2 750.3	529.8 313.5	149.3 -31.2	-46.5 -2.7	0.8 0.0	875.0 (1.8)

注: $x_1 = 97.35\text{m}$, $x_0 = 249.6\text{m}$, $x_5 = 259.6\text{m}$, $z = x_5 - x$; 当 $z > 22\text{m}$ 时, $M \approx 0$; $z = 0$ 为铰支端。

表2

 K_5 对 $M_{\max}$, $w_{\max}$ 的影响

K_5 (MN/m^3)	30	40	70	100
$M_{\max}$ ($\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$)	1542	1338	1001	847.4
$w_{\max}$ (m)	0.032	0.024	0.014	0.010

注: $t_5 = 0.8\text{m}$, $x_1 = x_2 = 97.35\text{m}$, $x_5 = 259.6\text{m}$ 。

表3

 t_5 对 $M_{\max}$, $w_{\max}$ 的影响

t_5 (m)	0.8	1.0	1.3	1.6
$M_{\max}$ ($\text{kN} \cdot \text{m}/\text{m}$)	1542	2142	3135	4271
$w_{\max}$ (m)	0.032	0.032	0.032	0.032

注: $x_1 = x_2 = 97.35\text{m}$, $K_5 = 30\text{MN}/\text{m}^3$, $x_5 = 259.6\text{m}$ 。

表 4

下支座滑缝对 $M_{\max}$ 的改善

$Q_5(\text{kN/m})$	-1470	-1100	-900	-600	-300	-147	-73.5
$M_{\max}(\text{kN}\cdot\text{m/m})$	1542	1117	947.6	631.8	315.9	154.0	77.0
$w_5(\text{m})$	0	0.007	0.012	0.018	0.024	0.027	0.029

注: $x_1 = x_2 = 97.35\text{m}$, $K_5 = 30\text{MN/m}^3$, $x_5 = 259.6\text{m}$ 。

表 5

 x_1 对 $M_{\max}$ 的影响

$x_1(\text{m})$	0	14.6	29.2	43.8	58.41	73.01	86.62	97.35
$M_{\max}(\text{kN}\cdot\text{m/m})$	1547	1545	1545	1544	1544	1545	1537	1542

注: $x_2 = 97.35\text{m}$, $x_5 = 259.6\text{m}$, $K_5 = 30\text{MN/m}^3$ 。

表 6

水平分缝长 L 对 $M_{\max}$, $w_{\max}$ 的影响

$L(\text{m})$	20			8			6		
$M_{\max}(\text{kN}\cdot\text{m/m})$	230.3	153.5	76.8	589.8	393.2	196.6	496.2	330.8	165.4
$Q_5(\text{kN/m})$	-219	-146	-73	-600	-400	-200	-600	-400	-200
$w_5(\text{m})$	0.026	0.027	0.029	0.017	0.021	0.026	0.015	0.020	0.025

注: $x_1 = x_2 = 97.35$, $t_5 = 0.8\text{m}$, $K_5 = 30\text{MN/m}^3$, $x_5 = 259.6\text{m}$ 。

每种情况程序语句仅约百余条,输入数据12~14个,所费机时最多不到5min,这对有限元法来说是办不到的。全部运算采用双精度,在IBM微机上进行,用列主元消去法求解。配点数 $n=70$ 。因配点法与最小二乘配点法结果相近,仅给出配点法成果。

某高堆石坝面板参数为: $x_2 = x_3 = 97.35\text{m}$, $x_4 = 200\text{m}$, $x_5 = 259.6\text{m}$; $x_1 = 0 \sim 97.35\text{m}$ 不等; $t_5 = 0.8 \sim 1.5\text{m}$ 不等(按 $\xi = 0.002 \sim 0.0075$ 选); $K_5 = 30 \sim 100\text{MN/m}^3$ 不等; $E = 2.1 \times 10^4\text{MPa}$, $q_w = 0.9\text{MPa}$ 。按底端边界为铰支计算(见表1~5);按 $t_5 = 0.8\text{m}$, $K_5 = 30\text{MN/m}^3$ 绘制面板弯矩图如图4所示。

如果 $x_1 \sim x_5$ 等数据同上, $t_5 = 0.8\text{m}$, $K_5 = 30\text{MN/m}^3$,上端自由、下端滑缝,按不同滑缝摩擦力 Q_5 (不计 M_5)绘制面板弯矩图于图5。

