

# 不透水地基上堤坝渗流计算的理论解

吴世余<sup>1</sup>, 宋新江<sup>1, 2</sup>

(1. 安徽省·淮委水利科学研究院, 安徽 蚌埠 233000; 2. 河海大学土木工程学院, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 提出堤坝流态分区概念和在流量固定条件下, 上下游流态互不影响法则。这使堤坝的渗流求解趋于简化和方便。增添新的理论计算式计有: 上游区浸润线反弯点位置的计算式, 下游区浸润线方程的解析开拓式和式前的待定常数的计算式以及下游区的附加渗径长度计算式等。按努美罗夫理论解  $\Delta L_1 = C_1 H_1 - C_2 q/k$  和柯钦娜理论解  $q/k = \mu h_0$ , 高精度计算出上游区附加渗径长度  $\Delta L_1$  的比例系数  $C_1$  和  $C_2$  以及流量和出逸点高度关系式的比例系数  $\mu$ , 并据以提出有足够精度的  $C_1$ ,  $C_2$  和  $\mu$  的拟合计算式, 以便于应用。经数值比较, 得出比例系数  $C_1$  全同于边坡有压流附加渗径长度的比例系数  $C_0$  的结果。对于有尾水位的堤坝, 提出了计算出逸点高度和下游区附加渗径长度的两经验计算式, 据以计算的结果和有限单元法相符。

**关键词:** 渗流; 堤坝; 复变函数; 数值积分; 超越几何函数

**中图分类号:** TV233.6      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000 - 4548(2010)11 - 1695 - 08

**作者简介:** 吴世余(1926 - ), 男, 教授级高级工程师, 从事土工和渗流研究工作。E-mail: qianfu66@163.com。

## Analytic solution of seepage calculation for dams and levees on impervious strata

WU Shi-yu<sup>1</sup>, SONG Xin-jiang<sup>1, 2</sup>

(1. Anhui and Huaihe River Water Resources Institute, Bengbu 233000, China; 2. College of Civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** An idea of dividing the dams and levees into three regions by seepage flow state and the rule of no flow state influence between the upstream and downstream region under fixed flow quantity are proposed. It will enable the seepage analysis and calculation of dams and levees to be simplified and convenient. New theoretical formulae for the following aspects are derived: the location of inflection point of upstream phreatic line, the analytical extension formula of downstream phreatic line and the undetermined constant before this formula, the additional length of downstream seepage path. According to the Normurov's theory  $\Delta L_1 = C_1 H_1 - C_2 q/k$  and the Kochina's theory  $q/k = \mu h_0$ , the proportional coefficients  $C_1$  &  $C_2$  of the additional length of upstream seepage path as well as the ratio  $\mu$  between the flow quantity and the height of release point are calculated. As a result,  $C_1$  is entirely equal to the corresponding data  $C_0$  of slope with confined flows. On the basis of these data, the formulae with enough precision by fitting method are given for the purpose of convenient application. For the dams and levees with tail water, two empirical formulae for the height of release point and the additional length of downstream seepage path are presented. The results conform to those by the finite element methods.

**Key words:** seepage; dam and levee; complex variable; numerical integration; hypergeometric function

## 0 前 言

关于堤坝的渗流计算, 前苏联渗流力学家, 诸如努美罗夫 C. H. 和波卢巴里诺娃 - 可钦娜 П. Я. 等曾运用复变函数和特殊函数等数学工具, 得出了一些精确的解析解; 但为着避开数学求解上的困难, 对于边界和排水条件均有一定的限制, 以致在实际应用上有一定的局限性。本文工作的目的是如何使这些精确解能应用到更普遍条件下堤坝的渗流计算。为此, 在前人研究的基础上, 增补了大量的研究分析和计算资料, 提出了一些新的理论计算式和在实际上有足够精度的

拟合计算式。这些计算式可用于堤坝的渗流计算; 除部分经验式外, 还可借以校核堤坝渗流的有限元计算程序及其它近似计算式和计算方法的正确性及其计算精度。

本文的研究对象是不透水地基上的堤坝, 上游入渗坡和下游排水体边坡的坡角  $0 \sim 90^\circ$  (对于  $\theta > 90^\circ$  的棱体和褥垫排水留待另文分析)。上游入渗坡坡比  $m_1 > 2$  为自然坡,  $m_1 < 2$  的陡坡, 坡外须有滤水堆石

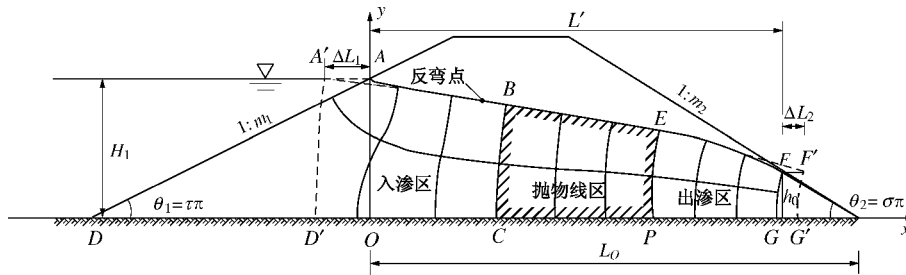


图1 堤坝剖面及渗流流态分区

Fig. 1 Profile and flow state division of dams and levees

体支撑保护;下游排水体边坡坡比  $m_2 > 2$  为贴坡排水,  $m_2 < 2$  为坝内排水。

### 1 分析和计算方法

先研究堤坝下游无水的情况。堤坝剖面及渗流流态分区如图1所示。上游水深  $H_1$ , 坡角  $q_1 = t\pi$ , 坡比  $m_1 = \cot\theta_1$ ; 下游水深为零, 坡角  $\theta_2 = \sigma\pi$ , 坡比  $m_2 = \cot\theta_2$ 。浸润线的入渗点  $A$ , 出逸点  $F$ ,  $AF$  的水平距离  $L'$ , 出逸点高度  $h_0$ , 浸润线入渗点  $A$  至下游坡角点  $I$  的水平距离  $L_0$ 。

