

具有拉杆的锚固桩的计算方法

徐 凤 鹤

(铁道部第四勘测设计院, 武汉)

提 要

本文介绍一种新型支挡结构物——具有拉杆的锚固桩的计算方法。计算公式的建立是根据差分原理、并借助于材料力学和矩阵代数的基本知识完成的, 公式简单明瞭, 便于掌握。它不仅考虑了桩与地基的相互作用, 而且也考虑了桩与拉杆的相互作用, 较为合理。

作者将计算公式作了推广、延伸, 证明此方法不仅适用于具有拉杆的锚固桩的计算, 而且也适用于无拉杆的情况, 对于后一情况, 计算更为简单。作者对港口工程中的单锚板桩墙也采用本方法进行了计算, 并与现行方法作了分析比较, 认为本文所介绍的方法也同样适用于港口工程中的板桩墙的计算。

一、问题的提出

锚固桩作为一种新型支挡结构物已被广泛采用。但由于桩的非锚固段的悬臂影响, 使得桩的水平位移和内力值非常大(图1)。设计者为了满足位移、内力和抗力的要求, 只好不合理地加大桩的截面尺寸和增加配筋数量。特别是当悬臂段过长时, 此类问题更加突出, 甚至不得不放弃采用锚固桩方案。为此, 曾有人建议在锚固桩顶增设拉杆, 以减小非锚固段的悬臂影响。但是, 对于这样受力复杂的静不定结构, 因苦于没有合理的计算公式和计算方法而未能实施。

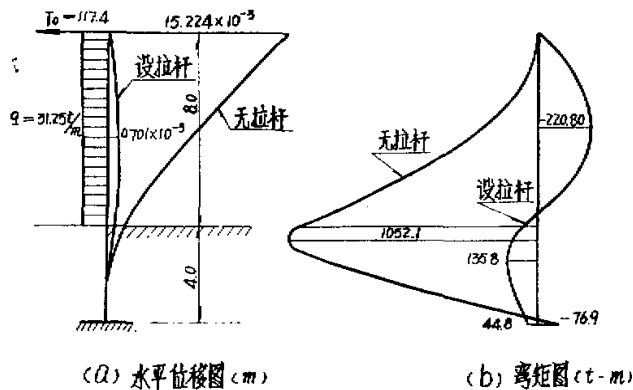


图1 桩顶设置拉杆的效果对比

最近, 我们结合某铁路支挡工程, 对桩顶具有拉杆的锚固桩进行了分析研究, 提出了新

的计算方法,并建立了新的计算公式,解决了这种新型结构物的计算问题。通过本文所介绍的方法进行计算结果表明,在外荷载、地层、桩截面和桩长均相同的情况下,桩顶设置一根拉杆时,桩的受力工作状态得到了显著的改善。设拉杆后,水平位移最大值仅为不设拉杆时的 $\frac{1}{20}$ (图1-a),最大弯矩值仅为 $\frac{1}{5}$ (图1(b)),效果很好。

二、计算假设与计算图式

具有拉杆的锚固桩的受力和工作状态是极其复杂的。这是由于不仅要考虑桩与弹性地基的相互作用,而且还要考虑桩与拉杆的相互作用。因为拉杆在其对桩顶位移起约束作用的同时,本身在拉力作用下还出现拉伸变形,因而在桩顶设置了拉杆之后,尚应考虑拉杆的应力-应变关系。

我们本着使计算结果与实际情况足够接近,同时又要略去次要细节,使计算工作得以简化的原则,作如下假设:

1. 将桩周岩土视作弹性变形介质,根据文克尔(*Winkler, E.*)理论,假定岩土对每单位面积桩的压力与岩土的压缩变形成正比,即

$$\sigma = cX \quad (2-1)$$

式中 σ ——每单位面积桩上的压力;

X ——岩土的压缩变形;

c ——地基系数,它与深度 Y 的关系可用如下幂函数表示:

$$c = m(Y + Y_0)^t \quad (2-2)$$

式中 m ——地基系数随深度变化的比例系数;

t ——随岩土类别而变的指数;

