

堆载作用下考虑土拱效应的被动桩变形内力半解析解

竺明星¹, 龚维明^{1, 2}, 何小元¹, 徐国平³

(1. 东南大学土木工程学院, 江苏 南京 210096; 2. 东南大学混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室, 江苏 南京 210096;
3. 中交公路规划设计院有限公司, 北京 100010)

摘要: 为分析桩侧堆载作用下被动桩受力特性, 首先在布辛奈斯克 (Boussinesq) 改进解的基础上推导出堆载作用下地基土体的水平附加应力计算公式, 进而得到被动桩基被动侧土压力计算表达式。在此基础之上, 从土体的运动和应力传递方式入手, 对考虑被动侧成拱的 Ito 局部塑性变形理论进行改进, 从而解得被动桩桩身被动荷载分布。最后, 根据考虑轴向荷载 $P-\Delta$ 效应影响的三参数非线性弹性地基梁模型建立被动桩桩身弹性段与塑性段的微分方程组, 求解过程中应用矩阵传递法结合 Laplace 正逆变换解得被动桩变形与内力的半解析解, 并用试验数据对半解析解进行验证。结果表明, 理论解与试验数据吻合较好。

关键词: 堆载; 土拱效应; 被动桩; Laplace 正逆变换; 矩阵传递法

中图分类号: TU473 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2013)11-1997-12

作者简介: 竺明星(1985-), 男, 江苏南京人, 博士研究生, 主要从事桩基础理论、海洋岩土工程理论和岩土工程数值分析方面的研究工作。E-mail: zmx198561@163.com。

Semi-analytical solution to deformation and internal force of passive piles under surcharge loads considering soil arching effect

ZHU Ming-xing¹, GONG Wei-ming^{1, 2}, HE Xiao-yuan¹, XU Guo-ping³

(1. School of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China; 2. Key Laboratory for RC and PRC Structure of Ministry of Education, Southeast University, Nanjing 210096, China; 3. China Communication Highway Planning and Design Institute, Beijing 100010, China)

Abstract: In order to analyze the behaviors of the passive piles under surcharge loads, firstly, a formula for the additional horizontal stress of subsoil is deduced from the modified solutions of Boussinesq. Furthermore, the computational expressions for the soil pressure on the passive side of passive piles are gained. Then, based on the soil movement and stress transfer approach, the distribution of passive load of passive piles is drawn by means of the improved theory of partial plastic deformation. Finally, differential equations for the elastic and plastic section of passive piles are established by using the tri-parameter nonlinear elastic foundation beam model considering the $P-\Delta$ effect which is caused by lateral load. The original method of combining Matrix-transfer-method with Laplace forward transformation and Laplace inverse transformation is used to solve the deformation and internal force of passive piles influenced by the surcharge loads. The proposed approach is verified by the data from an experiment. The results indicate that the computed and test results are in good agreement. The proposed approach has reference value for studying the bearing mechanism of passive piles due to surcharge loads.

Key words: surcharge load; soil arching effect; passive pile; Laplace forward and inverse transform; matrix transfer method

0 引言

在港口码头、桥梁基础、工业厂房建筑等工程中, 桩基不仅直接承担作用于桩顶的主动荷载, 而且需要抵抗土体在自重或者外荷载作用下的侧向变形。尤其是桥梁桩基础, 如图 1 所示, 随着沿海地区基础建设的高速发展, 必然引发围垦或大面积回填对既有或拟建桥梁桩基的不利影响问题^[1-3]。

根据 De Beer^[4]对桩分类的标准, 这些桩属于典型

的被动桩。Franx 等^[5]、Heyman 等^[6]、Nicu 等^[7]等进行了大面积堆载对桩基础变形影响的现场观测和足尺试验观测, 取得了一系列的成果。李忠诚等^[8]、陈福全等^[9]、聂如松等^[10]、代恒军等^[11]应用有限元对堆载作用下被动桩受力特性进行了数值模拟与分析。Ito

基金项目: 国家科技支撑计划项目(2011BAG07B01); 国家重点基础研究发展计划项目(2013CB036304)

收稿日期: 2013-03-17

等^[12]、陈永战等^[13]利用砂槽模型对被动桩受力特性进行了定性规律的研究。周健等^[14]进行了被动桩试验及颗粒流数值模拟。胡建荣等^[15]基于 Poulos 理论和温克尔地基反力法解得滑动土体与邻近桩基相互作用的理论解。梁发云等^[16-17]分别采用能量法与有限元法研究了被动桩与土相互作用。

