

# 水中桩弯曲振动频率的简化计算公式

戴国亮, 龚维明, 沈锦宁

(东南大学混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室, 江苏 南京 210096)

**摘要:** 讨论了水中高承台桩的弯曲振动特性, 引入附加质量的概念, 假定一部分水体附着在桩上和桩一起振动, 增加了桩的质量, 而不改变桩的抗弯刚度, 使得桩分为密度不同的两段, 根据达朗贝原理分别列出桩的弯曲振动方程, 得出方程组, 利用桩的连续性和边界约束条件求解方程组, 得到一个计算频率的公式, 并对计算桩长的选取进行了分析。通过对比东海大桥风力发电场风机基础中一根桩和青岛海湾大桥两根桩的实际检测数据与计算值, 证明了此公式运算简单, 精度较高, 可以为工程上采用。

**关键词:** 桩; 水; 弯曲振动; 频率; 附加质量

中图分类号: TU473 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2013)S2-1147-04

作者简介: 戴国亮(1975-), 男, 湖南安化人, 博士, 教授, 从事桩基础研究。E-mail: seudaigl@126.com。

## Simplified formula for frequency of bending vibration of piles in water

DAI Guo-liang, GONG Wei-ming, SHEN Jin-ning

(Key Laboratory of Concrete and Prestressed Concrete Structures of Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** The characteristics of bending vibration of high piles in water are discussed by introducing the additional mass. It is supposed that the mass of some water attaches to the piles and vibrates with them, however it increases the mass of the piles but doesn't change their bending rigidity. Thus, the piles can be divided into two parts with different densities. The bending vibration equations of the piles are put forward based on the D'Alembert principle. A group of equations are obtained and solved by the condition of the continuity of piles and edge-restraints in which the formula of natural frequency of piles in water can be obtained. The determination of the pile length is analyzed. The comparisons are made between the calculated and measured values for one pile in Donghai Sea Wind Farm and for two piles in Tsingdao Sea Bridge. The agreed results indicate the formula has good precision with simple form, which can be applied in projects.

**Key words:** pile; water; bending vibration; frequency; associated mass

## 0 引言

随着科技的发展, 海洋工程越来越受到人们的重视。在国外, 闻名于世的阿拉伯伯茨酒店就位于迪拜海滨的人工岛上; 在我国, 大型海洋工程也方兴未艾, 近年在建和已经建成的就有东海大桥风力发电场、杭州湾跨海大桥、港珠澳大桥等。在海洋工程中, 桩基是目前大规模应用的基础, 因此需要对水中桩的力学特性有较为深入的研究。目前, 有很多资料研究了桩的自振问题<sup>[1-4]</sup>, 然而这些资料几乎不考虑水对桩自振频率的影响, 无法应用到海洋工程中。等效深度法可用于计算水中桩的弯曲振动频率, 但由于忽略水的作用, 使得其精度不太高。水中桩的精确动力分析需考虑水与桩的动力相互作用, 文献[5~7]得到水中悬臂梁的振动方程, 但由于海洋工程中的承台基本都是高承台, 桩基有很长一部分是露出水面的, 故而这些公

式也无法应用到海洋高承台工程中。文献[8]得出了部分埋入水中悬臂梁的弯曲自由振动方程的解析解, 推导过程十分严谨, 但遗憾的是解析解是通过行列式的形式表示出来的, 分量的表示形式都很复杂, 有的甚至采用无穷级数来表示, 不便于工程应用。本文讨论了高承台桩的弯曲振动特性, 给出了一个较为简单的计算频率的公式。

