

节理岩体的弹性模型

张 武

张宪宏

(水利水电科学研究院, 北京)

(清华大学, 北京)

提 要

本文认为受多向节理切割的岩体是一种近似各向异性的、连续的弹性介质, 探讨了成层(单向)、双向和多向节理岩体弹性关系的表示, 这种表示基于节理材料和完整岩体的弹性常数及节理的产状参数。

一、引 言

天然岩体, 由于其地质演变的历史和自然营力的作用, 常常包含成组的节理。这些节理改变了原来均匀、完整岩体各向同性的性质。大坝地基和隧洞围岩的岩体, 常常因实施固结灌浆, 原有的裂隙被充填而形成的“人工节理”, 也将对岩体的力学性质, 如变形特性带来某些影响。

为了考虑节理的影响, 在有限元分析中, 经常采用所谓节理单元等特殊的单元形式。这种处理方法存在两个困难, 一是天然岩体中的节理是广泛分布的, 如果一一作为特殊单元处理, 势必使有限元分析变得十分烦杂; 二是天然岩体中节理分布难于确定。因而, 以某种简单方法笼统考虑节理对岩体力学特性的影响, 把包含成组节理的岩体视为各向异性的节理岩体, 似乎具有一定的意义。

当然, 节理岩体的弹性性质与一般各向异性体的弹性有所不同。后者是一种连续均匀的材料, 但各点的弹性都随方向而变, 前者则是由原来均匀, 各向同性的岩体受不同方向的节理切割而成, 弹性随方向的变化是由于材料组成存在着间断面。但是, 如果节理很薄, 分布较密且均匀, 则节理岩体也就接近于一般的各向异性体, 这种接近是指两者在某些特性, 比方说, 弹性上的相似。

一般各向异性弹性体的应力应变关系可以描述为^[1]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= d_{11}e_x + d_{12}e_y + d_{13}e_z + d_{14}\gamma_{xy} + d_{15}\gamma_{yz} + d_{16}\gamma_{zx} \\ \sigma_y &= d_{21}e_x + d_{22}e_y + d_{23}e_z + d_{24}\gamma_{xy} + d_{25}\gamma_{yz} + d_{26}\gamma_{zx} \\ \sigma_z &= d_{31}e_x + d_{32}e_y + d_{33}e_z + d_{34}\gamma_{xy} + d_{35}\gamma_{yz} + d_{36}\gamma_{zx} \\ \tau_{xy} &= d_{41}e_x + d_{42}e_y + d_{43}e_z + d_{44}\gamma_{xy} + d_{45}\gamma_{yz} + d_{46}\gamma_{zx} \\ \tau_{yz} &= d_{51}e_x + d_{52}e_y + d_{53}e_z + d_{54}\gamma_{xy} + d_{55}\gamma_{yz} + d_{56}\gamma_{zx} \\ \tau_{zx} &= d_{61}e_x + d_{62}e_y + d_{63}e_z + d_{64}\gamma_{xy} + d_{65}\gamma_{yz} + d_{66}\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

且 $d_{ij} = d_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$)

对于以Z轴为弹性主向的正交各向异性体,

$$d_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6; j = 5, 6; i \neq j)$$

如果进一步只考虑平面应变的情形, 且以Z方向作为主应力方向之一, 则表示其应力应变关系的弹性矩阵, 可以用六个独立的常数表示:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2)$$

其中 $\{\sigma\} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T$ $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T$

$$[D] = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \quad (d_{ij} = d_{ji}; i, j = 1, 2, 3)$$

以一般的试验, 确定上述六个常数是异常困难的, 而比较容易得到的实际资料, 仅仅是完整岩体的弹性常数 E_r, ν_r 和节理材料的弹性常数 E_j, ν_j , 以及节理的产状参数 (包括节理所占宽度的比值 β 及其方向角 α) 见 (图1)。我们先考虑平面的情形, 假设节理走向与弹性主向 (Z轴) 重合。

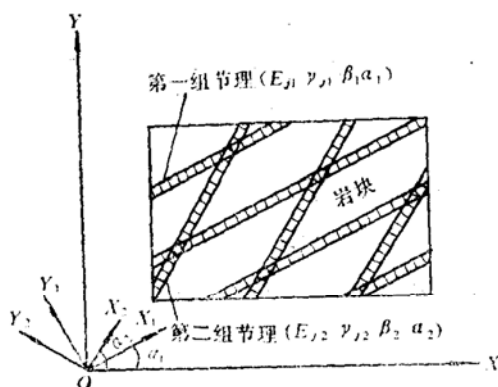


图1 节理岩体

关于节理岩体的物理模型, 国内外学者已经有了比较多的研究。格拉弟 (Gerrard) 基于典型棱柱体应变能不变的假设, 导出了具有一组、二组、三组相互正交节理岩体的弹性等效模型^[2]。由于其数学表达的局限性, 未能推广至更一般的情形。潘家铮以节理、完整岩块及其组合体之间的应力、位移协调关系导出了成层 (单向) 节理岩体的弹性常数^[8]。高安泽通过引入节理切向与法向刚度对问题简化后, 以矩阵方法递推包含任意多组节理的岩体的弹性矩阵。本文基于与文献[3]相同的思想, 与文献[4]相似的方法探讨了考虑单向、双向、多向节理弹性常数的节理岩体的弹性模型。