图1中, 如  $L'/H_1 \geq 2.5 \sim 3$  (通常多能满足这一条件), 那么根据渗流流态, 可以浸润线的入渗点、出逸点和约略三分点的等势线为界, 将其简分为三区, 即入渗区、抛物线(流网)区和出渗区; 再以浸润线中点的等势线为界, 以左定义为上游区, 以右定义为下游区。抛物线区位于浸润线反弯点之后, 或离入渗点  $A$  一定距离处 ( $m_1 \rightarrow 0$ , 无反弯点), 其等势线和流线为两组相互正交的抛物线。这一区域内浸润线的任两点坐标设为  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 那么有关系式<sup>[1]</sup>

$$q/k = \frac{y_1^2 - y_2^2}{2(x_2 - x_1)}, \quad (1)$$

式中  $q$  为单宽流量,  $k$  为渗透系数。

为简化渗流计算, 可将入渗区和出渗区的浸润线相应地延长一附加渗径长度  $\Delta L_1$  和  $\Delta L_2$ , 将  $ABCD$  入渗区化为等效的  $A'B'CD$  抛物线区, 将  $EPGF$  出渗区化为等效的  $EPG'F'$  抛物线区, 即可据式(1)得

$$q/k = \frac{H_1^2 - h_0^2}{2L} = \frac{H_1^2 - h_0^2}{2(L' + \Delta L_1 + \Delta L_2)}. \quad (2)$$

根据以下的计算分析有

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{m} q/k, \\ \Delta L_1 &= C_1 H_1 - C_2 q/k, \\ \Delta L_2 &= C_3 q/k, \\ L' &= L_0 - m_2 h_0 = L_0 - \frac{m_2}{m} q/k. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中  $\mu, C_1, C_2, C_3$  分别为计算出逸点高度和上下游附加渗径的比例系数, 均为  $\theta_1$  或  $\theta_2$  的函数, 可据以

后各算式求出。

将式(3)代入式(2), 整理出  $q/k$  的二次方程, 解出  $q/k$ , 并据以计算出  $h_0, \Delta L_1, \Delta L_2, L'$ 。按式(1)计算出包括上下游等效抛物线在内的浸润线  $AF'$ ; 从  $A$  点引一与边坡垂直并与浸润线相切的线段, 以修正浸润线的始段; 再从  $F$  点引一与边坡和浸润线相切的线段, 以修正浸润线的终段。以下的分析计算工作系求出  $C_1, C_2, C_3$  和  $\mu$  等的比例系数。

在满足  $L'/H_1 \geq 2.5 \sim 3$  条件下, 按式(2), (3)联合解出  $q/k$  后, 堤坝上下游的流态就惟一地确定了。可任意改变下游区的边界和排水条件, 但上下游联合解出的  $q/k$  不变, 且  $L'/H_1 \geq 2.5 \sim 3$ , 那么上游区的流态仍不变; 同样, 也可任意改变上游区的边界条件, 但上下游联合解出的  $q/k$  不变, 并且  $L'/H_1 \geq 2.5 \sim 3$ , 那么下游区的流态也不变。根据堤坝渗流计算的这一法则, 如需求上游区的流态, 可于下游区选一便于求解的特定边界条件; 同样, 如需求下游区的流态, 可于上游区选一便于求解的特定边界条件。以下求  $C_1, C_2, C_3, \mu$  等比例系数均应用了这一法则。

### 2 入渗区的附加渗径

惯用的  $\Delta L_1$  近似计算式系由米哈依洛夫  $\Gamma K$  提出, 计算式为<sup>[2]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_1 &= CH_1 = H_1 \frac{m_1}{2m_1 + 1} & m_1 \geq 0.75, \\ \Delta L_1 &= CH_1 = H_1 \frac{m_1}{2\sqrt{1+m_1^2}} & m_1 \leq 0.75. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

努美罗夫应用复变函数理论求出入渗区附加渗径  $\Delta L_1$  的精确解。借以求解堤坝的上游区如图1所示, 下游区为棱体排水, 为便于求解, 浸润线的出逸点平下游水位, 这要求下游水深和流量间符合下列拟合关系式\*

$$H_2 \geq \frac{q}{k} \left( \frac{1}{m_3} - \frac{0.75}{1.7 + m_3^{1.2}} \right), \quad (5)$$

式中  $m_3$  为排水棱体的坡比。上式取等号时, 浸润线和棱体边坡正交; 取大于时, 浸润线出逸点的坡降为

\* 系未发表的研究资料

零。

努美罗夫提出一  $W(V)$  函数, 它在实轴  $x$  上的实部已知, 并在无穷远处有界, 运用柯西积分求出  $W(V)$  在上半平面的解, 并据以求出上游区的浸润线方程和附加渗径长度的计算式如下<sup>[2]</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \frac{H_1^2 - y^2}{2q/k} &= x + H_1 F_1(u, t) - \frac{q}{k} F_2(u, t) = x + \Delta L_1, \\ F_1(u, t) &= \frac{2 \cos t \pi}{\pi} \int_0^1 \cot^{1-2t} \frac{w\pi}{2} \arctan(u \tan \frac{w\pi}{2}) dw, \\ F_2(u, t) &= \frac{2 \sin t \pi}{\pi} \int_0^1 \cot^{1-2t} \frac{w\pi}{2} \arctan(u \tan \frac{w\pi}{2}) \cdot \\ &\left[ 1 - \frac{1}{\pi} \arctan(u \tan \frac{w\pi}{2}) \right] dw, \\ u &= \tanh \frac{\pi(H_1 - y)}{2q/k}, \quad t = \frac{q_1}{\pi}. \end{aligned} \right\} (6)$$

反弯点以右 (或离入渗点一定距离处) 的浸润线,  $u \rightarrow 1$ ,  $F_1(1, t)$ 、 $F_2(1, t)$  可简化, 变元  $q = w\pi/2$ , 并和式 (1) 相比较, 立出  $\Delta L_1$  式

$$\left. \begin{aligned} F_1(1, t) &= C_1 = \frac{4}{\pi^2} \cos t \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \cot^{1-2t} q \, dq, \\ F_2(1, t) &= C_2 = \frac{4}{\pi^2} \sin t \pi \cdot \\ &\left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \cot^{1-2t} q \, dq - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q^2 \cot^{1-2t} q \, dq \right], \\ \Delta L_1 &= C_1 H_1 - C_2 q/k. \end{aligned} \right\} (7)$$