Y_0 ——与岩土类别及埋深有关的常数。

2. 不考虑桩与岩土间所产生的摩擦力和粘聚力以简化计算。

3. 桩底边界条件可根据具体情况确定,本文采用固定端、自由端、铰支端、弹性自由端和弹性铰支端五种边界条件。

4. 拉杆处桩之水平位移 X_0 与拉杆之伸长度相等,即

$$X_0 = WT_0 \quad (2-3)$$

式中 T_0 ——拉杆承受的水平拉力值;

W ——按下式计算

$$W = \frac{L}{EF} \quad (2-4)$$

式中 L ——拉杆长度;

F ——拉杆的截面积;

E ——拉杆的弹性模量。

桩所受外力有竖向力 P_0 、弯矩 M_0 、水平剪力 Q_0 和拉杆水平拉力 T_0 , 以及桩侧土压力或

滑坡推力等, 其形状可为三角形、矩形、梯形或呈任意形状分布。 Q_c 和 T_0 之合力用 Q_0 表示, 即

$$Q_0 = Q_c - T_0 \quad (2-5)$$

我们采用如下符号规则: 水平位移 X 向右为正, 弯矩使左侧纤维受拉为正, 剪力 Q 与 X 轴方向一致为正, 转角顺时针方向为负。这样, 具有拉杆的锚固桩的计算图式如图 2 所示。

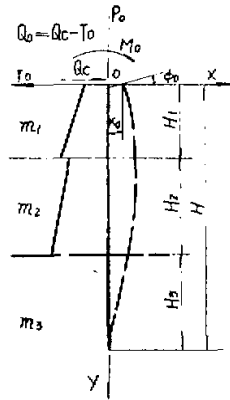


图 2 计算图式

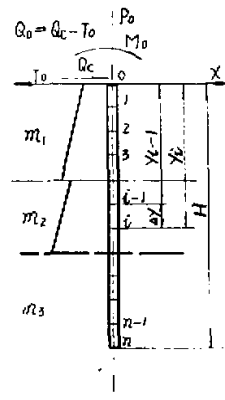


图 3 桩的分段图

三、计算公式的建立

首先把拉杆以下的桩分成有限段数 n , 每段长 $\Delta Y = H/n$ (图 3)。桩的段数划分得越多, 段长越小, 则计算精度越高。但在实际计算中, 并不一定要把桩分得过细, 实践表明, 取段长等于 0.01 m 即可满足设计要求。

根据差分原理的一阶差分公式

$$X_i = X_{i-1} + \frac{dX_{i-1}}{dY_{i-1}} \Delta Y \quad (3-1)$$

我们可以近似地建立任意相邻两截面上的水平位移、转角、弯矩和剪力之间的关系式。例如, 第 $i-1$ 截面的水平位移 X_{i-1} 、转角 ϕ_{i-1} 、弯矩 M_{i-1} 和剪力 Q_{i-1} 与第 i 截面之间的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} X_i &= X_{i-1} + \frac{dX_{i-1}}{dY_{i-1}} \Delta Y \\ \phi_i &= \phi_{i-1} + \frac{d\phi_{i-1}}{dY_{i-1}} \Delta Y \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} M_i &= M_{i-1} + \frac{dM_{i-1}}{dY_{i-1}} \Delta Y \\ Q_i &= Q_{i-1} + \frac{dQ_{i-1}}{dY_{i-1}} \Delta Y + d_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

式中 d_{i-1} ——第 $i-1$ 截面处的荷载密度 g_{i-1} 乘段长, 即

$$d_{i-1} = g_{i-1} \Delta Y$$

根据材料力学中各截面的位移、转角、弯矩和剪力四个变量之间的关系式, 我们得到如下—阶常微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX_{i-1}}{dY_{i-1}} &= \phi_{i-1} \\ \frac{d\phi_{i-1}}{dY_{i-1}} &= \frac{M_{i-1}}{(EJ)_{i-1}} \\ \frac{dM_{i-1}}{dY_{i-1}} &= Q_{i-1} - P_{i-1}\phi_{i-1} \\ \frac{dQ_{i-1}}{dY_{i-1}} &= q_{i-1} = -c_{i-1}b_{i-1}X_{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

式中 $(EJ)_{i-1}$, P_{i-1} , q_{i-1} , c_{i-1} 和 b_{i-1} 分别为第 $i-1$ 截面处的弯曲刚度、轴向力、地基抗力、地基系数和桩的计算宽度。