二、成层节理岩体的弹性矩阵

假设均匀、完整的岩体受到第一组方向为 α_1 的节理切割而变为成层节理岩体。取其中微小面积, 包含节理及被节理切割的岩块 (图2(a))。如果把节理和岩块分别集中起来 (图2(b)), 并假设在“集中”前后, 材料的弹性矩阵近似相同, 集中后的节理宽度为 $\beta_1 dy$ 。

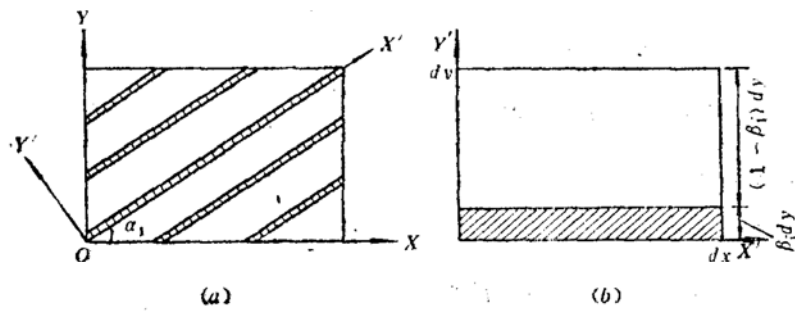


图2 成层节理岩体

由于节理岩体的面积取得足够小, 可以认为其应力应变状态不随位置而变, 在一定的坐标系中, 节理的应力应变状态分别为(图3(a))

$$\{\sigma\}_j = [\sigma_{xj} \quad \sigma_{yj} \quad \tau_{xyj}]^T; \quad \{\varepsilon\}_j = [\varepsilon_{xj} \quad \varepsilon_{yj} \quad \gamma_{xyj}]^T$$

岩块的应力、应变状态分别为(图3(a))

$$\{\sigma\}_r = [\sigma_{xr} \quad \sigma_{yr} \quad \tau_{xyr}]^T; \quad \{\varepsilon\}_r = [\varepsilon_{xr} \quad \varepsilon_{yr} \quad \gamma_{xyr}]^T$$

如果以成层节理岩体的应力应变状态(图3(b))

$$\{\sigma\}_1 = [\sigma_{x1} \quad \sigma_{y1} \quad \tau_{xy1}]^T; \quad \{\varepsilon\}_1 = [\varepsilon_{x1} \quad \varepsilon_{y1} \quad \gamma_{xy1}]^T$$

代替上述节理和岩块的应力应变状态, 则它们之间应满足:

(1) 平衡条件

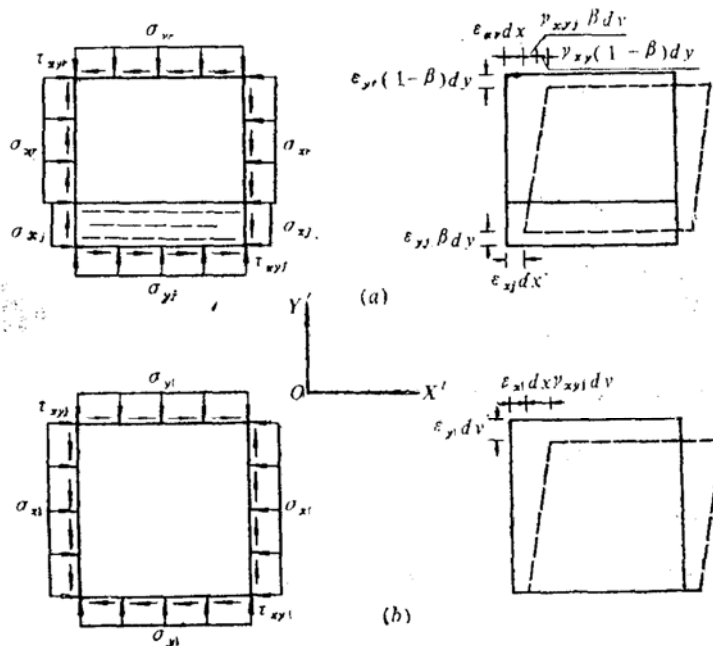


图3 节理、岩块及节理岩体应力应变状态

$$\sigma_{x1} = (1 - \beta_1)\sigma_{xr} + \beta_1\sigma_{xj} \quad (3a)$$

$$\sigma_{y1} = \sigma_{yr} = \sigma_{yj} \quad (3b)$$

$$\tau_{xy1} = \tau_{xyr} = \tau_{xyj} \quad (3c)$$

(2) 位移协调条件

$$\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{xr} = \varepsilon_{xj} \quad (4a)$$