$t=0$ , 式 (7) 的第二积分为零, 第一积分可按定积分计算<sup>[3]</sup>

$$C_1 = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \cot q \, dq = \frac{4}{\pi^2} \ln 2 = 0.4413;$$

$t=1/2$ , 上式的第一积分为零, 第二积分为

$$C_2 = \frac{4}{\pi^2} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \, dq - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} q^2 \, dq \right] = 1/3.$$

对于  $0 < t < 1/2$ , 须分为始段、中段和终段 3 段分别计算。始段  $q=0 \sim 0.2$ , 中段  $q=0.2 \sim 1.4$ , 终段  $q=1.4 \sim \pi/2$ 。始段和终段, 将  $\cot^{1-2t} q$  展为级数取前 2 项积分; 中段应用 Simpson 数值积分法计算<sup>[4]</sup>, 步长取 0.1。计算结果列于表 1。为应用方便起见, 本文提出了有足够精度的拟合计算式

$$C_1 = 0.44 \frac{m_1^{1.2}}{0.58 + m_1^{1.2}}, \quad C_2 = \frac{1}{31 + 0.625m_1^{1.2}}. \quad (8)$$

计算结果列于表 1。边坡有压流的附加渗径长度仅和透水层的厚度  $T$  成正比, 而和  $H_1$  及  $q/k$  无关,  $\Delta L_1 = C_0 T$ 。这一比例系数  $C_0$  和米哈依洛夫式比例系数  $C$  也一并列于表 1, 以资比较。

为校核数值积分的计算精度, 还应用其它方法加以比较。对于  $t=0$ , 数值积分为  $C_1=0.4410$ , 定积分为  $C_1=0.4413$ ; 对于  $t=1/4$ , 数值积分为  $C_1=0.2794$ , 展为级数积分为  $C_1=0.2792$ 。

根据表 1 的计算结果得: ①理论式的  $C_1$  系数全同于边坡有压流的  $C_0$  系数 (微小的差别系由于计算  $C_1$  时所取数值积分的计算精度所致)。②拟合式和理论式的  $C_1, C_2$  系数甚为接近, 绝对误差最大 0.0030, 平均 0.0011, 相对误差最大 1%, 平均 0.36%。为便于计算, 免去按表插入, 可应用拟合式计算。③米哈依洛夫式精度较差,  $C > C_1$ , 误差 11%~22%, 且未涉及和  $q/k$  的关系。④一般情况下,  $q/k$  比  $H_1$  约小一数量级,  $q/k \approx 0.1 \sim 0.15H_1$ , 故初步的近似计算, 也可略去  $C_2$  系数。

按式 (3), (7) 附加渗径长度  $\Delta L_1$  和  $q/k$  成反比, 参考文献<sup>[6]</sup>对此作了证明和解释, 参考文献<sup>[6]</sup>还提出了上游坡下有覆盖层情况下  $\Delta L_1$  的计算式。

如图 1 所示, 当  $m_1 \rightarrow 0$ , 浸润线无反弯点; 当  $m_1 \geq 1.5$ , 按式 (6) 求出浸润线反弯点的位置为

$$\Delta h = H_1 - y = \frac{q}{\pi k} \ln \frac{2\pi H_1}{q/k}. \quad (9)$$

式 (9) 可作为修正浸润线始段的参考。

### 3 出逸点的高度

据前述  $q/k = \mu h_0$ , 须求出比例系数  $\mu$ , 它是出渗坡坡角  $\theta_2 = \sigma\pi$  的函数。借以求解堤坝的下游区如图 2 所示, 上游区为无限长的抛物线区。波卢巴里诺娃 - 可钦娜应用三奇点傅克斯微分方程, 黎曼算符和超越几何函数等数学工具求出问题的解答, 并经法尔科维奇 C.B. 接续分析计算, 导出比例系数  $\mu$  的计算式为<sup>[2]</sup>

$$\frac{h_0}{q/k} = \frac{1}{m} = \frac{4}{\pi^2} \sin s \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot^{1-2s} q \ln(\cot \frac{q}{2}) dq. \quad (10)$$

米哈依洛夫将上式展为双重级数式<sup>[2]\*</sup>

$$\frac{h_0}{q/k} = \frac{1}{m} = \frac{4^s \sin s \pi}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^{n+m} \Gamma(m-1+2s)}{(n+s)^2 \Gamma(-1+2s)m!}, \quad (11)$$

米氏又提出了  $\mu$  的近似计算式

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_0}{q/k} = \frac{1}{m} &= m_2 + 1/2 & m_2 \geq 1, \\ \frac{h_0}{q/k} = \frac{1}{m} &= \frac{3}{4}(m_2 + 1) & m_2 \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式 (12) 的第一式与谢斯塔可夫 BM. 和巴洛甫斯基 HH. 提出的  $H_2=0$  的经验计算式相同<sup>[1]</sup>。

本文提出了  $\sigma \rightarrow 0$  条件下  $\mu$  的计算式

$$\frac{h_0}{q/k} = \frac{1}{m} = \frac{1}{s\pi} \left[ 1 + s \ln 4 + \frac{s^2}{2} (\ln 4)^2 - \frac{\pi^2}{3} s^2 \right]. \quad (13)$$

\* 参考文献[2](中译文)式中  $4^\sigma$  错为  $4\sigma$

表1 附加渗径  $\Delta L_1$  的比例系数

Table 1 Proportional coefficients of additional length  $\Delta L_1$

| $\theta_1/(\circ)$ | 0        | 15      | 30      | 45      | 60      | 75      | 90     |
|--------------------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| $t$                | 0        | 1/12    | 1/6     | 1/4     | 1/3     | 5/12    | 1/2    |
| $m_1$              | $\infty$ | 3.7321  | 1.7321  | 1       | 0.57735 | 0.26795 | 0      |
| C 米氏式              | 0.5000   | 0.4409  | 0.3880  | 0.3333  | 0.2500  | 0.1294  | 0      |
| $C_0$ 有压流          | 0.44127  | 0.39476 | 0.34148 | 0.27936 | 0.20540 | 0.11487 | 0      |
| $C_1$ 理论式          | 0.44127  | 0.39476 | 0.34147 | 0.27936 | 0.20539 | 0.11486 | 0      |
| $C_1$ 拟合式          | 0.4400   | 0.3931  | 0.3385  | 0.2785  | 0.2074  | 0.1153  | 0      |
| $C_2$ 理论式          | 0        | 0.0828  | 0.1497  | 0.2057  | 0.2537  | 0.2958  | 0.3333 |
| $C_2$ 拟合式          | 0        | 0.0826  | 0.1510  | 0.2051  | 0.2519  | 0.2953  | 0.3333 |