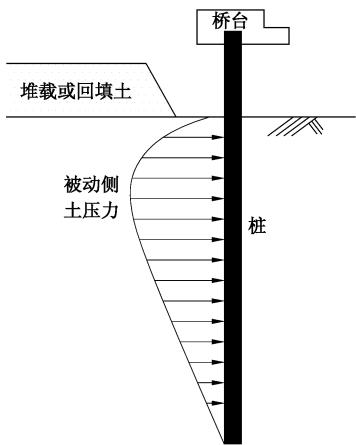


图 1 堆载对邻近桩基的影响

Fig. 1 Impact of surcharge loads on pile abutment

Randolph 等^[18]指出, 在被动桩的受力分析与设计中, 合理计算作用在桩上的侧向土压力最为关键。Matlock^[19]、Reese 等^[20]、Guo 等^[21]提出了主动侧土压力的理论或经验计算公式; Ito 等^[22]、沈珠江^[23]、Ctpofahob 等^[24]提出了被动桩被动侧土压力理论计算公式。

横山幸满^[25]假定地基反力系数为常数并求出了长单桩变形和内力的解析解。通过假定地基反力系数沿深度线性增加, 赵明华等^[26]求出了桩身响应的幂级数解。张爱军等^[27]基于土体弹性假设与 Winkler 地基模型, 解得抗滑桩一类被动桩的解析解。常林越等^[28-29]基于地基反力法和桩侧土体简化的弹塑性本构关系解得单层与双层地基中水平受荷桩的解析解。张磊等^[30]在考虑轴向荷载 $P-\Delta$ 效应和土体屈服的基础上基于线性地基反力法解得桩身响应的幂级数解。上述的分析中, 桩均为主桩, 而对于被动桩既考虑土体屈服又考虑轴向荷载 $P-\Delta$ 效应的研究目前尚未见报道。

本文首先根据 Boussinesq 改进公式推导出被动侧土压力表达式, 并以此公式为基础, 对 Ito 理论进行改进从而得到合理的桩身被动荷载。最后假定地基反力系数沿深度非线性增加, 考虑土体屈服, 采用 Laplace 正逆变换求解桩身微分方程并应用矩阵传递法求得完整桩身响应量。最后采用 Fortran 语言编制了计算程序, 并通过计算与模型试验的实测结果进行对比来验证所得解和程序的可靠性。

1 堆载作用引起的水平附加应力计算

在工程实践中常采用朗肯理论计算局部超载侧压力, 但该法存在较多不足之处^[31]。

日本 1972 年的《建筑基础结构设计规范》采用了如下简化公式计算超载侧压力:

$$\sigma_x = \frac{3Px^2z}{\pi R^5}, \quad (1)$$

式中, P 为作用于坐标原点与地面垂直的集中力, x , y , z 为所求点坐标, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

式 (1) 即为 Boussinesq 水平附加应力解第一项值的两倍。本文推导堆载引起的水平附加应力均以式 (1) 的 Boussinesq 改进解为推导理论基础。

1.1 矩形面积上受均布荷载作用下的侧压力计算

在推导过程中, 统一假定: x 轴上的边定义边长为 b , y 轴上的边定义边长为 l , 计算点 M 距 z 轴的水平距离为 a , 如图 2 所示。

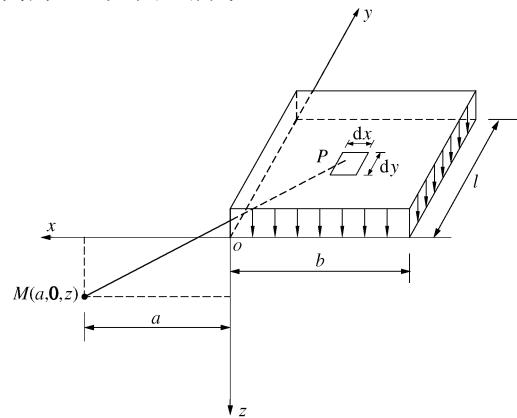


图 2 矩形荷载位于第二象限示意图

Fig. 2 Sketch of rectangular loads in second quadrant

图 2 中, 在矩形面积 $b \times l$ 上作用着大小为 P 的均布荷载。根据式 (1) 知图中集中力微单元 $Pdx dy$ 作用下 M 点水平附加压力为

$$d\sigma_x = \frac{3z}{\pi} \frac{(x-a)^2}{((x-a)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} P dx dy. \quad (2)$$