$$\varepsilon_{y1} = (1 - \beta_1)\varepsilon_{yr} + \beta_1\varepsilon_{yj} \quad (4b)$$

$$\gamma_{xy1} = (1 - \beta_1)\gamma_{xyr} + \beta_1\gamma_{xyj} \quad (4c)$$

(3) 物理方程。假设节理材料和岩块都是均匀的、各向同性的弹性介质, 则有:

$$\text{节理} \quad \sigma_{xj} = a_{j1}\varepsilon_{xj} + b_{j1}\varepsilon_{yj} \quad (5a)$$

$$\sigma_{yj} = b'_{j1}\varepsilon_{xj} + c_{j1}\varepsilon_{yj} \quad (5b)$$

$$\tau_{xyj} = d_{j1}\gamma_{xyj} \quad (5c)$$

$$\text{岩块} \quad \sigma_{xr} = a_r\varepsilon_{xr} + b_r\varepsilon_{yr} \quad (6a)$$

$$\sigma_{yr} = b'_r\varepsilon_{xr} + c_r\varepsilon_{yr} \quad (6b)$$

$$\tau_{xyr} = d_r\gamma_{xyr} \quad (6c)$$

其中 $a_{j1}, b_{j1}, b'_{j1}, c_{j1}, d_{j1}$ 由节理材料的弹性常数 E_{j1} 和 ν_{j1} 确定, a_r, b_r, b'_r, c_r, d_r 由岩块的弹性常数 E_r 和 ν_r 确定, 如在平面应变问题中

$$\left. \begin{aligned} a &= c = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ b &= b' = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ d &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由式(3b)、(5b)、(6b)有

$$b'_{j1}\varepsilon_{xj} + c_{j1}\varepsilon_{yj} = b_r\varepsilon_{xr} + c_r\varepsilon_{yr}$$

将式(4a)中的 $\varepsilon_{xj} = \varepsilon_{xr}$ 代入上式有

$$c_{j1}\varepsilon_{yj} = (b_r - b'_{j1})\varepsilon_{xr} + c_r\varepsilon_{yr} \quad (a)$$

由式(3c)、(5c)、(6c)有

$$d_{j1}\gamma_{xyj} = d_r\gamma_{xyr} \quad (b)$$

由式(4b)、(4c)分别有

$$\varepsilon_{yj} = \frac{1}{\beta_1}[\varepsilon_{y1} - (1 - \beta_1)\varepsilon_{yr}] \quad (c)$$

$$\gamma_{xy1} = \frac{1}{\beta_1} [\gamma_{xy1} - (1 - \beta_1) \gamma_{xyr}] \quad (d)$$

式(c)代入式(a), 式(d)代入式(b)分别有:

$$\varepsilon_{y1} = \beta_1 \frac{(b_r - b'_{11})}{c_{11}} \varepsilon_{xr} + (1 - \beta_1 + \beta_1 \frac{c_r}{c_{11}}) \varepsilon_{yr} \quad (e)$$

$$\gamma_{xy1} = (1 - \beta_1 + \beta_1 \frac{d_r}{d_{11}}) \gamma_{xyr} \quad (f)$$

由式(4a)中 $\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{xr}$ 及(e)、(f)两式有:

$$\{\varepsilon\}_1 = [H]_1 \{\varepsilon\}_r \quad (8)$$

其中

$$[H]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_1 \frac{b_r - b_{11}}{c_{11}} & 1 - \beta_1 + \beta_1 \frac{c_r}{c_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \beta_1 + \beta_1 \frac{d_r}{d_{11}} \end{bmatrix} \quad (9)$$

由式(3a)、(5a)、(6a)有:

$$\sigma_{x1} = (1 - \beta_1) [a_r \varepsilon_{xr} + b_r \varepsilon_{yr}] + \beta_1 [a_{11} \varepsilon_{x1} + b_{11} \varepsilon_{y1}]$$

将式(4a)中 $\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{xr}$ 及式(a)代入上式

$$\begin{aligned} \sigma_{x1} = & [(1 - \beta_1) a_r + \beta_1 a_{11} + \beta_1 \frac{b_{11}}{c_{11}} (b_r - b_{11})] \varepsilon_{xr} + \\ & + [(1 - \beta_1) b_r + \beta_1 \frac{b_{11}}{c_{11}} c_r] \varepsilon_{yr} \end{aligned} \quad (g)$$

