

扩底墩地基土的位移和应力

——弹性力学有限单元法的应用

周 红

(城乡建设环境保护部综合勘察院, 北京)

近年来, 扩底墩基础以其承载能力高、施工快、造价低等优点受到普遍欢迎^①。但目前对扩底墩地基的理论研究工作还不够, 承载能力只有通过原型载荷试验才能确定。而原型载荷试验设备庞大, 耗费人力物力和时间甚多, 这给扩底墩基础的推广和应用带来一定的障碍。为了逐步解决这一问题, 本文试图用弹性力学的有限单元法计算扩底墩基础当墩顶作用轴向荷载时地基土中的位移和应力。

一、扩底墩基础地基的计算

轴向荷载作用下的扩底墩基础, 其地基土中的位移和应力均对称于墩轴, 故属于空间轴对称问题。用有限单元法求解时, 宜采用对称轴为 z 轴、对称面为 rz 平面的圆柱坐标系, 并采用轴对称的、截面为三角形的整圆环形单元的弹性体进行离散, 于是单元结点 i 、 j 、 m 的位移列阵和单元的应力列阵各为

$$\{\delta\}^e = [\delta_i^T \quad \delta_j^T \quad \delta_m^T]^T = [u_i \quad w_i \quad u_j \quad w_j \quad u_m \quad w_m]^T$$
$$\{\sigma\} = [\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{rz}]^T$$

根据结点力的平衡条件, 可建立方程

$$\sum_e \{F_i\} = \sum_e \{R_i\} \quad (1)$$

即环绕结点 i 的所有单元作用在该结点的结点力 $\{F_i\}$ 之和等于作用于该结点的所有外荷载 $\{R_i\}$ 之和。其中

$$\{F_i\} = [U_i \quad W_i]^T$$
$$\{R_i\} = [X_i \quad Z_i]^T$$

而单元的结点力 $\{F_i\}$ 可通过单元的刚度矩阵 $[k]$ 与单元的结点位移列阵 $\{\delta\}^e$ 建立如下关系

$$\{F\}^e = [k] \{\delta\}^e \quad (2)$$

将式(2)代入(1)并将各结点力平衡方程式集合在一起, 就得到整个弹性体的结点力平衡方程组

$$[K] \{\delta\} = \{R\} \quad (3)$$

①顾宝和等, 扩底墩的试验研究和应用, 城乡建设部综合勘察院, 1984年。

这是一个用单元结点位移来表示单元结点力的线性代数方程组, 其中矩阵 $[K]$ 称为弹性体的整体刚度矩阵, 它包含了方程组的全部已知系数, 可由单元的刚度矩阵 $[k]$ 组合而成。求解方程组(3)可得到结点位移 $\{\delta\}$, 再由几何方程和物理方程得单元应力和结点位移的关系式

$$\{\sigma\} = [S]\{\delta\}^e \quad (4)$$

在式(2)及式(4)中, 单元刚度矩阵 $[k]$ 及应力矩阵 $[S]$ 的表达式如下

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \quad (5)$$

而

$$k_{rs} = \frac{\pi E(1-\mu)r}{2(1+\mu)(1-2\mu)A} \times \begin{pmatrix} b_r b_s + f_r f_s + A_1(b_r f_s + b_s f_r) + A_2 c_r c_s & A_1(b_r c_s + f_r c_s) + A_2 c_r b_s \\ A_1(c_r b_s + c_r f_s) + A_2 b_r c_s & c_r c_s + A_2 b_r b_s \end{pmatrix} \quad (6)$$

($r = i, j, m; s = i, j, m$)

$$[S] = [S_i \ S_j \ S_m] \quad (7)$$

式中

$$S_i = \frac{E(1-\mu)}{2(1+\mu)(1-2\mu)A} \times \begin{bmatrix} b_i + A_1 f_i & A_1 c_i \\ A_1 b_i + f_i & A_1 c_i \\ A_1(b_i + f_i) & c_i \\ A_2 c_i & A_2 b_i \end{bmatrix}; \quad (i, j, m) \quad (8)$$