把式(3-3)代入式(3-2), 并写成矩阵形式, 得

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ \phi_i \\ M_i \\ Q_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta Y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\Delta Y}{(EJ)_{i-1}} & 0 \\ 0 & -P_{i-1}\Delta Y & 1 & \Delta Y \\ -c_{i-1}b_{i-1}\Delta Y & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{i-1} \\ \phi_{i-1} \\ M_{i-1} \\ Q_{i-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_{i-1} \end{Bmatrix} \quad (3-4)$$

还可更简单地写作

$$A_i = B_{i-1}A_{i-1} + D_{i-1} \quad (3-5)$$

式中 A_i, A_{i-1} ——分别为第 i 截面和第 $i-1$ 截面的水平位移、转角、弯矩和剪力的列向量;

B_{i-1} —— (4×4) 阶的系数矩阵;

D_{i-1} ——分布荷载引起的常数项列向量。

为了由桩顶截面的 X_0 , ϕ_0 , M_0 和 Q_0 求第 1 截面的 X_1 , ϕ_1 , M_1 和 Q_1 (图 3), 利用式 (3-5), 得

$$A_1 = B_0 A_0 + D_0 = F_0 A_0 + G_0 \quad (3-6)$$

式中 F_0, G_0 ——分别为对第1截面的 X_1, ϕ_1, M_1 和 Q_1 有影响的参数矩阵和常数项矩阵

$$F_0 = B_0$$

$$G_0 = D_0$$

仿照式(3-6),可以得到求第2截面的 X_2, ϕ_2, M_2 和 Q_2 的表达式

$$A_2 = B_1 A_1 + D_1 = B_1 F_0 A_0 + B_1 G_0 + D_1$$

$$= B_1 B_0 A_0 + B_1 D_0 + D_1 = F_1 A_0 + G_1$$

式中 F_1, G_1 ——分别为对第2截面的 X_2, ϕ_2, M_2 和 Q_2 有影响的参数矩阵和常数项矩阵

$$F_1 = B_1 F_0 = B_1 B_0$$

$$G_1 = B_1 G_0 + D_1 = B_1 D_0 + D_1$$

依此类推,可以得到求任意截面和桩底截面的水平位移、转角、弯矩和剪力的公式

$$A_i = F_{i-1} A_0 + G_{i-1} \quad (3-7)$$

式中 F_{i-1}, G_{i-1} ——分别为对第 i 截面的水平位移、转角、弯矩和剪力有影响的参数矩阵和常数项矩阵

$$F_{i-1} = B_{i-1} F_{i-2} = B_{i-1} B_{i-2} \cdots B_2 B_1 B_0 \quad (3-8)$$

$$\begin{aligned} G_{i-1} &= B_{i-1} G_{i-2} + D_{i-1} \\ &= B_{i-1} B_{i-2} \cdots B_2 B_1 D_0 + B_{i-1} B_{i-2} \cdots B_3 B_2 D_1 \\ &\quad + \cdots + B_{i-1} B_{i-2} D_{i-3} + B_{i-1} D_{i-2} + D_{i-1} \end{aligned} \quad (3-9)$$

由图2可知, X_0, ϕ_0 和 T_0 都是未知的, 只有 M_0 为已知。但是, 我们可以由 T_0 根据式(2-3)和(2-5)求得 X_0 和 Q_0 。这样, 只有 T_0 和 ϕ_0 是未知的。为了求出这两个未知的初始参数, 我们先由式(3-8)和(3-9)分别算出 F_{n-1} 和 G_{n-1} , 并利用桩的已知条件, 借助于式(3-7)建立未知的初始参数与事先已知的桩底初始参数有联系的必要方程组。然后解此方程组, 可以求出 T_0 和 ϕ_0 , 进而算出 X_0 和 Q_0 。

我们举一个桩顶具有长度为 L 、截面为 F 和弹性模量为 E 的水平拉杆的桩穿经土层嵌固于岩石的例子, 说明如何建立方程式, 以确定未知的 T_0 和 ϕ_0 。桩底为固定端, 其水平位移和转角分别为 $X_n = 0$ 和 $\phi_n = 0$ 。