由式(3b)及式(6b), 式(3c)及式(6c)有:

$$\sigma_{y1} = b'_r \varepsilon_{xr} + c_r \varepsilon_{yr} \quad (h)$$

$$\tau_{xy1} = d_r \gamma_{xyr} \quad (i)$$

由式(g)、(h)、(i)有:

$$\{\sigma\}_1 = [D]_1 \{\varepsilon\}_r \quad (10)$$

其中

$$[D]_1 = \begin{bmatrix} (1 - \beta_1) a_r + \beta_1 a_{11} + \beta_1 \frac{b_{11}}{c_{11}} (b_r - b_{11}) & (1 - \beta_1) b_r + \beta_1 \frac{b_{11}}{c_{11}} c_r & 0 \\ b'_r & c_r & 0 \\ 0 & 0 & d_r \end{bmatrix} \quad (11)$$

由式(8)解出 $\{\varepsilon\}_r$ 代入式(10)有:

$$\{\sigma\}_1 = [D]_0 [H]_1^{-1} \{\varepsilon\}_1 \quad (12)$$

$$\text{令} \quad [\bar{D}]_1 = [D]_0 [H]_1^{-1} \quad (13)$$

式(12)表示在局部坐标系 X_1OY_1 中第一组节理切割后岩体的应力应变关系, $[\bar{D}]_1$ 即为所求成层节理岩体的弹性矩阵。

将式(13)展开后得到与文献[3]完全相同的结果:

$$[\bar{D}]_1 = \begin{pmatrix} (1-\beta_1)a_r + \beta_1a_{j1} + \frac{\beta_1(1-\beta_1)(b_r' - b_{j1}') (b_{j1} - b_r)}{c_{j1}(1-\beta_1) + c_r\beta_1} & \frac{b_r'c_{j1}(1-\beta_1) + b_{j1}'c_r\beta_1}{c_{j1}(1-\beta_1) + c_r\beta_1} & 0 \\ \frac{b_r'c_{j1}(1-\beta_1) + b_{j1}'c_r\beta_1}{c_{j1}(1-\beta_1) + c_r\beta_1} & \frac{b_{j1}'c_{j1}(1-\beta_1) + b_r'c_r\beta_1}{c_{j1}(1-\beta_1) + c_r\beta_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_r d_{j1}}{d_{j1}(1-\beta_1) + d_r\beta_1} \end{pmatrix} \quad (13)'$$

由于 $b_r' = b_r$, $b_{j1}' = b_{j1}$, 所以 $[\bar{D}]_1$ 是一对称矩阵, 且 $[\bar{D}]_1$ 由五个相互独立的常数 $E_r, \nu_r, E_{j1}, \nu_{j1}, \beta_1$ 确定。因此, 就所表示的应力应变关系而言, 成层节理岩体是一种横观各向同性体。

在坐标系 X_2OY_2 中(图1), 成层节理岩体的弹性矩阵为:

$$[D]_1 = [T]_1 [\bar{D}]_1 [T]_1^T \quad (14)$$

$$\text{其中} \quad [T]_1 = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) & \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) & -\sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) & \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) & \sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) \\ \frac{1}{2}\sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) & -\frac{1}{2}\sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) & \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) \end{pmatrix} \quad (15)$$

三、双向节理岩体的弹性矩阵

前述成层节理岩体, 如果受到方向角为 α_2 , 相对宽度为 β_2 的节理切割, 则变为双向节理岩体(图1)。设在坐标系 X_2OY_2 中, 双向节理岩体的应力应变状态分别为

$$\{\sigma\}_2 = [\sigma_{x_2} \ \sigma_{y_2} \ \tau_{xy_2}]^T; \quad \{\varepsilon\}_2 = [\varepsilon_{x_2} \ \varepsilon_{y_2} \ \gamma_{xy_2}]^T$$

在该坐标系中, 成层节理岩体的应力应变状态仍记为

$$\{\sigma\}_1 = [\sigma_{x_1} \ \sigma_{y_1} \ \tau_{xy_1}]^T; \quad \{\varepsilon\}_1 = [\varepsilon_{x_1} \ \varepsilon_{y_1} \ \gamma_{xy_1}]^T$$

且有

$$\begin{cases} \sigma_{x1} = d'_{11}\varepsilon_{x1} + d'_{12}\varepsilon_{y1} + d'_{13}\gamma_{xy1} \\ \sigma_{y1} = d'_{21}\varepsilon_{x1} + d'_{22}\varepsilon_{y1} + d'_{23}\gamma_{xy1} \\ \tau_{xy1} = d'_{31}\varepsilon_{x1} + d'_{32}\varepsilon_{y1} + d'_{33}\gamma_{xy1} \end{cases} \quad (16)$$

其中 d'_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) 为式(13)中 $[D]_1$ 的元素。

第二组节理的应力应变状态仍记为

$$\{\sigma\}_j = [\sigma_{xj} \quad \sigma_{yj} \quad \tau_{xyj}]^T; \quad \{\varepsilon\}_j = [\varepsilon_{xj} \quad \varepsilon_{yj} \quad \gamma_{xyj}]^T$$