式(5)~(8)中

$$A_1 = \frac{\mu}{1-\mu}; \quad A_2 = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_m & z_m \end{vmatrix}$$

$$a_i = r_j z_m - r_m z_j;$$

$$b_i = z_j - z_m;$$

$$c_i = -r_j + r_m;$$

$$f_i = \frac{a_i}{r} + b_i + \frac{c_i z}{r}; \quad (i, j, m)$$

$$r = \frac{1}{3}(r_i + r_j + r_m);$$

$$z = \frac{1}{3}(z_i + z_j + z_m)$$

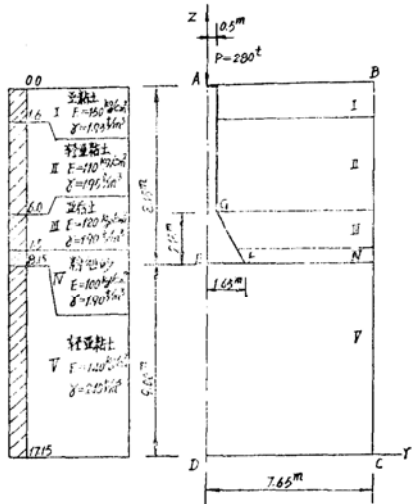


图1 地层图及计算范围示意图

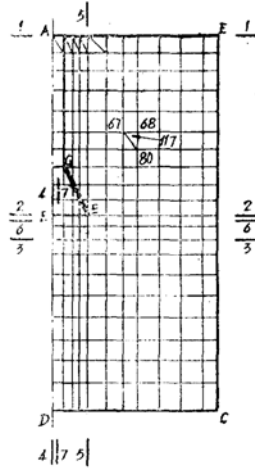


图2 计算网格

其中 r 、 z 是圆柱坐标系的坐标值，脚标 i 、 j 、 m 是指单元的结点编号。

下面引用文献①中的郑州邮政转运大楼原型墩载荷试验资料作为算例。此例中各层土的分布、土工试验参数及基墩尺寸示于图1。

(一) 计算域及边界条件

为了便于计算墩壁的摩阻力和节省计算工作量，这里先作两点假定：

1. 当地基土处于弹性阶段时，墩的沉降总是较小的，一般不超过毫米的量级。故可假定墩身直筒部分(以下简称墩身)与相邻土体不产生相对位移，也就是说借助于摩阻力墩壁拉着土体一起下沉。这一假定在人工开挖墩时，因墩腔土体的不够平整而使灌注混凝土后形成墩身与土体互相咬合的情况是完全吻合的；但在扩孔部分的斜面(以下简称扩孔斜面)上墩不可能拉着斜面以上土体向下移动，故墩与土必相脱离。

2. 在计算域取得适当大时，外边界上由于墩顶竖向位移 S_1 所引起的结点竖向及横向位移均趋于零。

计算域的网格划分如图2示，取计算域半径 $R = 2.3D_0$ ，深 $H = 5.2D_0$ 。由假定(1)，可令墩身与土体共用一个结点，而扩孔斜面上墩、土的结点必须分离为二。由假定(2)可确定边界条件

$$r = R, 0 \leq z \leq H; u = 0, w = 0;$$

$$r = 0, 0 \leq z \leq H; u = 0;$$

$$0 \leq r \leq R, z = 0; u = 0, w = 0$$

而在墩顶，已测得在外荷载 P_1 作用下的竖向位移为 S_1 ，故有

$$0 \leq r \leq 0.5m, z = H; w = S_1$$

(二) 参数拟合

在有限单元法计算中, 土的参数可靠与否是成败的关键。但由于土样尺寸和试验方法的限制, 试验室内压缩仪上测定的压缩模量和现场土的实际模量是有很大的出入的。因此试验室内测定的模量只能作为一个相对值, 为求得真实模量 E , 这里根据现场原型墩试验的成果采用拟合法试算确定。