表2 比例系数  $\mu$

Table 2 Proportional coefficient  $\mu$

| $\theta_2/(\circ)$            | 0        | 15      | 30      | 45      | 60      | 75      | 90      |
|-------------------------------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\sigma$                      | 0        | 1/12    | 1/6     | 1/4     | 1/3     | 5/12    | 1/2     |
| $m_2$                         | $\infty$ | 3.7321  | 1.7321  | 1       | 0.57735 | 0.26795 | 0       |
| 级数式 (11)                      | 0        | 0.23804 | 0.44761 | 0.64840 | 0.85491 | 1.08151 | 1.34687 |
| 数值积分 (10)                     | 0        | 0.23778 |         | 0.64818 | 0.85436 |         | 1.34667 |
| $\sigma \rightarrow 0$ 式 (13) | 0        | 0.23814 | 0.44892 | 0.65395 |         |         |         |
| 拟合式 (14)                      | 0        | 0.23828 | 0.44699 | 0.64685 | 0.85489 | 1.08665 | 1.34840 |
| 米氏近似式 (12)                    | 0        | 0.23629 | 0.44802 | 0.66667 | 0.84530 | 1.05157 | 1.33333 |

为便于应用和计算, 本文又提出了  $\mu$  的拟合计算式

$$\frac{h_0}{q/k} = \frac{1}{m} = \sqrt{0.55 + 0.84m_2 + m_2^2} \quad (14)$$

$\mu$  的计算结果列于表 2。

表 2 中, 数值积分按 Simpson 法计算<sup>[4]</sup>。  $\theta_2=90^\circ$ , 可按定积分计算  $\mu$  的确值<sup>[3]</sup>, 以  $\sigma=1/2$  代入式 (10) 得

$$\frac{h_0}{q/k} = \frac{1}{m} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \ln(\cot \frac{q}{2}) dq = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{\pi/4} \ln \cot x dx = \frac{8}{\pi^2} G$$

$$\mu = \frac{\pi^2}{8G} = \frac{\pi^2}{8 \times 0.9159656} = 1.34689$$

式中  $G$  为卡特兰常数,  $G=0.915965594\dots\dots$ 。

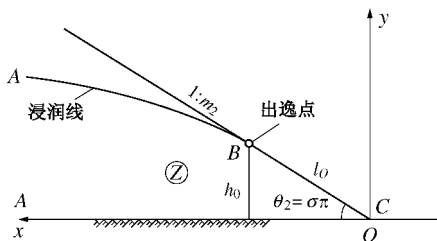


图 2  $L_0=\infty$  的堤坝

Fig. 2 Dams and levees with infinite width

按  $\sigma=1/2$  的定积分计算结果  $\mu=1.34689$  校核表中  $\mu$  值, 知按级数式 (11) 计算的精度最高, 数值积分式 (10) 次之, 式 (13) 只适用于  $\theta \leq 30^\circ$  的计算。拟合计算式 (14) 的绝对误差最大 0.005, 平均 0.001; 相对误差最大 0.5%, 平均 0.15%。米氏近似式 (13) 的绝对误差最大 0.03, 平均 0.01; 相对误差最大 2.8%,

平均 1.2%。据此建议可按拟合计算式 (14) 计算  $\mu$  值。参考资料<sup>[2]</sup>虽有  $\mu$  的曲线图, 但其精度不足且有误。

### 4 出渗区的附加渗径

已知浸润线和出渗边坡相切, 但根据上节所述,  $\theta_2 > \arctan \mu$ , 故出渗区并非抛物线区, 也须计算出附加渗径长度  $\Delta L_2$ , 将其化为等效的抛物线区计算 (惯用的计算方法均未计及这一附加渗径)。

先计算  $\theta_2=90^\circ$  时特定条件下的附加渗径长度  $\Delta L_2$ 。借以解题的堤坝是矩形堤坝, 入渗和出渗边坡均为垂直向。据恰尔内伊 И. А. 的研究, 矩形坝  $q/k$  的精确计算式为<sup>[2]</sup>

$$q/k = \frac{H_1^2 - H_2^2}{2L_0} \quad (15)$$

式中  $H_1$  和  $H_2$  为上下游的水深,  $L_0$  为坝宽,  $q/k$  和出逸点高度  $h_0$  无关。已知入渗坡的附加渗径长度为  $-\frac{1}{3} q/k$ ,  $H_2=0$ , 据此可得

$$q/k = \frac{H_1^2}{2L_0} = \frac{H_1^2 - (\frac{1}{3} q/k)^2}{2(L_0 - \frac{1}{3} q/k + \Delta L_2)}$$

展开上式, 运算后得

$$\Delta L_2 = 0.057714551 q/k \quad (16)$$

再计算  $\theta_2 < 90^\circ$  时相应的附加渗径长度  $\Delta L_2$ 。按上节对图 2 堤坝的研究得<sup>[2]</sup>

$$\left. \begin{aligned} Z = \frac{dz}{dz} &= A(\cos S\pi + i \sin S\pi) \frac{V_0}{\sqrt{z}} \\ V_0 &= z^{s-\frac{1}{2}} F(s+e, s-e; \frac{1}{2}+s; z) \\ e &= \frac{1}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{C}{k}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中  $\zeta$  为辅助平面, 图 2 中  $z$  平面的  $C$  点映射到  $\zeta=0$ ,  $B$  点映射到  $\zeta=1$ ,  $A$  点映射到  $\zeta=\pm\infty$ ;  $V_0$  为  $|\zeta|<1$  区域傅克斯方程的第二基础解,  $A$  为待定常数,  $F$  为超越几何函数, 其级数展开式见式 (28);  $C$  为蒸发强度, 即单位面积单位时间蒸发水的体积。