且有

$$\begin{cases} \sigma_{xj} = a_{j2}\varepsilon_{xj} + b_{j2}\varepsilon_{yj} \\ \sigma_{yj} = b'_{j2}\varepsilon_{xj} + c_{j2}\varepsilon_{yj} \\ \tau_{xyj} = d_{j2}\gamma_{xyj} \end{cases} \quad (17)$$

其中 $a_{j2}, b_{j2}, b'_{j2}, c_{j2}, d_{j2}$ 由节理材料的弹性常数 E_{j2}, ν_{j2} 通过式(7)确定。

与式(3)、式(4)同理, 应有:

$$\sigma_{x2} = (1 - \beta_2)\sigma_{x1} + \beta_2\sigma_{xj} \quad (18a)$$

$$\sigma_{y2} = \sigma_{y1} = \sigma_{yj} \quad (18b)$$

$$\tau_{xy2} = \tau_{xy1} = \tau_{xyj} \quad (18c)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{x2} = \varepsilon_{x1} = \varepsilon_{xj} \\ \varepsilon_{y2} = (1 - \beta_2)\varepsilon_{y1} + \beta_2\varepsilon_{yj} \\ \gamma_{xy2} = (1 - \beta_2)\gamma_{xy1} + \beta_2\gamma_{xyj} \end{cases} \quad (19)$$

通过与成层节理岩体弹性矩阵类似的推导过程得到:

$$\{\varepsilon\}_1 = [H]_2^{-1}\{\varepsilon\}_2 \quad (20)$$

其中

$$[H]_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_2 \frac{d'_{21} - b'_{j2}}{c_{j2}} & 1 - \beta_2 + \beta_2 \frac{d'_{22}}{c_{j2}} & \beta_2 \frac{d'_{23}}{c_{j2}} \\ \beta_2 \frac{d'_{31}}{d_{j2}} & \beta_2 \frac{d'_{32}}{d_{j2}} & 1 - \beta_2 + \beta_2 \frac{d'_{33}}{d_{j2}} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\{\sigma\}_2 = [D]_{11}\{\varepsilon\}_1 \quad (22)$$

其中

$$[D]_{11} = \begin{pmatrix} (1 - \beta_2)d_{11} + \beta_2 a_{j2} + \beta_2 \frac{b_{j2}}{c_{j2}}(d'_{21} - b_{j2}) & (1 - \beta_2)d'_{12} + \beta_2 \frac{b_{j2}}{c_{j2}}d'_{22} \\ d'_{21} & d'_{22} \\ d'_{31} & d'_{32} \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} (1-\beta_2)d'_{13} + \beta_2 \frac{b_{12}}{c_{12}} d'_{23} \\ d'_{23} \\ d'_{33} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\text{若令 } [\bar{D}]_2 = [D]_1 [H]_2^{-1} \quad (24)$$

$$\text{则 } \{\sigma\}_2 = [\bar{D}]_2 \{\varepsilon\}_2 \quad (25)$$

式(25)表示在坐标系 X_2OY_2 中第二组节理切割后岩体的应力应变关系, $[\bar{D}]_2$ 即为所求双向节理岩体的弹性矩阵, 从式(21)、(23)可以看出, $[\bar{D}]_2$ 可由成层节理岩体的弹性常数, 第二组节理的弹性常数及产状参数确定。

在坐标系 XOY 中(图1), 双向节理岩体的弹性矩阵为:

$$[D]_2 = [T]_2 [\bar{D}]_2 [T]_2^T \quad (26)$$

其中

$$[T]_2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha_2 & \sin^2 \alpha_2 & -\sin 2\alpha_2 \\ \sin^2 \alpha_2 & \cos^2 \alpha_2 & \sin 2\alpha_2 \\ \frac{1}{2} \sin 2\alpha_2 & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha_2 & \cos^2 \alpha_2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

如果令 $E_{j1} = E_{j2} = E_j$, $\nu_{j1} = \nu_{j2} = 0$, $\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 90^\circ$, 则有:

$$[D]_2 =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{E_r E_i}{(1-\beta_2)(1-\beta_1)E_i + (1-\beta_2)\beta_1 E_r + \beta_2 E_r} & 0 & 0 \\ 0 & (1-\beta_2)(1-\beta_1)E_r + (1-\beta_2)\beta_1 E_i + \beta_2 E_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_r E_i / 2}{(1-\beta_2)(1-\beta_1)E_i + (1-\beta_2)\beta_1 E_r + \beta_2 E_r} \end{pmatrix} \quad (28)$$