## 1 桩振动方程的建立

在实际工程中, 桩有很长一部分深埋在土层中, 露出在土层外的长度(包括在水里的一部分和露在空气中的另一部分)占总长度的比例很小, 故可将桩的

弯曲振动视作悬臂梁的弯曲振动, 不计轴力(即桩自身重力)作用, 选取某一特定面为嵌固面, 桩端到嵌固面的距离为计算桩长。

水的流动特性非常复杂, 本文讨论的是无黏性的、不可压缩水域中的圆截面桩的自由振动, 忽略水面波对桩基振动特性的影响, 认为水的流动是无旋、有势的。桩在水中的振动, 诱发了水产生加速度, 为了考虑由此产生的动水压力的影响, 假定一部分水体附着在桩上和桩一起运动, 增加了桩的质量, 而不改变桩的刚度, 这就是附加质量的概念。本文引入沿桩高均匀分布的附加质量来计算频率, 将桩分为两段, 其长度分别为  $L_1$  (水中桩长) 和  $L_2$  (空气中桩长), 如图 1 所示。

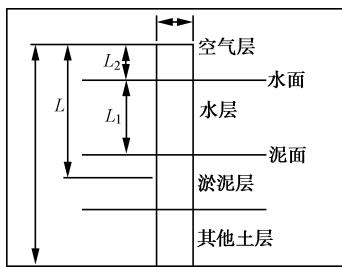


图 1 计算模型示意图

Fig. 1 Schematic plot for computational model

当考虑附加质量时, 桩的计算密度为

$$\rho_1 = \rho_c + C_m \rho_w \quad (1)$$

$$\rho_c = \frac{\rho l}{h} \quad (2)$$

式中,  $\rho_c$  为桩的等效密度,  $C_m$  为附加质量的系数,  $\rho_w$  为水的密度,  $\rho$  为桩的密度,  $l$  为桩的长度,  $h$  为桩的计算长度。

文献[6]给出了  $C_m$  的计算公式:

$$C_m = 59.5597 \left( \frac{d}{2h} \right)^2 - 9.7623 \frac{d}{2h} + 0.9697 \quad (3)$$

式(3)中,  $d$  为桩的直径。

不考虑附加质量时, 桩的计算密度为

$$\rho_2 = \rho_c \quad (4)$$

利用达朗贝原理, 并假设淤泥层对桩无约束作用, 列出桩弯曲振动方程:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho_1 A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (5a)$$

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho_2 A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (5b)$$

式(5a)表示的是桩在水中的振动方程, 式(5b)表示的是桩在空气中的振动方程。 $EI$  为桩的抗弯刚度,  $A$  为桩的横截面积,  $y$  为挠度。

## 2 桩振动方程的解

式(5)的解为

$$y_r = a_r S_r(x) + b_r T_r(x) + c_r U_r(x) + d_r V_r(x) \quad (r=1,2) \quad (6)$$

式中,  $a_r$ ,  $b_r$ ,  $c_r$ ,  $d_r$  为系数,  $S_r(x)$ ,  $T_r(x)$ ,  $U_r(x)$ ,  $V_r(x)$  为克雷洛夫函数:

$$S_r(x) = 0.5(chk_r x + \cos k_r x)$$

$$T_r(x) = 0.5(shk_r x + \sin k_r x)$$

$$U_r(x) = 0.5(chk_r x - \cos k_r x)$$

$$V_r(x) = 0.5(shk_r x - \sin k_r x)$$

其中,  $k_r^4 = \rho_r A \omega^2 / EI$ ,  $\omega$  为弯曲振动圆频率,  $\omega = 2\pi f$ 。

显然, 桩在水面处是连续的, 以及考虑边界条件, 这样得到含有 8 个未知数的 8 个方程的封闭方程组, 写成矩阵形式, 并记  $S_r(L_r)$  为  $S_r$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1^2 U_2 & k_1^2 V_2 & k_1^2 S_2 & k_1^2 T_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2^2 T_2 & k_2^2 U_2 & k_2^2 V_2 & k_2^2 S_2 \\ S_1 & T_1 & U_1 & V_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 V_1 & k_1 S_1 & k_1 T_1 & k_1 U_1 & 0 & -k_2 & 0 & 0 \\ k_1^2 U_1 & k_1^2 V_1 & k_1^2 S_1 & k_1^2 T_1 & 0 & 0 & -k_2^2 & 0 \\ k_1^3 T_1 & k_1^3 U_1 & k_1^3 V_1 & k_1^3 S_1 & 0 & 0 & 0 & -k_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