计算浸润线须将  $V_0$  解析开拓到  $|\zeta|<1$  的区域。参考文献 [2] 缺此解析开拓式。如直接令式 (17) 中  $e=0$ , 那么超越几何函数的第 1, 2 指标相同, 解析开拓式  $V_\infty$  为非常复杂、不易计算的级数式 [7], 故仍保留  $e$ , 得解析开拓式

$$V_\infty = (-1)^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+s)\Gamma(-2e)}{\Gamma(\frac{1}{2}-e)\Gamma(s-e)} (-z)^{-\frac{1}{2}-e} \cdot F(\frac{1}{2}+e, s+e; 1+2e; \frac{1}{z}) + (-1)^{\frac{1}{2}-s} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+s)\Gamma(2e)}{\Gamma(\frac{1}{2}+e)\Gamma(s+e)} (-z)^{-\frac{1}{2}+e} F(\frac{1}{2}-e, s-e; 1-2e; \frac{1}{z})$$

本文以取极限的方法, 除超越几何函数外, 令  $e \rightarrow 0$ , 据上式求出解析开拓式  $V_\infty$  为

$$V_\infty = (-1)^{\frac{1}{2}-s} (-z)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s)} \left\{ \left[ \pi i + \ln z - y(s) - y(\frac{1}{2}) + 2y(1) \right] F(\frac{1}{2}, s; 1; \frac{1}{z}) - \frac{1}{2e} \left[ F(\frac{1}{2}+e, s+e; 1+2e; \frac{1}{z}) - F(\frac{1}{2}-e, s-e; 1-2e; \frac{1}{z}) \right] \right\} \quad (18)$$

式中  $y(x)$  函数的定义为  $y(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x)$ 。

浸润线的方程为  $z = \int_1^z Z dz + h_0(m_2 + i)$ 。

将式 (17) 的第一式  $V_0$  改为  $V_\infty$  和式 (18) 代入上式得

$$z - h_0(m_2 + i) = A \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s)} \int_1^z \frac{1}{z} \left\{ \left[ \pi i + \ln z - y(s) - y(\frac{1}{2}) + 2y(1) \right] F(\frac{1}{2}, s; 1; \frac{1}{z}) - \frac{1}{2e} \left[ F(\frac{1}{2}+e, s+e; 1+2e; \frac{1}{z}) - F(\frac{1}{2}-e, s-e; 1-2e; \frac{1}{z}) \right] \right\} dz \quad (19)$$

求待定常数  $A$ 。设  $\zeta \rightarrow \infty$ , 那么浸润线已进入抛物线区, 这时  $F(\frac{1}{2}, s; 1, \frac{1}{z}) \approx 1$ 。式 (19) 积分式中, 虚部仅 1 项, 实部仅取最大项, 得

$$y = h_0 + \frac{\pi A}{B(\frac{1}{2}, s)} \ln \zeta, \quad x = m_2 h_0 + \frac{A}{B(\frac{1}{2}, s)} \frac{(\ln z)^2}{2}$$

式中,  $B(\frac{1}{2}, s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)}$ 。

由于  $\zeta \rightarrow \infty$ , 略去  $x, y$  式中的  $m_2 h_0$  和  $h_0$  项, 将其代入式 (1) 得

$$\frac{y_2^2 - y_1^2}{2(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{\pi^2 A^2}{B^2(\frac{1}{2}, s)} [(\ln z_2)^2 - (\ln z_1)^2]}{2 \frac{A}{B(\frac{1}{2}, s)} \left[ \frac{(\ln z_2)^2}{2} - \frac{(\ln z_1)^2}{2} \right]} = q/k, \quad A = \frac{1}{\pi^2} B(\frac{1}{2}, s) q/k = \frac{1}{\pi^2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} \frac{q}{k} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s)} m h_0 \quad (20)$$

式 (20) 为本文提出的待定常数  $A$  的计算式。也可按下式将  $F(s, s; \frac{1}{2}+s, \zeta)$  展为级数计算  $A$ , 以资比较。

$$h_0 = A \sin S\pi \int_0^1 \frac{F(s, s; \frac{1}{2}+s; z)}{z^{1-s}} dz \quad (21)$$

式 (20), (21) 的计算结果列于表 3。

表 3 待定常数  $A$

| Table 3 Undetermined constant A |                    |                             |
|---------------------------------|--------------------|-----------------------------|
| $\sigma$                        | $A/h_0$ 式 (20)     | $A/h_0$ 式 (21)              |
| 0                               | $1/\pi = 0.318310$ | 0.318310                    |
| 1/12                            | 0.321567           | 0.321566                    |
| 1/4                             | 0.344518           | 0.344524                    |
| 1/2                             | 0.428727           | $0.428727 = \frac{\pi}{8G}$ |

将式 (20) 代入式 (19) 可得浸润线方程式

$$\frac{z - h_0(m_2 + i)}{q/k} = \frac{1}{\pi^2} \int_1^z \frac{1}{z} \left\{ \left[ \pi i + \ln z - y(s) - y(\frac{1}{2}) + 2y(1) \right] F(\frac{1}{2}, s; 1; \frac{1}{z}) dz - \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{2e} \int_1^z \left[ F(\frac{1}{2}+e, s+e; 1+2e; \frac{1}{z}) - F(\frac{1}{2}-e, s-e; 1-2e; \frac{1}{z}) \right] dz \right\} \quad (22)$$

以具体的  $s$  代入式 (22), 将超越几何函数展为级数, 并令  $e \rightarrow 0$  取极限, 再令积分上限  $\zeta \rightarrow \infty$ , 据以计算出该点的坐标为  $z_A = x_A + iy_A$ , 据此立出出渗区附加渗径长度  $\Delta L_2$  的计算式为

$$y_A^2 - h_0^2 = 2 \frac{q}{k} (x_A - m_2 h_0 + \Delta L_2) \quad (23)$$

按式 (23) 求出  $\Delta L_2$ , 即可按式 (3) 计算出  $C_3$ ,  $C_3$  列于表 4。当  $\sigma \rightarrow 0$  得出  $C_3$  以简单函数表示的理论式和  $dC_3/ds$  值如下

$$\left. \begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} C_3 &= \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{\pi^2}{6} - 2(\ln 2)^2 \right] = 0.069306531, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dC_3}{ds} &= 0.0132. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