这与格拉弟相互正交节理通用模型所导出的结果是一致的。

四、多向节理岩体的弹性矩阵

对于受多向节理切割的岩体, 可以通过下述过程递推得到其弹性矩阵。

设岩体被第 $(i-1)$ 组节理切割后在第 i 个局部坐标系 X_iOY_i 中的弹性矩阵为已知, 且为

$$[D]_{i-1} = \begin{pmatrix} d_{11}^{i-1} & d_{12}^{i-1} & d_{13}^{i-1} \\ d_{21}^{i-1} & d_{22}^{i-1} & d_{23}^{i-1} \\ d_{31}^{i-1} & d_{32}^{i-1} & d_{33}^{i-1} \end{pmatrix} \quad (29)$$

坐标系 X_iOY_i 中的 OX_i 轴平行于第 i 组节理。

由第 i 组节理的弹性参数 (E_{j1}, ν_{j1}) 不难求出 $a_{ji}, b_{ji}, b'_{ji}, c_{ji}, d_{ji}$, 由该节理的相对宽度 β_i 及 $[D]_{i-1}$ 中的元素可以求出

$$[H]_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta_i \frac{d_{21}^{i-1} - b'_{ji}}{c_{ji}} & 1 - \beta_i + \beta_i \frac{d_{22}^{i-1}}{c_{ji}} & \beta_i \frac{d_{23}^{i-1}}{c_{ji}} \\ \beta_i \frac{d_{31}^{i-1}}{d_{ji}} & \beta_i \frac{d_{32}^{i-1}}{d_{ji}} & 1 - \beta_i + \beta_i \frac{d_{33}^{i-1}}{d_{ji}} \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$[D]_{i-1,i} = \begin{pmatrix} (1 - \beta_i)d_{11}^{i-1} + \beta_i a_{ji} + \beta_i \frac{b_{ji}}{c_{ji}}(d_{21}^{i-1} - b_{ji}) & (1 - \beta_i)d_{12}^{i-1} + \beta_i \frac{b_{ji}}{c_{ji}}d_{22}^{i-1} & \\ d_{21}^{i-1} & d_{22}^{i-1} & \\ d_{31}^{i-1} & d_{32}^{i-1} & \\ (1 - \beta_i)d_{13}^{i-1} + \beta_i \frac{b_{ji}}{c_{ji}}d_{23}^{i-1} & & \\ d_{23}^{i-1} & & \\ d_{33}^{i-1} & & \end{pmatrix} \quad (31)$$

相应地, 第 i 组节理切割后岩体的弹性矩阵为

$$[\bar{D}]_i = [D]_{i-1,i} [H]_i^{-1} \quad (32)$$

在第 $(i+1)$ 个局部坐标系 $X_{i+1}OY_{i+1}$ 中弹性矩阵为

$$[D]_i = [T]_i [D]_i [T]_i^T \quad (33)$$

其中

$$[T]_i = \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha_i - \alpha_{i+1}) & \sin^2(\alpha_i - \alpha_{i+1}) & -\sin 2(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \\ \sin^2(\alpha_i - \alpha_{i+1}) & \cos^2(\alpha_i - \alpha_{i+1}) & \sin 2(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \\ \frac{1}{2} \sin 2(\alpha_i - \alpha_{i+1}) & -\frac{1}{2} \sin 2(\alpha_i - \alpha_{i+1}) & \cos 2(\alpha_i - \alpha_{i+1}) \end{pmatrix} \quad (34)$$

α_i, α_{i+1} 分别为第 $i, i+1$ 组节理的方向角。

如果岩体共受到 n 组节理的切割, 则 $i = 1, 2, \dots, n$, 且当 $i = n$ 时 $\alpha_{i+1} = 0$, $[D]_n = [D]$, $[D]$ 为多向节理岩体在整体坐标系中的弹性矩阵。

【算例】完整岩体 $E_r = 2.0 \times 10^4$ MPa, $\nu = 0.2$, 受到下述四组节理切割, 节理材料及产状参数 $(E_i, \nu_i, \beta_i, \alpha_i)$ 分别为: $(0.2, 0.3, 0.05, 45)$, $(0.4, 0.27, 0.10, 75)$, $(0.8, 0.25, 0.15, 105)$, $(1.0, 0.23, 0.20, 135)$, E_i 的单位为 10^4 MPa, α_i 的单位为度, 节理岩体的弹性矩阵为:

$$[\bar{D}]_4 = \begin{pmatrix} 1.245 & 0.392 & -0.013 \\ 0.392 & 1.452 & -0.044 \\ -0.013 & -0.044 & 0.443 \end{pmatrix}$$

$$[D]_4 = \begin{pmatrix} 1.257 & 0.427 & 0.036 \\ 0.427 & 1.370 & 0.067 \\ 0.036 & 0.067 & 0.478 \end{pmatrix}$$

从算例可以看出, 在不同的坐标系中, 节理岩体弹性矩阵的所有常数一般均不为零, 且具有对称正定性质。因此, 在平面问题中, 表示多向节理岩体应力应变关系的独立常数共有 6 个, 就此而言, 受多向节理切割的岩体是一种各向异性体。