则根据积分上下限可得矩形区域荷载作用下 M 点水平附加压力为

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{Pz}{\pi} \left\{ \frac{al}{(a^2+z^2)\sqrt{a^2+l^2+z^2}} - \frac{1}{z} \arctan \left(\frac{al}{z\sqrt{a^2+l^2+z^2}} \right) + \right. \\ & \left. \frac{1}{z} \arctan \left(\frac{(a+b)l}{z\sqrt{(a+b)^2+l^2+z^2}} \right) + \frac{(-a-b)l}{((a+b)^2+z^2)\sqrt{(a+b)^2+l^2+z^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

当图 2 中 l 趋于无限长时, 对式 (2) 积分得

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi} \left\{ \frac{ab(a+b)z - bz^3}{(a^2 + z^2)[(a+b)^2 + z^2]} - \arctan\left(\frac{a}{z}\right) + \arctan\left(\frac{a+b}{z}\right) \right\} \quad (4)$$

根据积分对称性知, 当矩形荷载区域位于第三象限时, 所得水平附加压力的结果与式(3)、(4)是一致的。

1.2 矩形面积上三角形分布荷载作用下侧压力计算

图 3 所示为在地基表面作用矩形面积三角形分布荷载, 矩形面积三角形分布荷载的零值边位于 y 轴。

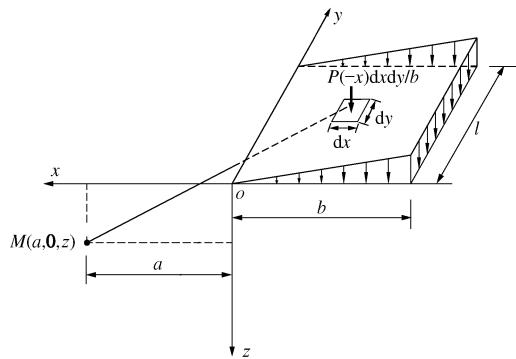


图 3 荷载区域零边位于 y 轴示意图

Fig. 3 Sketch of zero edge of region loaded in y axis

在相应的荷载作用下 M 点水平附加压力为

$$\sigma_x = \frac{3Pz}{\pi b} \int_0^l \int_{-b}^0 \frac{-x(x-a)^2}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{5/2}} dx dy, \quad (5)$$

对式(5)积分得

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{Pz}{\pi b} \left\{ \frac{-bl(a+b)}{[(a+b)^2 + z^2] \sqrt{(a+b)^2 + l^2 + z^2}} + \right. \\ & \frac{a}{z} \arctan\left(\frac{al}{z\sqrt{a^2 + l^2 + z^2}}\right) + 2 \ln\left[\frac{l + \sqrt{a^2 + l^2 + z^2}}{l + \sqrt{(a+b)^2 + l^2 + z^2}}\right] + \\ & \left. \ln\left[\frac{(a+b)^2 + z^2}{a^2 + z^2}\right] - \frac{a}{z} \arctan\left(\frac{(a+b)l}{z\sqrt{(a+b)^2 + l^2 + z^2}}\right) \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

当图 3 中 l 趋于无限长时, 对式(5)积分得

$$\begin{aligned} \sigma_x = & \frac{Pz}{\pi b} \left\{ \frac{a}{z} \left[\arctan(a/z) - \arctan((a+b)/z) \right] + \right. \\ & b(a+b) / \left[(a+b)^2 + z^2 \right] + \ln\left[(a+b)^2 + z^2 / (a^2 + z^2) \right] \left. \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

当矩形面积三角形分布荷载的最大值边位于 y 轴时, 由应力叠加原理即可求得 M 点到水平附加应力。

根据本节的推导公式, 应用应力叠加原理, 即可求得梯形等形式堆载作用下 M 点的水平附加压力。

2 考虑土拱效应的桩身被动荷载计算

被动桩的桩身被动荷载是通过桩土相互作用的侧移土体, 间接传递给桩身。要确定被动桩所受被动荷载, 则需要从被动桩受力变形的机理出发: 被动侧土体受邻近堆载影响将产生水平侧移, 而土体的水平侧移又受到被动桩的遮拦作用在桩后形成土拱, 应力通过土拱向桩身传递。