为便于应用, 立出计算  $C_3$  的 2 个拟合式如下。

$$\left. \begin{aligned} s &= 0 \sim \frac{1}{2}, \\ C_3 &= 0.0693 - 0.0132s - 0.0088s^2 - 0.0224s^3; \\ s &= \frac{1}{2} \sim 1, \\ C_3 &= 0.0577 - 0.0388s_R - 0.1057s_R^2 + 0.2111s_R^3 - \\ &\quad 0.6122s_R^4, \\ s_R &= s - \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} s &= 0 \sim \frac{1}{2}, C_3 = 0.0693 - \frac{0.0116}{1 + 1.762m_2^{1.25}}, m_2 = \cot s \pi; \\ s &= \frac{1}{2} \sim 1, C_3 = \frac{0.0577}{1 + 0.364m_2^{1.25}}, m_2 = |\cot s \pi|. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式 (25), (26) 的  $C_3$  值也列于表 4, 以资比较

表 4 附加渗径  $\Delta L_2$  的比例系数  $C_3$

Table 4 Proportional coefficient  $C_3$  of additional length  $\Delta L_2$

| $\sigma$        | 理论式    | 式 (25) | 式 (26) |
|-----------------|--------|--------|--------|
| $\rightarrow 0$ | 0.0693 | 0.0693 | 0.0693 |
| 1/12            | 0.0681 | 0.0682 | 0.0682 |
| 1/6             | 0.0667 | 0.0668 | 0.0667 |
| 1/4             | 0.0651 | 0.0651 | 0.0651 |
| 1/3             | 0.0631 | 0.0631 | 0.0632 |
| 5/12            | 0.0607 | 0.0607 | 0.0606 |
| 1/2             | 0.0577 | 0.0577 | 0.0577 |
| 7/12            | 0.0539 | 0.0538 | 0.0539 |
| 2/3             | 0.0489 | 0.0488 | 0.0488 |
| 3/4             | 0.0423 | 0.0423 | 0.0423 |
| 5/6             | 0.0332 | 0.0333 | 0.0335 |
| 11/12           | 0.0200 | 0.0200 | 0.0200 |
| 1               | 0      | 0      | 0      |

据计算结果,  $C_3$  值较小, 故初步的近似计算, 也可将  $\Delta L_2$  略去不计。

### 5 出逸坡降

按图 2 原有的研究成果<sup>[2]</sup>, 整理出出逸段 BC 的出逸速度计算式为

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} = u - iv &= \frac{\Gamma^2(1-s)\Gamma(\frac{1}{2}+s)}{\pi \Gamma(\frac{3}{2}-s)} k \sin^2 q_2 (\tan q_2 + i) \cdot \\ &\quad \frac{F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}-s; z)}{z^{(s-\frac{1}{2})} F(s, s; \frac{1}{2}+s; z)} - k \tan q_2, \\ y/h_0 &= \frac{m}{\sqrt{\pi}\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{1}{2}+s)} \int_0^z \frac{F(s, s; \frac{1}{2}+s; z)}{z^{1-s}} dz, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式中, 超越几何函数可按下式展为级数进行计算<sup>[7]</sup>

$$\left. \begin{aligned} F(a, b; c; x) &= 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(1+a)b(1+b)}{c(1+c)2!}x^2 + \\ &\quad \frac{a(1+a)(2+a)b(1+b)(2+b)}{c(1+c)(2+c)3!}x^3 + \mathbf{L}, \\ F(a, b; c; 1) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

以  $\theta_2=45^\circ$  ( $\sigma = 1/4$ ) 的坝内排水体为例, 计算的出逸坡降列于表 5。按表 5 绘出坡降  $I$  的分布曲线反算校核  $q/k=0.650h_0$ , 和理论值  $0.6484h_0$  接近。

研究了  $\theta_2 \rightarrow 0$  和  $\theta_2 \rightarrow \pi/2$  两极限条件下的出逸坡降分布。 $\theta_2 \rightarrow 0$ , 那么全出逸段  $I_x \approx \theta_2$ ,  $I_y$  从坡脚以零值向上微增, 至出逸点附近方急剧增至  $\theta_2^2$ 。 $\theta_2 \rightarrow \pi/2$ , 那么  $I_x$  从出逸点以零值向下渐增, 至坡脚附近方急增至  $\tan \theta_2$ ,  $I_y$  从出逸点以 1 向下渐减, 至坡脚附近方急剧降至零。

### 6 算 例

上游坡 1:3, 上游水深  $H_1=10$  m; 下游设置坝内排水体, 坡比 1:1, 下游水深  $H_2=0$ 。入渗点至排水坡脚的水平距离  $L_0=32$  m。计算  $q/k$ ,  $h_0$ , 浸润线和排水体的出逸坡降。

按式 (8) 计算,  $C_1=0.3809$ ,  $C_2=0.0999$ , 按式 (14) 计算  $\mu=0.6468$ , 按式 (25) 或 (26) 计算,  $C_3=0.0651$ , 按式 (2) 计算  $q/k$  得

$$\frac{10^2 - (\frac{q/k}{0.6468})^2}{2(32 + 0.3809 \times 10 - 0.0999q/k - 1 \times \frac{q/k}{0.6468} + 0.0651q/k)} = q/k, 0.7714(q/k)^2 - 71.618q/k + 100 = 0, q/k = 1.418 \text{ m}.$$

按式 (3) 计算  $h_0$ ,  $\Delta L_1$ ,  $\Delta L_2$  和  $L'$  得  $h_0=2.192$  m,  $\Delta L_1=3.667$  m,  $\Delta L_2=0.092$  m,  $L'=29.808$  m。