上述思想不难推广至空间的情形。设岩体被 $(i-1)$ 组节理切割后在第 i 个局部坐标系 $OX_i Y_i Z_i$ 中的弹性矩阵 $[D]_{i-1}$ 为已知, 其元素即为式 (1) 中的系数 d_{kl}^{i-1} ($k, l = 1, 2, \dots, 6$)。

若设岩体进一步受到第 i 组节理的切割, 且节理面平行于平面 $OX_i Y_i$ (图 4), 相应的

$$[H]_i =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_i \frac{d_{31}^{i-1} b'_{i1}}{c_{i1}} & \beta_i \frac{d_{32}^{i-1} b'_{i2}}{c_{i1}} & 1 - \beta_i + \beta_i \frac{d_{33}^{i-1}}{c_{i1}} & \beta_i \frac{d_{34}^{i-1}}{c_{i1}} & \beta_i \frac{d_{35}^{i-1}}{c_{i1}} & \beta_i \frac{d_{36}^{i-1}}{c_{i1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta_i \frac{d_{61}^{i-1}}{d_{i1}} & \beta_i \frac{d_{62}^{i-1}}{d_{i1}} & \beta_i \frac{d_{63}^{i-1}}{d_{i1}} & \beta_i \frac{d_{64}^{i-1}}{d_{i1}} & 1 - \beta_i + \beta_i \frac{d_{65}^{i-1}}{d_{i1}} & \beta_i \frac{d_{66}^{i-1}}{d_{i1}} \\ \beta_i \frac{d_{61}^{i-1}}{d_{i1}} & \beta_i \frac{d_{62}^{i-1}}{d_{i1}} & \beta_i \frac{d_{63}^{i-1}}{d_{i1}} & \beta_i \frac{d_{64}^{i-1}}{d_{i1}} & \beta_i \frac{d_{65}^{i-1}}{d_{i1}} & 1 - \beta_i + \beta_i \frac{d_{66}^{i-1}}{d_{i1}} \end{pmatrix}$$

$$[D]_{i-1,j}^T = \quad (35)$$

$$\left(\begin{array}{cc} (1-\beta_i)d_{11}^{i-1} + \beta_i d_{1j} + \beta_i \frac{b'_{1j}}{c_{1j}}(d_{31}^{i-1} - b'_{1j}) & (1-\beta_i)d_{21}^{i-1} + \beta_i b_{1j} + \beta \frac{b_{1j}}{c_{1j}}(d_{31}^{i-1} - b'_{1j}) \\ (1-\beta_i)d_{12}^{i-1} + \beta_i b_{1j} + \beta_i \frac{b'_{1j}}{c_{1j}}(d_{32}^{i-1} - b_{1j}) & (1-\beta_i)d_{22}^{i-1} + \beta_i d_{1j} + \beta \frac{b_{1j}}{c_{1j}}(d_{32}^{i-1} - b_{1j}) \\ (1-\beta_i)d_{13}^{i-1} + \beta_i \frac{b'_{1j}}{c_{1j}}d_{33}^{i-1} & (1-\beta_i)d_{23}^{i-1} + \beta_i \frac{b_{1j}}{c_{1j}}d_{33}^{i-1} \\ (1-\beta_i)d_{14}^{i-1} + \beta_i \frac{b'_{1j}}{c_{1j}}d_{34}^{i-1} & (1-\beta_i)d_{24}^{i-1} + \beta_i \frac{b_{1j}}{c_{1j}}d_{34}^{i-1} \\ (1-\beta_i)d_{15}^{i-1} + \beta_i \frac{b'_{1j}}{c_{1j}}d_{35}^{i-1} & (1-\beta_i)d_{25}^{i-1} + \beta_i \frac{b_{1j}}{c_{1j}}d_{35}^{i-1} \\ (1-\beta_i)d_{16}^{i-1} + \beta_i \frac{b'_{1j}}{c_{1j}}d_{36}^{i-1} & (1-\beta_i)d_{26}^{i-1} + \beta_i \frac{b_{1j}}{c_{1j}}d_{36}^{i-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} d_{31}^{i-1} & (1-\beta_i)d_{41}^{i-1} \\ d_{32}^{i-1} & (1-\beta_i)d_{42}^{i-1} \\ d_{33}^{i-1} & (1-\beta_i)d_{43}^{i-1} \\ d_{34}^{i-1} & (1-\beta_i)d_{44}^{i-1} + \beta_i d_{1j} \\ d_{35}^{i-1} & (1-\beta_i)d_{45}^{i-1} \\ d_{36}^{i-1} & (1-\beta_i)d_{46}^{i-1} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} d_{51}^{i-1} & d_{61}^{i-1} \\ d_{52}^{i-1} & d_{62}^{i-1} \\ d_{53}^{i-1} & d_{63}^{i-1} \\ d_{54}^{i-1} & d_{64}^{i-1} \\ d_{55}^{i-1} & d_{65}^{i-1} \\ d_{56}^{i-1} & d_{66}^{i-1} \end{array} \right) \quad (36)$$