从现场取得各层土的土样, 由土工试验得到它的近似模量 E 示于图 1。拟合的原则是: 如果计算采用的弹性模量 E 是土体的真实值, 则计算所得 $P-S$ 曲线与载荷试验的 $P-S$ 曲线在弹性阶段应相符合。根据这一条件, 通过调整各层土的 E , 就可找到各层土的真实模量值。具体做法是任取某一层土的模量如墩底以下土层的 E_5 为基数, 根据土工试验确定各层土之间的弹性模量比值为

$$\begin{aligned} n_1 &= E_1/E_5 = 1.07; & n_2 &= E_2/E_5 = 0.78; \\ n_3 &= E_3/E_5 = 0.86; & n_4 &= E_4/E_5 = 0.71 \end{aligned} \quad (9)$$

则有

$$E_1 = 1.07E_5; E_2 = 0.78E_5; E_3 = 0.86E_5; E_4 = 0.71E_5 \quad (10)$$

在载荷试验 $P-S$ 曲线上选一组弹性范围内的实测值如 $P_1 = 280 \text{ t}$, $S_1 = -3.08 \text{ mm}$, 试算开始时按土工试验值 $E_5 = 140 \text{ kg/cm}^2$ 作为初值, 用式(10)可确定出其余各层土的弹性模量试算值, 用这组模量计算当墩顶产生刚性位移 S_1 时土体中的位移 δ 及应力 σ , 并求出墩底平面内土体端承力 P_D 及墩身摩阻力 P_f , 则 $P' = P_D + P_f$ 为土体的总反力。如果 P' 与 P_1 不等, 调整 E_5 并由式(10)得到一组新的模量, 重新代入计算, 直到 P' 与 P_1 相等, 则此时所取用的弹性模量值为其真值。这样算得五层土的弹性模量值各为

$$\begin{aligned} E_1 &= 1575 \text{ kg/cm}^2; E_2 = 1155 \text{ kg/cm}^2; \\ E_3 &= 1260 \text{ kg/cm}^2; E_4 = 1050 \text{ kg/cm}^2; \\ E_5 &= 1470 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

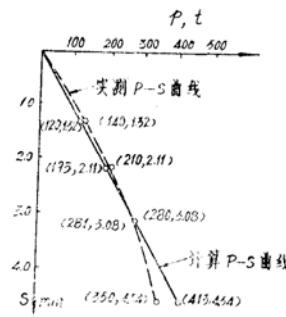


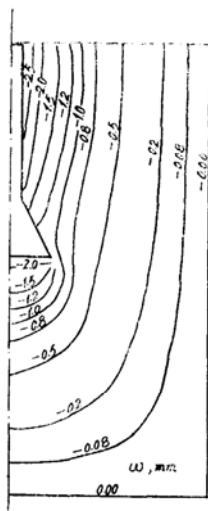
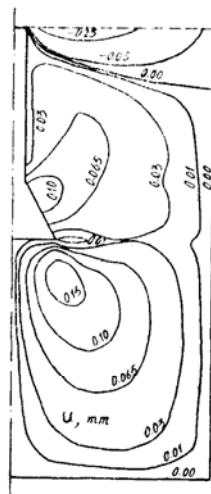
图3 扩底墩的 $P-S$ 曲线

图3所示为实测 $P-S$ 曲线及利用上述调整后的各层土的 E 值算得的弹性阶段的 $P-S$ 曲线, 两者基本拟合, 可见所选用的土的 E 值是可用的。计算中墩身混凝土的模量值 $E_h = 285000 \text{ kg/cm}^2$ 。