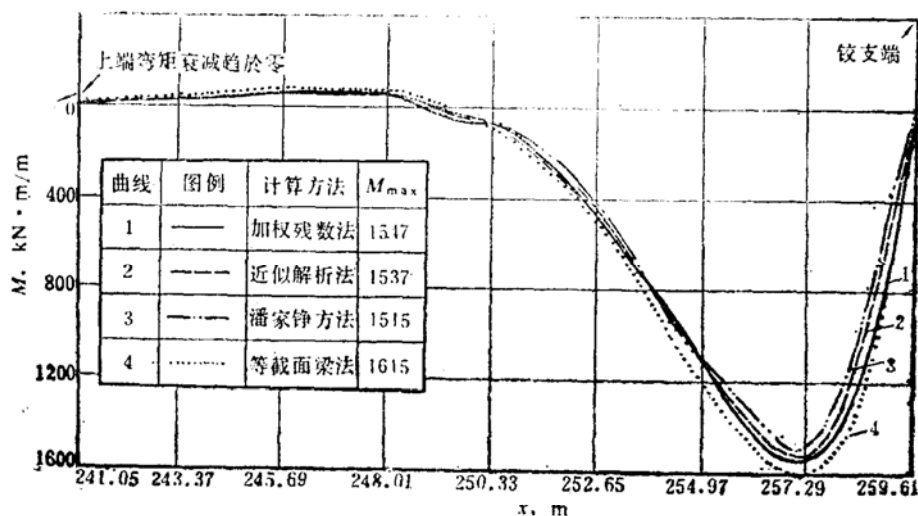


图4 高堆石坝面板弯矩图(上端自由下端铰支)

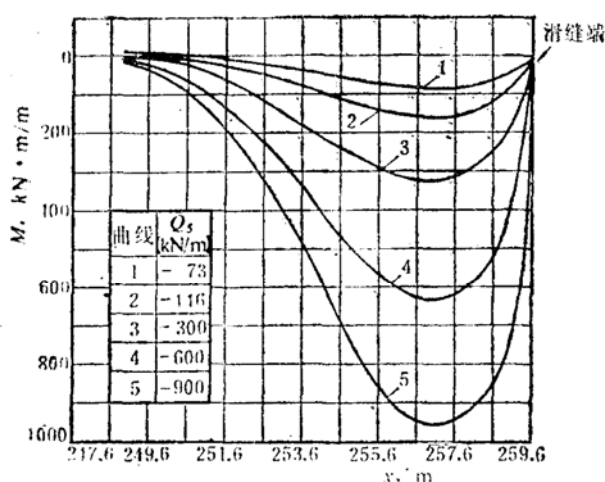


图5 高堆石坝面板弯矩图(上端自由下端滑缝)

三、近似解析解

加权残数法的成果之一是发现弹性抗力系数 $K(x)$ 的尖灭点位置 x_1 (文献[2]、[4]均按直线分布)的取值对整个面板最大弯矩数值及位置影响甚微(见表5), 这对问题的简化有重大的实用意义。这样, 我们可以将控制方程(1)和式(12)~(14)中略去 x_1 项的影响(令 $x_1 = 0$), 得如下定解方程:

$$(x^3 w'')'' + \rho^4 x w = -\frac{q(x)x_5}{aK_5} \quad (15)$$

式中 $\rho = 1/\sqrt{a}$; $a = \sqrt{\frac{EC^3 x_5}{12K_5}}$; x 仍从尖灭点算起。

潘家铮总工程师曾给出此方程的米歇尔(Michill)级数解, 较为简便^[2,4]。本文在此作了如下三点改进(图6):

1. 针对梯形截面梁(顶厚 $t_2 \neq 0$, 见图6(b))将文献[4]假定的楔形截面($t_2 = 0$, 图6(d))恢复为实际情况, 这样, 整个梁的刚度(特别是对梁上端)有了较大的改变。笔者统计了国外48座堆石坝¹⁸, 其平均坝高56m, 平均顶厚0.27m, 底厚0.59m。这样一改, 梁的计算坐标原点就从坝顶移到两腰延拓线的尖灭点(图1, 图6(b)), 而该点至坝顶的平均长度 x_2 相当于平均坝高, 故对计算有相当的影响。

2. 对 $K(x)$ 的处理, 文献[4]取其零点也在坝顶($x_2 = 0$), 即有 $K(x) = K_5(x - x_2)/(x_5 - x_2)$, 而本文则取为 $K(x) = (x - x_1)K_5/(x_5 - x_1)$, 其零点在 x_1 处, 这样在坝顶 x_2 处 $K_2 \neq 0$, 这符合堆石体受力变形规律(坝顶位移应为有限值), 即使取 $x_1 = 0$, 在 x_2 处 $K_2 \neq 0$ 。