要使方程组(7)有非零解, 则其系数行列式必须为 0, 化简可得

$$J_1 J_4 - J_2 J_3 = 0 \quad (8)$$

其中:

$$J_1 = U_1 U_2 + n T_1 V_2 + n^2 S_1 S_2 + n^3 V_1 T_2$$

$$J_2 = V_1 U_2 + n U_1 V_2 + n^2 T_1 S_2 + n^3 S_1 T_2$$

$$J_3 = U_1 T_2 + n T_1 U_2 + n^2 S_1 V_2 + n^3 V_1 S_2$$

$$J_4 = V_1 T_2 + n U_1 U_2 + n^2 T_1 V_2 + n^3 S_1 S_2$$

$$n = k_1 / k_2$$

式(8)就是部分埋入水中桩自由弯曲振动的频率方程, 该方程的形式非常简单, 既可以用计算机求解, 也可以采用迭代法手算。

## 3 抗弯刚度与计算桩长的取值

### 3.1 抗弯刚度的取值

本文采用中国工程建设标准化协会标准《钢管混凝土结构设计与施工规程》(CECS 28:90)<sup>[9]</sup>上规定的抗弯刚度:  $EI = E_a I_a + E_c I_c$ 。式中:  $I_a$  为钢管的惯性矩;  $I_c$  为钢管内混凝土的惯性矩;  $E_a$  和  $E_c$  为钢材和混凝土的弹性模量。考虑到实际工程中桩的振动为自由振动(非振幅很大的涡激振动), 振幅很小, 受拉区混凝土不会开裂, 因此不须乘以 0.6 的系数。

### 3.2 计算桩长的取值

通常, 计算桩长一般取为(参见图 1)

$$h = L_1 + L_2 + \alpha d \quad (9)$$

式中:  $h$  为桩的计算长度;  $L_1$  为桩在水中的长度;  $L_2$  为桩在空气中的长度;  $d$  为桩的直径;  $\alpha$  为系数, 一般取  $0 \sim 3$ 。

在等效深度法中, 一般取泥面以下 3 倍桩径深度处为嵌固面, 桩简化为悬臂结构。计算桩长取桩顶到嵌固面的距离。与本文不同的是, 等效深度法不考虑水对桩弯曲振动频率的影响, 等效深度法的计算公式为悬臂梁弯曲振动的计算公式。

由于等效深度法没有考虑水的作用, 故计算精度不高<sup>[9]</sup>, 本文考虑了水对桩自振频率的影响, 桩同样简化为悬臂结构, 所以与等效深度法一样, 取桩顶到泥面以下 3 倍桩径的距离为计算桩长。但值得注意的是, 如果此时的嵌固面位于淤泥层中, 因淤泥层对桩振动的约束很小, 故假定淤泥层对桩无约束作用, 振动方程 (5a) 对淤泥层同样适用 (其实质是增加了桩在水中的长度  $L_1$  的值)。如果此时嵌固面不是淤泥层, 而是侧摩阻力较大的其他土层, 就必须考虑土层的约束作用, 式 (5a) 就不再适用, 计算桩长最大值为桩顶到淤泥土层底的距离。

所以, 本文中计算桩长的取值为桩顶到泥面以下 3 倍桩径的距离。如果淤泥层的厚度小于 3 倍桩径, 则取为桩顶到淤泥层底部的距离为计算桩长。

## 4 工程算例分析

### 4.1 工程实例

现有 3 根试桩, 分别为青岛海湾大桥两根直桩以及上海市东海大桥东部海域近海风电场的一根直桩, 编号分别为 #1、#2 和 #3, 桩径依次为 1.8, 2.5 和 1.7 m, 钢管壁厚为 3.5, 3.5 和 3 cm, 此外, #1 和 #2 试桩的桩顶标高为 +5 m, 泥面标高分别为 -4.92 和 -5.63 m, #3 试桩的桩顶标高为 +7.1 m, 泥面标高为 -11 m。