(三) 位移及应力计算结果

根据载荷试验中墩顶作用 $P_1 = 280 \text{ t}$ 轴向荷载时墩顶的实测位移 $S_1 = 3.08 \text{ mm}$ 及上节所示的其它边界条件, 将式(3)及(4)用于图2的计算网格, 借助FORTRAN 77语言编成程序, 在WICAT微机上算得各结点的位移及各单元的应力, 又根据二单元法^[1]将单元应力换算成矩形小格中心点的应力。现先将结点的竖向和横向位移画成等值线图分别示于图4及图5。图4表示土体中竖向位移均是向下的, 其最大值在墩顶, 由于墩体本身也产生压缩, 故

墩底位移小于墩顶, 又由于假定了墩身与土体无相对位移, 故与墩身相邻的土体的位移大于墩底土体的位移。再由于扩孔斜面上, 墩与土相脱离, 造成了邻近竖向位移等值线的不连续。图5 横向位移等值线图可划分成正负两区, 靠近地表的负值区反映了由于墩顶沉降而造成土体向墩身所作的侧向移动, 其下面的正值区则说明土体因压缩而向外扩展的趋势。这种趋势也因扩孔斜面的墩、土脱离而分成以墩底为界的上、下两组闭合的等值线。

图4 竖向位移 w 等值线图5 横向位移 u 等值线

为了进一步验证这两张图的合理性, 又在图2所表明的位置上画出了六个典型剖面示于图6~8。

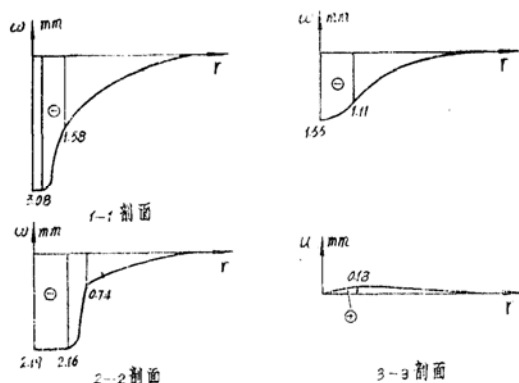
图6 竖向位移 w 及横向位移 u 曲线

图6分别示出了穿过墩顶的水平向1-1剖面、墩底水平向2-2剖面的竖向位移 w 曲线

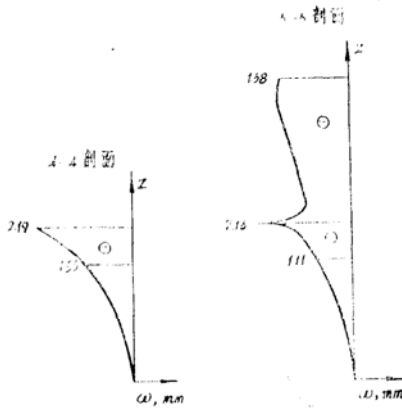
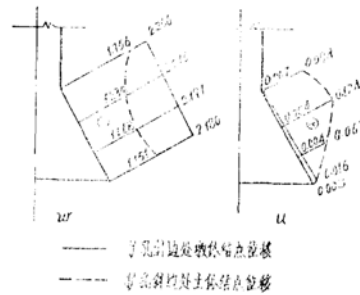


图7 竖向位移曲线

图8 扩孔斜边处位移曲线(u, w, mm)

及距墩底以下 1.2m 处水平向 3-3 剖面的竖向位移 w 和横向位移 u 曲线。1-1 剖面曲线表明墩顶各点的竖向位移值相等,这当然是由给定的边界条件所决定,而同一水平面上土体的位移随着远离墩体而很快地减小;在 2-2 剖面上墩底各结点的竖向位移基本相等,这一结果符合刚性基础的特性,在墩底以外,位移也很快衰减;3-3 剖面的竖向位移曲线与 2-2 剖面相比不仅其值减少了,且曲线变得更为平缓了;而横向位移为正值,即土体向外挤动。