按式 (9) 计算浸润线反弯点的位置  $\Delta h = H_1 - y = 1.711$  m。

按式 (1) 计算浸润线  $A'F'$ , 并据  $\Delta h = 1.711$  m 定出反弯点, 然后按第 1 节所述方法修正浸润线的始段和终段。上游的修正线段可引至反弯点, 如无反弯

点, 或  $m_1 < 1.5$ , 也可近似地将修正线段引至按式 (9) 定出的参照点。下游浸润线的修正线段可引至浸润线离出逸点水平距离为  $h_0$  的一点。

斜坡排渗体的出逸坡降见表 5。

表 5  $\theta_2 = 45^\circ$  的出逸坡降

Table 5 Exit gradient of  $45^\circ$  slope

| $\zeta$ | $y/h_0$ | $I_x$ | $I_y$ | $I$   | 倾角<br>$\alpha/(^\circ)$ | 边坡夹<br>角 $\beta/(^\circ)$ |
|---------|---------|-------|-------|-------|-------------------------|---------------------------|
| 0       | 0       | 1.0   | 0     | 1.0   | 0                       | 45                        |
| 0.004   | 0.138   | 0.954 | 0.046 | 0.955 | 2.76                    | 42.24                     |
| 0.06    | 0.271   | 0.910 | 0.090 | 0.914 | 5.65                    | 39.35                     |
| 0.03    | 0.406   | 0.865 | 0.135 | 0.876 | 8.87                    | 36.13                     |
| 0.1     | 0.549   | 0.816 | 0.184 | 0.837 | 12.71                   | 32.29                     |
| 0.2     | 0.654   | 0.778 | 0.222 | 0.809 | 15.93                   | 29.07                     |
| 0.4     | 0.781   | 0.728 | 0.272 | 0.777 | 20.49                   | 24.51                     |
| 0.7     | 0.904   | 0.666 | 0.334 | 0.745 | 26.63                   | 18.37                     |
| 0.9     | 0.969   | 0.613 | 0.387 | 0.725 | 32.27                   | 12.73                     |
| 1.0     | 1.0     | 0.5   | 0.5   | 0.707 | 45                      | 0                         |

### 7 堤坝下游有尾水位条件下的渗流计算

对于堤坝下游有尾水位的情况如图 3 所示, 无渗流解析解的资料。仅当其上下游均为垂直边坡的矩形堤坝, 可钦娜<sup>[2]</sup>得出了理论解。根据她计算的曲线图, 本文整理出经验计算式

$$\left. \begin{aligned} S &= h_0(1 - H_2/H_1)^{\frac{H_1+H_2}{h_0 H_1}}, \\ h_s &= H_2 + S, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式中  $H_2$  为下游水深,  $h_s$  为出逸点高度,  $S$  为出逸点至下游水位的高度,  $h_0$  为  $H_2 = 0$  条件下的出逸点高度。本文将矩形堤坝的计算式 (29) 借用到图 1 堤坝有尾水位情况下的渗流计算。

受尾水位的影响, 通过出逸点的等势线将向边坡趋近, 不再是如图 1 所示的近似抛物线, 其附加渗径  $\Delta L_2$  远大于  $C_3 q/k$ , 本文提出  $\Delta L_2$  的经验计算式为

$$\left. \begin{aligned} \Delta L_2 &= C_3 q/k + C_1' H_2 \sin \frac{\pi H_2}{2H_1}, \\ C_1' &= 0.44 \frac{m_2^{1.2}}{0.58 + m_2^{1.2}}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

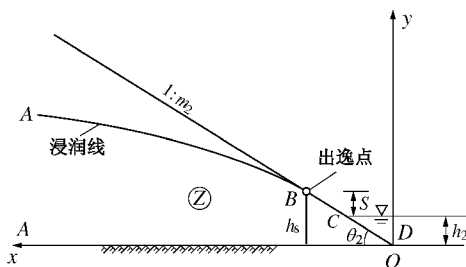


图 3 有尾水位的堤坝

Fig. 3 Dams and levees with tail water

式 (30)  $\Delta L_2$  式和  $H_2 = 0$ ,  $H_2 \rightarrow H_1$  两极限条件下的理论式相符。据上所述立出

$$q/k = \frac{H_1^2 - h_s^2}{2(L_0 + C_1 H_1 - C_2 q/k + C_3 q/k - m_2 h_s + C_1' H_2 \sin \frac{\pi H_2}{2H_1})} \quad (31)$$

举一算例:  $H_1 = 10$  m,  $m_1 = m_2 = 2$ ,  $L_0 = 40$  m,  $H_2 = 0 \sim 10$  m, 先设  $H_2 = 0$ , 按第 6 节所述方法计算出  $q/k = 1.215$  m,  $h_0 = 3.033$  m, 再代入式 (29), (31) 计算出  $h_s$  和  $q/k$  列于表 6, 同时列出按有限元方法计算的结果以资比较。

表 6 算例在不同尾水位下的  $h_s$  和  $q/k$

Table 6  $h_s$  and  $q/k$  under different tail water level

| $H_2/m$ | $h_s/m$ |      | $\frac{q}{k}/m$ |      |
|---------|---------|------|-----------------|------|
|         | 式 (29)  | 有限元  | 式 (31)          | 有限元  |
| 0       | 3.033   | 3.10 | 1.215           | 1.22 |
| 1       | 3.120   | 3.09 | 1.212           | 1.21 |
| 2       | 3.390   | 3.28 | 1.200           | 1.21 |
| 3       | 3.841   | 3.72 | 1.177           | 1.19 |
| 4       | 4.459   | 4.44 | 1.133           | 1.14 |
| 5       | 5.218   | 5.28 | 1.063           | 1.07 |
| 6       | 6.085   | 6.17 | 0.955           | 0.95 |
| 7       | 7.025   | 7.10 | 0.802           | 0.80 |
| 8       | 8.004   | 8.00 | 0.596           | 0.59 |
| 9       | 9.000   | 9.00 | 0.332           | 0.33 |
| 10      | 10      | 10   | 0               | 0    |