3. 文献[4]采用米歇尔函数, 当宗量大于30便无表可查(一般数学手册中也不易查到), 本文贝塞耳(Bessel)解采用凯尔文(Kelvin)函数, 当宗量大于10时, 可用近似解析函数直接计算, 略去推导过程^{17,8}, 写出式(14)的解如下:

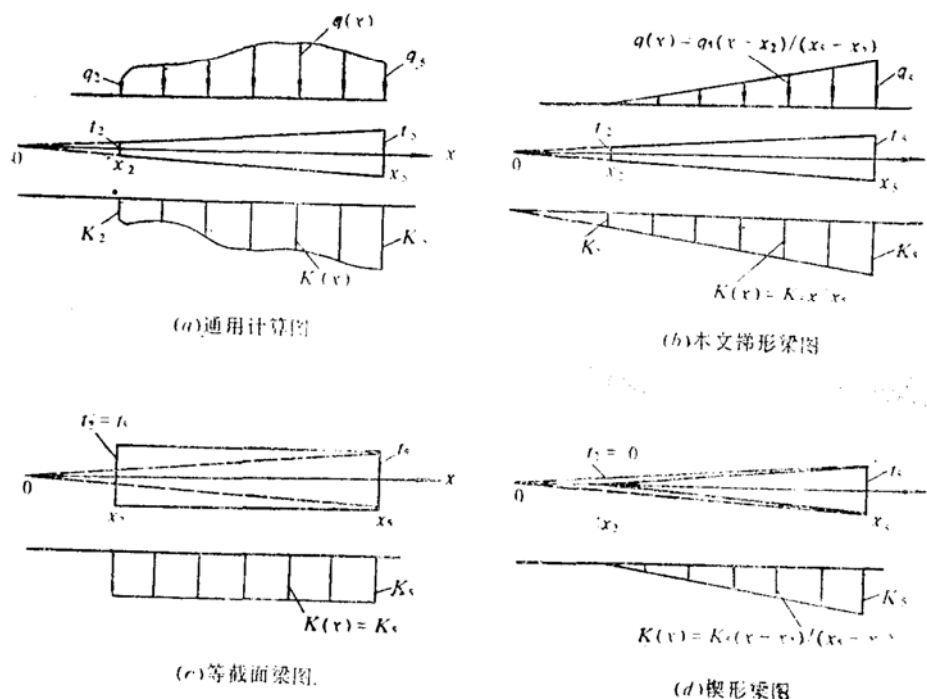


图6 几种抗力系数计算图(图(c)、(d)的荷载同(b), 略)

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{1}{\sqrt{x}} (C_1 ber' y + C_2 bei' y + C_3 ker' y + C_4 kei' y) + w_T \\
 \theta &= -\frac{1}{2x\sqrt{x}} [C_1 (2ber' y + ybei y) + C_2 (2bei' y - ybery) \\
 &\quad + C_3 (2ker' y + ykei y) + C_4 (2kei' y - ykery)] + w_T' \\
 M &= -\frac{EC^3}{48} \sqrt{x} [C_1 (-y^2 bei' y + 4ybei y + 8ber' y) + C_2 (y^2 ber' y \\
 &\quad - 4ybery + 8bei' y) + C_3 (-y^2 kei' y + 4ykei y + 8ker' y) \\
 &\quad + C_4 (y^2 ker' y - 4ykery + 8kei' y)] + M_T \\
 Q &= -\frac{EC^2}{4\sqrt{3}} \sqrt{x} [C_1 (-ybery + 2bei' y) - C_2 (ybei y + 2ber' y) \\
 &\quad + C_3 (-ykery + 2kei' y) - C_4 (ykei y + 2ker' y)] + M_T'
 \end{aligned} \tag{15}$$

式中 θ ——转角; $C_1 \sim C_4$ ——待定常数, 由式(7)~(9)选定四个; y ——无量纲变数, $y = 2\rho\sqrt{x}$, 当 $y \leq 10$ 时有表可查, 对某些高堆石坝, $y \gg 10$, 可由其近似解析式计算^[7,8]; 其它符号同前, 下标 T 代表特解, 视荷载 $q(x)$ 而定。

$$\begin{aligned}
 \text{式中 } bery &= 1 - \frac{1}{(21)^2} \left(\frac{y}{2}\right)^4 + \frac{1}{(41)^2} \left(\frac{y}{2}\right)^8 \dots\dots \\
 &\quad + (-1)^{n-1} \frac{1}{[(2n-2)!]^2} \left(\frac{y}{2}\right)^{4(n-1)} + \dots\dots
 \end{aligned}$$

$$bey = \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{y}{2}\right)^6 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{[(2n-1)!]^2} \left(\frac{y}{2}\right)^{4n-2} + \dots$$