根据 3 根试桩的地质条件, 除了 #1 试桩外, 其余两根试桩下的淤泥层的厚度均大于 3 倍桩径, 故 #2 和 #3 试桩的计算长度取桩顶到淤泥层表面的距离加上 3 倍桩径, #1 试桩的计算长度取桩顶到淤泥层底面的距离。

3 根试桩的计算参数见表 1。

表 2 是 3 根试桩的计算值与测量值的对比, 测量值是通过模态频率统计平均法计算而得。3 根桩虽然取自不同地点, 但相对误差都很小, 证明公式 (8) 精度较高。

### 4.2 计算桩长对计算值的影响

分析表 2, 发现其中 #1 的计算值比测量值偏大, 其余两根桩的计算值偏小。而 #1 桩取桩顶到淤泥层底的距离为计算桩长, #2# 和 #3 都是取桩顶到泥面以下 3 倍桩径的距离为计算桩长。如果计算桩长按照式 (9) 来取, 图 2~图 4 反映了 3 根试桩振动频率随式 (9)

中系数  $\alpha$  变化的情况。

表 1 三根试桩的计算参数

Table 1 Parameters of three piles

编号	$l$ /m	$L_1$ /m	$L_2$ /m	$h$ /m	$d$ /m	$EI$ /GPa	$\rho_c$ /(kg·cm <sup>-3</sup> )
#1	50.00	4.92	5.00	13.27	1.8	28.31	$1.096 \times 10^4$
#2	59.00	4.92	5.00	18.13	2.5	92.53	$0.910 \times 10^4$
#3	82.05	11.00	7.10	23.20	1.7	21.63	$1.015 \times 10^4$

表 2 测试所得频率与计算值的比较

Table 2 Comparison between calculated and monitored frequencies

编号	测量值/Hz	计算值/Hz	相对误差/%
#1	3.00	3.19	6.33
#2	2.68	2.58	3.73
#3	1.05	0.99	4.76

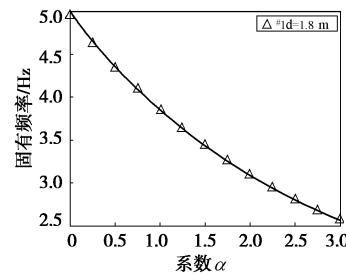


图 2 #1 试桩振动频率随系数  $\alpha$  的变化图

Fig. 2 Frequency of vibration versus coefficient  $\alpha$  of pile No. 1

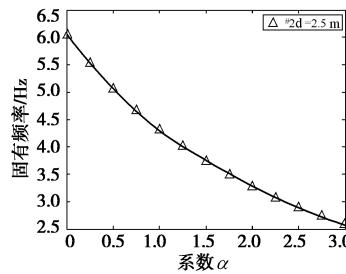


图 3 #2 试桩振动频率随系数  $\alpha$  的变化图

Fig. 3 Frequency of vibration versus coefficient  $\alpha$  of pile No. 2

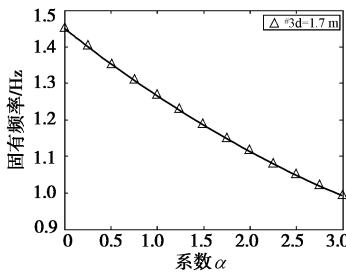


图 4 #3 试桩振动频率随系数  $\alpha$  的变化图

Fig. 4 Frequency of vibration versus coefficient  $\alpha$  of pile No. 3

分析图 2~4, 同时对比表 5 中的计算值, 可知计算桩长的选取对计算结果影响很大。随着计算桩长的增加, 所得到的频率值在减小, 曲线呈单调下降趋势, 没有极小值点。