图 7 中的曲线表示位移沿竖向的变化。4-4 剖面曲线为墩底以下对称轴上土体的竖向位移,曲线表明位移的方向都是向下的,最大值出现在墩底,随着深度增加位移迅速单调地减少。5-5 剖面曲线示出墩尖处圆柱剖面上(即 $r = 1.65\text{m}$)土体的竖向位移。在墩尖处获得最大值,墩底以下位移变化与轴线处相似,与墩身相邻的土体的位移变化较小,基本上呈线性分布,并随着深度的增加而变小,但到了扩孔部分竖向位移有了较大的增长。

图 8 反映扩孔斜面上墩体和土体的竖向及横向位移的相互关系。曲线清楚地表明当墩顶产生 S_1 的竖向位移时,在扩孔斜面上墩体的位移大于土体的而造成两者相脱离的情况,同时,从横向位移分布情况还可以看出斜面上脱空的土体起着拱的效应,所以土体的横向位移大于墩体的横向位移。

这六个典型剖面的位移曲线的变化是合理的,说明位移的计算结果可以接受。

图 9、10 分别示出了最大剪应力 $\tau_{\max}$ 及主应力 σ_3 的等值线。图 9 表明最大剪应力出现在墩顶和扩底部分的基脚处,最小值零出现于墩底以下的对称轴上。图 10 说明最小主应力(即最大压应力)的分布与最大剪应力相似,只在接近地面处有少许差异。

为了更形象地表现应力分布,绘出了紧贴墩底的水平剖面 6-6 上竖向压应力 σ_z 分布的马鞍形曲线(见图 11),这与土力学中(浅基)的解析解结果非常吻合,图 11 中 7-7 剖面紧靠对称轴的纵剖面上压应力的分布曲线表明离开墩底越远其压应力逐渐衰减,这也和土力学中(浅基)的解析解一致。

需要指出的是虽然应力计算结果已用二单元法加以整理,但精度有的地方还嫌不够,应进一步改进。

表 1 沿 墩 身 剪 力

沿 墩 身 矩 形 小 格 编 号	2	13	24	35	46	57	68	P_f
矩形小格墩 身表面积(m^2)	2.20	2.67	2.83	2.98	3.14	2.51	2.36	
矩形小格应力 $\tau_{xz}(t/m^2)$	8.2	7.8	5.9	6.0	6.1	6.4	4.4	
矩形小格剪力 (t)	18.04	20.80	16.70	17.88	19.15	16.06	10.38	119.19

续表 1 沿 墩 底 竖 向 力

沿墩底矩形 小格编号	111	112	113	114	P_D
矩形小格墩底面积 (m^2)	0.785	2.356	3.015	2.395	
矩形小格应力 $\sigma_z(t/m^2)$	11.1	13.0	13.3	29.5	
矩形小格竖向力 (t)	8.7	30.6	55.2	70.6	165.2

二、网格自动形式

有限元法在上机计算时,首先要输入大量的原始数据,如每个单元的结点编号、结点座标值、单元的模量等,耗费大量人力,不能不说是一大缺陷,为了减轻负担,作者在本文计算的后阶段采用了网格自动形成,发现可以大大减少计算前的准备工作量及数据输入量,其输入数据由原来的1824个减少到37个,即为原来的2%,因而觉得网格自动形成是值得稍占篇幅在此作一介绍。

根据精度要求先将计算域③划分成 I 行 J 列,每行或列之间的间隔可以不等,形成 $(I-1) \times (J-1)$ 个矩形小格,再在每一矩形小格内按相同倾向画一对角线分为奇数和偶数的两个三角形单元从而形成三角形剖分图(见图2)。对单元结点编号统一规定为:将第二个编号 j 放在三角形的直角结点上,另两个编号 i 、 m 则按逆时针方向排列(见图12),而单元的序号则按水平向自左至右编完,再自上而下地换行继续进行。所谓网格自动形成即由计算机自行确定各结点的坐标值和各单元的结点编号。为达到此目地,须先将计算域中行的纵坐标和列的横坐标输入方可据以算得结点的坐标值。