$$kery = (\ln 2 - \gamma - \ln y)bery + \frac{\pi}{4} bey - \frac{1}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{y}{2}\right)^4 + \frac{1}{(4!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \left(\frac{y}{2}\right)^8 - \dots$$

$$keiy = (\ln 2 - \gamma - \ln y)bey - \frac{\pi}{4} bery + \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \frac{1}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{y}{2}\right)^6 + \dots$$

bey 及 $bery$ 与 C_1, C_2 有关。当 y (因而 x)减少时, 挠度、转角及所有内力(指通解项)按振荡方式衰减, 它们描述发源于梁下端的边界力引起的干扰。同样, $keiy, kery$ 与 C_3, C_4 有关, 相应于梁上端边界力的干扰。 γ 为欧拉常数。式(15)中 ρ 含 K_5 的四次方根, 可见 K_5 影响不太大。

在许多工程实例中, 两端干扰沿梁长度方向衰减得很快, 可以彼此分离, 故在梁下端仅采用 C_1, C_2 项, 上端仅采用 C_3, C_4 项, 这与长薄壳边界效应相似^[7,9], 从而使计算大为简化。

若荷载及抗力分布复杂, 则可用分段直线方法, 在交接处按 w, θ, M, Q 四个协调条件迭代求解。

现以满梁三角形水荷载($x_3 = x_2$)为例说明之。此时荷载 $q(x) = q_5(x - x_2)/(x_5 - x_2)$, $K(x) = K_5 x/x_5$, 先由式(15)求出特解项

$$w_T = \frac{q_5 x_5 (x - x_2)}{K_5 (x_5 - x_2) x}; \quad w_T' = \frac{q_5 x_2 x_5}{K_5 (x_5 - x_2) x^2}; \quad M_T = \frac{EC^3 q_5 x_2 x_5}{6K_5}; \quad M_T' = 0$$

仍以加权残数法算例中的基本参数进行计算, 其结果与加权残数法极为吻合(见图4)。

四、结 论

1. 本文建议的加权残数法和近似解析法对面板堆石坝的面板计算十分简洁有效, 能满足高堆石坝初步设计关于面板计算的精度要求, 同时也可以推广应用于解变截面变弹性抗力系数地基梁的其它工程问题(例如, 由相似比拟可解决变截面调压井、非均质层状围岩的矿井衬砌内力分析)。

2. 对底部铰支的面板, 最大弯矩均发生在底部附近, 这是由类似于薄壳边界效应引起的^[9]。对高堆石坝而言, 其值很大, 靠增大截面和配筋很难解决。计算(表4)表明, 底部采用滑缝式支座, 能有效地降低高堆石坝面板的内力。因此 $\xi = 0.006 \sim 0.0075$ 似偏大, $\xi = 0.002 \sim 0.003$ 较宜。

3. 设水平缝(一般约15m设一道)并不能有效降低铰支面板内力(见表6)。鉴于在震碾堆石、级配合理条件下, 堆石体不均匀沉陷在面板施工时已得到控制, 故从国内外发展趋势看, 取消水平缝是可行的。而分缝过多容易在分缝处造成因施工不当而产生的渗漏。

4. 在所有的解析法中, 本文凯尔文函数法与加权残数法结果最为吻合, 而其它方法在

梁下端尚为接近,但在梁上端,因截面厚度、抗力系数假设与实际情况相差较大,有时就会出现较大误差。

5. 严格地讲,堆石体与面板的抗力作用应考虑堆石体的本构关系,用非线性有限元作进一步分析。而本文成果可供其作为对比计算、实测堆石体变形反馈计算提供合理设计参数之用。我们期望在这方面有更深入的研究成果。

参 考 文 献

- [1] 魏琰,地下结构物衬砌计算,人民铁道出版社,1961年,第43~50页。
- [2] 顾淦臣、陈明致,土坝设计,中国工业出版社,1963年,第344~352页。
- [3] 陈明致、金来鎏,堆石坝设计,水利出版社,1982年,第142~175页。
- [4] 潘家铮,刚性斜墙的应力计算,中国水利,1958年第5期。
- [5] 徐次达,加权残数法解固体力学问题,力学与实践,1980年第4期,第12~20页。
- [6] 徐次达等,最小二乘配点法解薄板弯曲问题,上海力学,1980年第2期,第17~26页。
- [7] W.弗留盖,壳体中的应力,中国工业出版社,1965年,第325~331页。
- [8] 刘颖,圆柱函数,国防工业出版社,1983年,第133~152页。
- [9] 倪国荣,球形分岔管的内力计算,水利学报,1980年第5期,第68~75页。