根据上表和有限元的比较结果, 可以看出按本文提出的近似式 (29), (30) 计算, 有一定的计算精度。

有尾水位堤坝渗流的惯用简化算法, 系以尾水位为界分为上下两层计算, 然后叠加得出  $q/k$  和  $h_s$ 。这相当于人为地在尾水位高程处加上一隔板, 必将逼高渗流出逸点的高度  $h_s$ 。同时由于增加了渗流阻力, 除矩形堤坝外, 将使  $q/k$  减小。上述算例按分层法计算的结果列于表 7。

表 7 以尾水位为界, 算例按分层法计算的  $h_s$  和  $q/k$

Table 7  $h_s$  and  $q/k$  calculated by layerwise summation method

| $H_2/m$         |     | 1     | 3     | 5     |
|-----------------|-----|-------|-------|-------|
| $h_s/m$         | 分层法 | 3.582 | 4.742 | 6.007 |
| $h_s/m$         | 本文法 | 3.120 | 3.841 | 5.218 |
| $\frac{q}{k}/m$ | 分层法 | 1.139 | 1.117 | 0.978 |
| $\frac{q}{k}/m$ | 本文法 | 1.212 | 1.177 | 1.062 |

关于浸润线的计算和绘制仍如第 1, 6 两节所述。出逸段的渗流坡降仅有矩形堤坝的理论解, 其计算式也十分繁复, 今仅按速度平面图得出图 3 中 B, C, D 3 个控制点的出逸坡降  $I$  及倾角  $\alpha$  为: B 点,  $I = \sin \theta_2$ ,  $\alpha = -\theta_2$ ; C 点,  $I = \infty$ ,  $\alpha = \pi/2 - \theta_2$ ; D 点,  $I = 0$ ,  $\alpha = \pi/2 - \theta_2$ 。

## 8 结 论

(1) 提出堤坝渗流流态分区概念, 分为3区: 入渗区、抛物线区和出渗区。在  $L/H_1 \geq 2.5 \sim 3$  的条件下 (通常多能满足), 只要  $q/k$  一定, 那么下游区的边界条件不影响上游区的流态; 同样, 在满足上述条件下, 上游区的边界条件也不影响下游区的流态。应用堤坝渗流流态的这一法则, 使堤坝的渗流计算分析简化和方便许多。

(2) 应用数值积分法按努氏理论计算入渗区的附加渗径  $\Delta L_1 = C_1 H_1 - C_2 q/k$  的比例系数  $C_1$  和  $C_2$ , 得出  $C_1$  和有压流边坡附加渗径的比例系数  $C_0$  全同的结果; 并据以提出有足够精度的  $C_1$  和  $C_2$  的拟合计算式, 以便于实际应用。另提出浸润线反弯点位置的计算式。

(3)  $q/k = \mu h_0$ , 按米氏双重级数式计算出高精度的比例系数  $\mu$ , 和用定积分及数值积分抽校的数值相符, 并据以提出有足够精度  $\mu$  的拟合计算式。另提出了  $\theta_2 \rightarrow 0$  条件下  $\mu$  的理论计算式。

(4) 导出出渗区浸润线方程的解析开拓式和式前的待定常数  $A$ , 并据以提出出渗区附加渗径长度  $\Delta L_2$  理论计算式和拟合式。

(5) 对于堤坝有尾水位情况下的渗流计算, 提出了出逸点高度  $h_s$  和出渗区附加渗径长度  $\Delta L_2$  的2个经验计算式, 据以计算出的  $q/k$  和  $h_s$  与有限元的计算结果相符。

(6) 本文提出的计算式和计算方法可用于堤坝的渗流计算; 除部分经验计算式外, 还可借以校核堤坝渗流的有限元计算程序和其它近似计算式和计算方法的正确性及其计算精度。 $C_2$  和  $C_3$  在  $q/k$  计算式中, 一负一正, 部分相消, 且  $q/k$  较  $H_1$  约小一数量级,  $q/k \approx 0.1 \sim 0.15 H_1$ , 故初步的近似计算,  $C_2$  和  $C_3$  也可略而不计。

致 谢: 本文第7节有限元计算部分由孟繁瑾提供, 附言志谢。

## 参考文献:

- [1] 毛昶熙. 渗流计算分析与控制[M]. 2版. 北京: 中国水利水电出版社, 2003: 94 - 95, 93. (MAO Chang-xi, et al. Seepage computation analysis and control[M]. 2nd eds. Beijing: China Water Power Press, 2003: 94 - 95, 93. (in Chinese))
- [2] 波卢巴里诺娃 - 可钦娜 П. Я. 地下水运动原理[M]. 肖楠森, 任荣祖, 徐志英, 译. 北京: 地质出版社. 1957: 401 - 402, 321 - 323, 393, 400, 401, 368 - 369, 389 - 391. (POLUBARINOVA- Kochina P Y. Theory of ground water movement[M]. XIAO Nan-sen, REN Rong-zu, XU Zhi-ying, trans. Beijing: Geology Press, 1957: 401 - 402, 321 - 323, 393, 400, 401, 368 - 369, 389 - 391. (Russian trans in Chinese))
- [3] GRADSHTEYN I S. Table of integrals, series, and products[M]. New York: Academic Press, 1980: 417, 529.
- [4] SMITH P F. Mathematical texts for colleges[M]. Shanghai: Dragon Gate Press, 1946: 147
- [5] 安徽省水利科学研究所. 多层地基和减压沟井的渗流计算理论[M]. 北京: 水利出版社, 1980: 168 - 182. (Anhui Water Resources Research Institute. Theory of seepage flow for calculating layered media and relief ditches and relief wells[M]. Beijing: Water Resources Press, 1980: 168 - 182. (in Chinese))
- [6] 吴世余, 余金煌. 不透水地基上堤坝上游坡的附加渗径[J]. 岩土力学, 2009, 30(10): 3151 - 3153, 3158. (WU Shi-yu, YU Jin-huang. The additional length of seepage path of upstream slope of dams and levees on impervious strata[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(10): 3151 - 3153, 3158 (in Chinese))
- [7] 王竹溪, 郭敦仁. 特殊函数概论[M]. 北京: 科学出版社, 1965: 181 - 183, 152 - 153. (WANG Zhu-xi, GUO Dun-ren. Introduction of special functions[M]. Beijing: Science Press, 1965: 181 - 183, 152 - 153. (in Chinese))