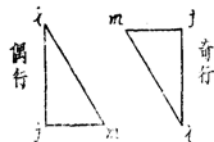


图12 单元编号示意

下面以第 n 行 m 列矩形小格为例,推导单元编号的计算式。

对于奇行,单元编号 k 可根据其所在矩形小格的行数 n 、列数 m 及计算网格的总列数 J 按下式算出:

$$k = 2(n-1)(J-1) + m \quad (11)$$

直角结点的编号则按下式计算:

$$NEP(k-2) = (n-1) \times J + (m+1) \quad (12)$$

而其它两个编号则可在该结点编号上各加、减一常数即得

$$NEP(k-3) = NEP(k-2) - 1 \quad (13)$$

$$NEP(k-1) = NEP(k-2) + J \quad (14)$$

对于偶行三角形单元, 其编号则有

$$k = [2(n-1) + 1](J-1) + m \quad (15)$$

它的单元结点编号为

$$NEP(k-2) = n \times J + m \quad (16)$$

$$NEP(k-3) = NEP(k-2) + 1 \quad (17)$$

$$NEP(k-1) = NEP(k-2) - J \quad (18)$$

例如图2所示网格中, 对于第六行第七列矩形小格中的奇行三角形单元的单元号及结点号可按上述公式计算如下:

$$k = 2(6-1) \times (12-1) + 7 = 117$$

$$NEP(117-2) = (6-1) \times 12 + (7+1) = 68$$

$$NEP(117-3) = 68 - 1 = 67$$

$$NEP(117-1) = 68 + 12 = 80$$

对于结点座标, 需先由下式算得结点编号 l

$$l = (n-1) \times J + m \quad (19)$$

然后赋以相应行、列的纵横座标值即得

$$RZ(l-1) = ROO(m) \quad (20)$$

$$RZ(l-2) = ZOO(n) \quad (21)$$

以上, 数组 NEP 存放单元结点编号, RZ 存放结点座标值, ROO 为计算域内各列横座标而 ZOO 为各行纵座标。

对于非矩形计算域, 可仍按矩形计算域形成网格, 而在程序中用条件语句扣除不需要部分所对应的单元及结点, 从而使计算域恢复到实际的形状。

三、结 语

本文用有限单元法计算了扩底墩地基, 不论是位移还是应力都得到了比较满意的结果。从这一初步尝试可知, 该法有以下一些优点: ①高度的灵活性, 可以完全按照基础的几何尺

寸及土层的力学性质指标、外力和约束条件直接根据物理过程进行求解,这就远非传统土力学解析公式所能做到,并且可以模拟比较复杂的实际情况。如在本文中,模拟了扩底墩基础受荷沉降时扩孔斜面上土体脱离墩体的现象。②可以展示计算域内土体的应力场和位移场,了解在荷载作用下地基土受力及位移的全貌,以便分析研究土体受力机理等问题。③可以拟合土体的变形模量等参数。④采用网格自动形成可以大大节省数据输入的手工劳动。

由于土不是真正的弹性体,只有在小应变条件下才能应用弹性力学原理。因此本文提供的方法仅适应于小荷载小应变的情况,当 $P-S$ 曲线超过“直线段”后将不适用。在分析土体内的应力和位移时,墩底边缘应力特别集中,土体可能局部进入塑性阶段,因而算出的应力和位移也可能有一定失真。为解决这一问题,需进一步考虑土的应力应变非线性关系,从而计算塑性阶段中土体的位移场和应力场。

计算框图及程序从略。

本文是在陈雨孙老师的悉心指导下完成的。

参 考 文 献

- [1] 华东水利学院,弹性力学问题的有限单元法,修订版,水利出版社,1982年。