首先求得矩阵 F_{n-1} 和 G_{n-1} , 也即算出 F_{n-1} 和 G_{n-1} 的所有元素之后, 便可根据式(3-7)得

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_n \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ \phi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{Bmatrix} \quad (3-10)$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} f_{11}X_0 + f_{12}\phi_0 + f_{13}M_0 + f_{14}Q_0 + g_1 &= 0 \\ f_{21}X_0 + f_{22}\phi_0 + f_{23}M_0 + f_{24}Q_0 + g_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

将式(2-3)和(2-5)代入式(3-11)并略加整理, 得

$$\left. \begin{aligned} f_{12}\phi_0 + (f_{11}W - f_{14})T_0 + f_{13}M_0 + f_{14}Q_0 + g_1 &= 0 \\ f_{22}\phi_0 + (f_{21}W - f_{24})T_0 + f_{23}M_0 + f_{24}Q_0 + g_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

令

$$b_1 = -f_{13}M_0 - f_{14}Q_0 - g_1$$

$$b_2 = -f_{23}M_0 - f_{24}Q_0 - g_2$$

则

$$\begin{bmatrix} f_{12} & (f_{11}W - f_{14}) \\ f_{22} & (f_{21}W - f_{24}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ T_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (3-13)$$

解此方程组, 可得 ϕ_0 和 T_0 , 并由式(2-3)和(2-5)求得 X_0 和 Q_0 。这样, 我们可以根据式(3-7)求得各截面的水平位移、转角、弯矩和剪力。

四、计算公式的推广及应用

假如桩顶不设拉杆, 则锚杆水平拉力 $T_0 = 0$, 因而 $Q_0 = Q_c$ 。这样, 桩顶 Q_0 和 M_0 都是已知的, 而只有 X_0 和 ϕ_0 是未知的。为了求出这两个未知的初始参数, 我们由式(3-8)和(3-9)分别求出 F_{n-1} 和 G_{n-1} , 并利用桩的已知条件, 借助于式(3-7)建立未知的初始参数与事先已知的桩底初始参数有联系的必要方程组。解此方程组, 可以求出 X_0 和 ϕ_0 。

我们再举一个桩顶无拉杆的锚固桩的例子, 说明如何建立方程组, 以确定未知的 X_0 和 ϕ_0 。桩底为铰支端, 水平位移 $X_n = 0$, 弯矩 $M_n = 0$ 。

首先求得 F_{n-1} 和 G_{n-1} , 也即算出 F_{n-1} 和 G_{n-1} 的所有元素之后, 便可根据式(3-7)得

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_n \\ 0 \\ Q_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & g_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ \phi_0 \\ M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{Bmatrix} \quad (4-1)$$

由此可得

$$\left. \begin{aligned} f_{11}X_0 + f_{12}\phi_0 + f_{13}M_0 + f_{14}Q_0 + g_1 &= 0 \\ f_{31}X_0 + f_{32}\phi_0 + f_{33}M_0 + f_{34}Q_0 + g_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-2)$$

令

$$\begin{cases} b_1 = -f_{13}M_0 - f_{14}Q_0 - g_1 \\ b_2 = -f_{23}M_0 - f_{24}Q_0 - g_2 \end{cases} \quad (4-3)$$

则

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ \phi_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (4-4)$$

解此方程组, 可得 X_0 和 ϕ_0 。这样, 我们就可以根据式(3-7)求得所有截面的水平位移、转角、弯矩和剪力。

显然, 桩顶无拉杆的情况是本文所建立公式的一种特殊情况, 甚至可以说它比具有拉杆的情况更为简单。

在港口工程中, 经常碰到单锚板桩墙的计算问题。迄今主要采用的计算方法有自由支承法、固定支承法、姜美法和苏规法等。这些方法的共同特点是假定岩土的反力图形为固定形状, 与各点的位移无关, 不考虑桩与桩周岩土的作用, 假定桩在设拉杆处的水平位移为零, 不考虑拉杆的拉伸变形。显然, 这些假定与桩的实际工作和受力状态是很不相符的, 也是不合理的。