(1) 若只将桩顶到淤泥表面的距离记为计算桩长(即3幅图中曲线左端, 横坐标为0的点), 所得频率值偏大, 精度很低。

(2) 若取泥面以下3倍桩径深度处为嵌固面, 由图2和图3知, 当嵌固面是淤泥层时, 所得频率值(图2, 3曲线最右端, 横坐标为 $3d$ 的点)与测量值很接近, 但计算值偏小; 当嵌固面在淤泥层之下时, 所得频率值(图1曲线最右端, 横坐标为 $3d$ 的点)则与测量值有较大偏差, 计算值同样偏小。

(3) 若将桩端到淤泥底层的距离记为计算桩长。当淤泥层的厚度小于3倍桩径时, 1#桩的计算结果表明计算频率值与测量值差距很小, 计算值比测量值偏大; 当淤泥层远大于3倍桩径时, 可以由图2和图3中曲线的单调下降趋势判断, 计算得到频率值比测量值偏小, 并且两者的差距越来越大。

## 5 结语

本文分析了部分埋入水中的桩的自由弯曲振动特性, 忽略水面波对桩基振动特性的影响, 得出在无黏性的、不可压缩水域中的圆截面桩的自由振动频率方程, 并试验证明该方程较为简单, 精确度较高, 可以为工程上采用。

在实际应用中, 海面上的风力不可能一直很小, 且在很多情况下水的黏性是不能被忽略的, 加之附加质量系数只是通过大量计算得到的近似公式, 因此本文得出的公式有一定局限性, 仅能在风浪较小、水的流速不大的情况下应用, 考虑水流的作用需要进一步的研究。

## 参考文献:

- [1] 余俊, 尚守平, 任慧, 等. 饱和土中竖向振动响应分析[J]. 工程力学, 2008, 25(10): 187-193. (YU Jun, SHANG Shou-ping, REN Hui, et al. Vertical dynamic response of pile in saturated soil[J]. Engineering Mechanics, 2008, 25(10): 187-193. (in Chinese))

- [2] BOULANGER R, CURRAS C, KUTTER B. Seismic soil-pile-structure interaction experiments and analysis[J]. Geotech. and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 1999, 125(9): 750-759.
- [3] 沈任工. 单桩弯曲自振频率与地基侧向基床系数[J]. 岩土工程学报, 1985, 7(2): 25-34. (SHEN Ren-gong. The frequency spectra at lateral bending free vibration of the pile and the modulus of subgrade[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1985, 7(2): 25-34. (in Chinese))
- [4] 赵宝军, 张劲涛. 考虑桩-土相互作用的结构自振频率计算[J]. 交通科技, 2009, 5(2): 4-7. (ZHAO Bao-jun, ZHANG Jing-tao. Natural frequency of structural considering pile-soil interaction[J]. Transportation Science & Technology, 2009, 5(2): 4-7. (in Chinese))
- [5] 张绍文, 倪汉根. 水中悬臂结构振动与水动力特性研究[J]. 大连理工大学学报, 1996, 36(3): 329-333. (ZHANG Shao-wen, NI Han-gen. Study of hydrodynamic characteristic and vibration of cantilever structure in water[J]. Journal of Dalian University of Technology, 1996, 36(3): 329-333. (in Chinese))
- [6] 王和慧, 黄玉盈, 刘忠族, 等. 水中圆锥形柱腿的自振特性分析[J]. 应用力学学报, 1996, 13(2): 64-70. (WANG He-hui, HUANG Yu-ying, LIU Zhong-zu, YANG Zi-chun. Free vibration of conical columns in water[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1996, 13(2): 64-70. (in Chinese))
- [7] 徐汉忠. 水中悬臂梁的自振频率的简便计算公式[J]. 河海大学学报, 1986, 14(4): 10-21. (XU Han-zhong. Formula for free vibration frequencies of cantilever cylinder in water[J]. Journal of Hohai University, 1986, 14(4): 10-21. (in Chinese))
- [9] CECS 28:90 钢管混凝土结构设计与施工规程[S]. (CECS 28:90 The code of concrete-filled circular steel tubes design and construction[S]. (in Chinese))