第 i 组节理切割后岩体的弹性矩阵

$$[\bar{D}]_i = [D]_{i-1,j} [H]_i^{-1} \quad (37)$$

定义坐标系 $OX_{i+1}Y_{i+1}Z_{i+1}$ 与 $OX_iY_iZ_i$ 间的方向余弦如下:

新坐标	原坐标		
	X_i	Y_i	Z_i
	方向余弦		
X_{i+1}	l_{i1}	m_{i1}	n_{i1}
Y_{i+1}	l_{i2}	m_{i2}	n_{i2}
Z_{i+1}	l_{i3}	m_{i3}	n_{i3}

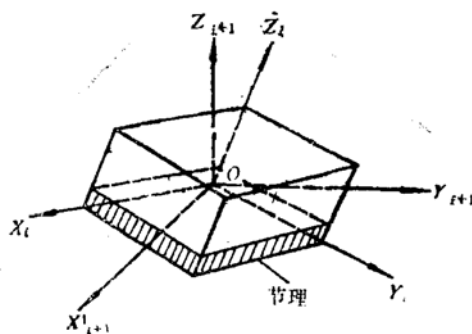


图4 空间节理岩体

则在第 $i + 1$ 个局部坐标系 $OX_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1}$ 中, 节理岩体的弹性矩阵为

$$[D]_i = [T]_i [\bar{D}]_i [T]_i^T \quad (38)$$

$$[T]_i = \begin{bmatrix} l_{i1}^2 & m_{i1}^2 & n_{i1}^2 & 2l_{i1}m_{i1} & 2m_{i1}n_{i1} & 2n_{i1}l_{i1} \\ l_{i2}^2 & m_{i2}^2 & n_{i2}^2 & 2l_{i2}m_{i2} & 2m_{i2}n_{i2} & 2n_{i2}l_{i2} \\ l_{i3}^2 & m_{i3}^2 & n_{i3}^2 & 2l_{i3}m_{i3} & 2m_{i3}n_{i3} & 2n_{i3}l_{i3} \\ l_{i1}l_{i2} & m_{i1}m_{i2} & n_{i1}n_{i2} & l_{i1}m_{i2} + l_{i2}m_{i1} & m_{i1}n_{i2} + m_{i2}n_{i1} & n_{i1}l_{i2} + n_{i2}l_{i1} \\ l_{i2}l_{i3} & m_{i2}m_{i3} & n_{i2}n_{i3} & l_{i2}m_{i3} + l_{i3}m_{i2} & m_{i2}n_{i3} + m_{i3}n_{i2} & n_{i2}l_{i3} + n_{i3}l_{i2} \\ l_{i3}l_{i1} & m_{i3}m_{i1} & n_{i3}n_{i1} & l_{i3}m_{i1} + l_{i1}m_{i3} & m_{i3}n_{i1} + m_{i1}n_{i3} & n_{i3}l_{i1} + n_{i1}l_{i3} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$i = 1, 2, \dots, 6$, 当 $i = 1$ 时, $[D]_1 = [D]_r$, $[D]_r$ 为完整岩块的弹性矩阵, 且式 (35)、(36) 中的 a, b, b', c, d 亦由式 (7) 确定。

在本文公式推导中, 节理的排序只是为了叙述的方便, 实际上, 节理岩体的应力应变关系与节理的序号无关, 采用本文公式进行计算所得的结果亦表明了这一点。

五、结 语

本文的分析表明: 成层节理岩体可以视为横观的各向同性体, 而双向和多向节理岩体则视为完全的各向异性体, 表示其应力应变关系的弹性矩阵都可以通过完整岩体和节理相应的参数分别确定。

参 考 文 献

- [1] 刘北辰、陆鸿森, 弹性力学, 冶金工业出版社, 1979年。
- [2] Gerrard, C. M., Elastic Models of Rock Masses Having one two three sets of Joints, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, Vol. 19, No. 1, Feb. 1982.
- [3] 潘家铮, 夹层地基分析, 水工结构分析文集, 电力工业出版社, 1981年4月。
- [4] 高安泽、张宪宏, 各向异性节理岩体应力应变关系探讨, 水力发电学报, 1983年第2期。

Elastic Models of Jointed Rock Masses

Zhang Wu

Zhang Xianhong

(Research Institute of Water
Conservancy and HydroPower,
Beijing)

(Tsinghua University, Beijing)

Abstract

It is assumed that the rock mass with multi-directional joint is nearly a continuous elastic anisotropic medium. Mathematical elastic models based on elastic constants of jointed material and intact rock mass, and geometric parameters of joints, are presented for uni-directional (stratified), bi-directional and multi-directional jointed rock masses.