我们认为港口工程中的板桩墙与本文所介绍的桩顶具有拉杆的锚固桩的工作和受力状态基本上是相同的, 故在今后单锚板桩墙的设计计算中, 也可采用本文所介绍的方法。最近, 我们已经将相同条件下的单锚板桩墙分别采用本文方法和现行方法进行计算对比(图4)。从图4(a)可以看到两种方法的抗力值是回然不同的, 显然, 虚线所示的现行方法所采用的抗力图是不合理的。从图4(b)可以看到虚线所示的现行方法所得的弯矩值大于本文方法所得结果。从本文介绍的方法所得弯矩图形来看, 用现行方法设计的板桩入土深度长了些, 可减短1 m左右。

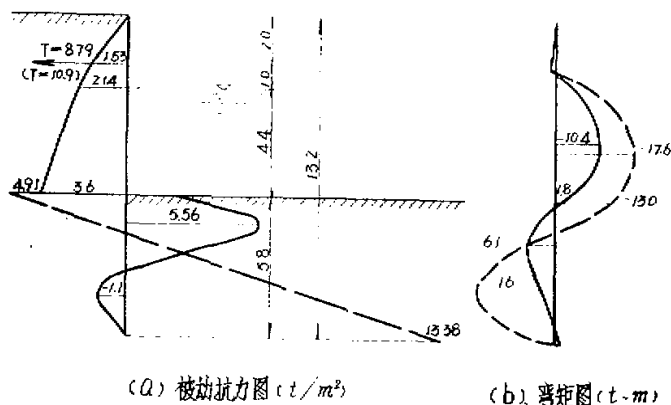


图4 单锚板桩墙的计算比较

我们根据本文建立的公式编制了ALGOL 算法语言的通用电算源程序, 计算工作完全由电子计算机完成。该程序不仅适用于带拉杆和不带拉杆的锚固桩的计算, 而且也适用于港口工程的板桩墙的计算。

五、计算实例

京广复线某工点采用桩顶具有拉杆的锚固桩支护路堑边坡. 桩长24 m, 其中锚固段长8 m, 路基面以上悬臂段长16 m. 在桩顶以下3 m处设置截面积为 0.005448 m^2 , 长为6.22 m的16锰钢拉杆, 弹性模量 $E = 2.6 \times 10^7 \text{ t/m}^2$. 桩截面为 $2 \times 3 \text{ m}$ (宽 $\times$ 高), 弹性模量 $E = 2.6 \times 10^4 \text{ t/m}^2$. 桩底为固定端, 路基面以下地层之地基系数随深度成正比增加, 比例系数 $m = 20000 \text{ t/m}^4$. 该桩所承受荷载如图5(a)所示.

我们采用 ALGOL 算法语言在 TQ-16 电子计算机上电算. 对计算结果略加整理并汇总于表 1 内, 同时还绘制了全桩的水平位移、抗力、弯矩和剪力曲线图(图 5).

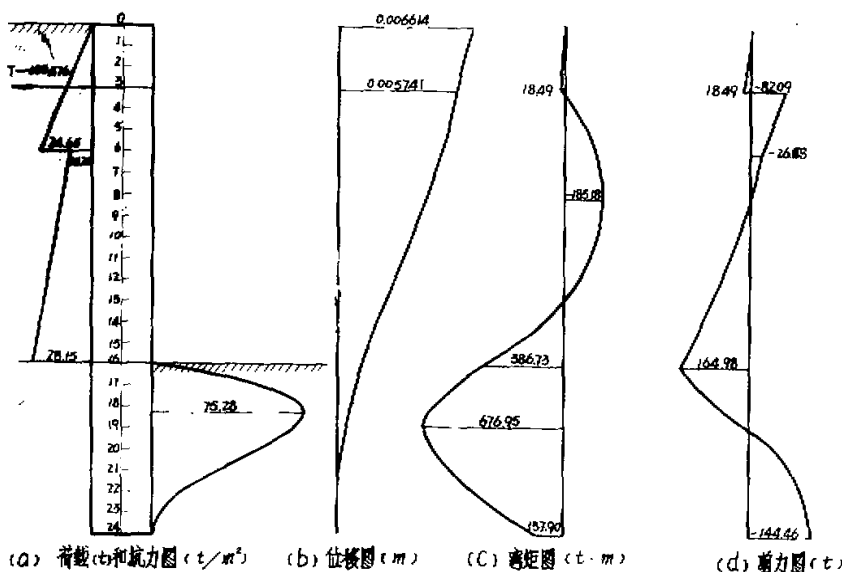


图 5 桩的荷载和抗力、位移、弯矩、剪力图

六、结 语

本文所介绍的方法特点可归纳如下:

1. 方法不仅考虑了桩与弹性地基的相互作用, 而且还考虑了桩与拉杆的相互作用, 比较合理。
2. 方法是借助于材料力学和矩阵代数的基本知识, 根据差分原理建立基本公式的, 因而简单明瞭, 便于掌握运用。
3. 方法便于解决诸如桩顶作用有竖向力、桩截面(直线变化或台阶变化)、地基层次多变、地基系数随深度成任意规律(矩形、三角形、梯形、抛物线)变化以及各种桩底边界条件等各类复杂的问题。

4. 矩阵运算具有鲜明的规律性与单一性, 所以程序编制工作简单, 可充分发挥电子计算机的效能。

表1 计算结果汇总表

深度	水平位移	弯矩	剪力	抗力
m	m	t · m	t	t / m ²
0	0.006614	0	0	0
1.0	0.006322	0.68	2.05	0
2.0	0.006030	5.48	8.22	0
3.0	0.005761	18.49	18.49 / - 82.09	0
4.0	0.005454	- 56.83	- 67.73	0
5.0	0.005161	- 115.76	- 49.26	0
6.0	0.004859	- 154.19	- 26.68	0
7.0	0.004544	- 175.53	- 15.60	0
8.0	0.004214	- 184.90	- 2.71	0
8.2	0.004146	- 185.18	0.08	0
9.0	0.003869	- 180.50	11.97	0
10.0	0.003508	- 160.53	28.44	0
11.0	0.003133	- 123.19	46.71	0
12.0	0.002748	- 66.70	66.77	0
13.0	0.002357	10.74	88.63	0
14.0	0.001968	110.93	112.28	0
15.0	0.001587	235.66	137.73	0
16.0	0.001228	386.73	164.98	0
17.0	0.000901	541.40	135.06	- 54.04
18.0	0.000619	645.23	68.55	- 74.33
18.3	0.000546	662.54	46.06	- 75.28
18.9	0.000413	676.95	1.58	- 71.85
19.0	0.000303	676.79	- 5.55	- 70.71
20.0	0.000224	638.63	- 68.54	- 53.68
21.0	0.000109	546.92	- 111.79	- 32.61
22.0	0.000040	422.13	- 134.99	- 14.52
23.0	0.000008	282.07	- 143.34	- 3.39
24.0	0	137.90	- 144.46	0

$T_0 = 100.58t$

这些都说明本文所介绍的方法不但是可行的, 而且是合理的。方法已在设计中应用, 并计划作些测试、分析和研究工作。限于作者水平, 文中错误敬请批评指正。

参 考 文 献

- [1] 徐凤鹤, 单桩矩阵分析及通用电算源程序, 铁道勘测与设计, 第3期, 1979年, 第37~48页。
[2] 天津大学等四校合编, 港口工程, 人民交通出版社, 1972年12月, 第81~124页。
[3] Leonards, G. A., Foundation Engineering, McGraw-hill Book Company, INC., 1962, pp. 438~524.

The Method for Computation of Anchor Pile with a pull Rod

Xu Feng-he

(Fourth Survey and Projecting Institute, Ministry of Railway, Wuhan)

Abstract

This paper presents a computation method for a new type of retaining structure—the anchor pile with a pull rod. The formulation has been performed according to the difference principle and with the help of fundamental knowledge of strength of materials and matrix algebra. This method is easy to understand and to operate, since it is very simple. It is reasonable for not only the mutual function between the pile and the elastic foundation but also that of the pile and the pull rod is considered.

The author has extended the computing formula and proved that this method can be applied not only for the computation of the anchor pile with a pull rod but of the anchor pile without any pull rod. The computation is much simple especially for the later. The author has computed the anchored bulkheads in the port engineering by means of this method. And compared with the customary one, the method introduced here is also possible.