如图 4 所示, Ito 于 1975 年首次提出局部塑性变形理论, 并在此基础上得到了被动桩的桩身被动极限荷载的解析解。图 4 中, D_1 为桩间距, D_2 为桩间净距, d 为桩径, φ 为土体内摩擦角。李忠诚等^[32]通过改变 Ito 局部塑性变形理论的初始条件, 推导出新的被动桩桩身极限荷载计算公式。然而, 这些成果中桩身被动极限荷载都是以土体局部塑性变形为前提, 推导均以 AA' 边为起始边界条件, 这将导致按局部塑性变形理论推导所得的 BB' 处土压力 $p_{BB'}$ 与真实的 BB' 处土压力 $q_{BB'}(z)$ 存在较大的出入, 相应地会存在较多不足: ①当 $p_{BB'} > q_{BB'}(z)$ 时, 按照局部塑性变形理论计算桩身被动极限荷载设计的桩过于保守, 造成不必要的建筑材料浪费; ②当 $p_{BB'} < q_{BB'}(z)$ 时, 不能合理解释 BB' 处的土压力差。

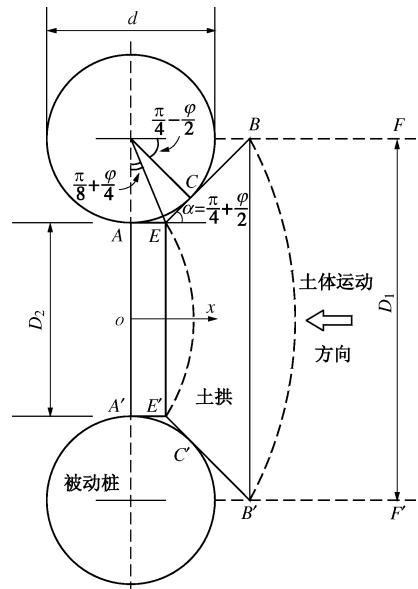


图 4 Ito 理论示意图

Fig. 4 Sketch diagram of Ito's theory

下面, 在 Ito 的局部塑性变形理论之上对其进行改进, 进而求解考虑土拱效应的桩身被动荷载。

假定条件: ①当土体变形时, 沿 AEB 和 $A'E'B'$ 出现 2 个滑动面, 如图 4 所示, 其中, EB 和 $E'B'$ 与 x 方向的交角均为 $\alpha = \pi/4 + \varphi/2$; ②土层只在桩周土区 $AEBB'E'A'$ 中表现为塑性, 适用莫尔 - 库仑准则; ③

AEB 与 $A'E'B'$ 面上无摩擦力; ④ 桩是刚性的; ⑤ 假设被动桩的主动侧不存在土体卸载情况, 静止土压力为受力平衡压力。

2.1 以 BB' 边为起始边界条件的推导

当堆载长度远远大于桩间距时, 认为堆载长度为无限长, 采用式(4)或式(7)计算 BB' 边上任意位置点的水平应力均是相等的。设堆载引起的 BB' 边上的水平附加压力 $p(z)$, 则堆载引起的 BB' 边上总水平压力为

$$q(z) = p(z) + K_0 \gamma z, \quad (8)$$

式中 K_0 为静止土压力系数, $K_0 \approx 1 - \sin \varphi$, γ 为土体重度, z 为计算土压力点至地表距离。

当堆载长度有限时, 将 BB' 边等分 n 份, 经计算可知堆载作用下 BB' 边每个等分点的水平应力是不相等的。为后续求解便利, 需要将 BB' 边每个等分点的水平应力进行平均化从而得到 BB' 边的水平应力。在此设: $q_1 = q_B$, $q_{n+1} = q_{B'}$, 中间 $n-1$ 个等分点的水平应力分别为 q_2 , q_3 , \dots , q_n , 根据积分中值定理得 BB' 处土体的平均水平总应力为

$$q(z) = \frac{1}{n} \left(\frac{q_B + q_{B'}}{2} + \sum_{i=2}^n q_i \right) + K_0 \gamma z. \quad (9)$$

根据式(8)或式(9)知 BB' 边水平力为

$$q_{BB'} = q(z) D_1. \quad (10)$$

如图 5 所示, 取 $EBB'E'$ 区域土体微单元分析。图中 σ_σ 为平面 EB 或 $B'E'$ 法向力, 可由下式求得

$$\sigma_\sigma = \sigma_x N_\varphi + 2c \sqrt{N_\varphi}. \quad (11)$$

考虑土体单元在 x 方向的受力平衡, 得

$$\sigma_x = \frac{(C_1 D)^{N_\varphi + N_\varphi^{1/2} \tan \varphi - 1} - c(2 \tan \varphi + 2N_\varphi^{1/2} + N_\varphi^{-1/2})}{N_\varphi + N_\varphi^{1/2} \tan \varphi - 1} \quad (D_2 \leq D \leq D_1). \quad (12)$$

式中 C_1 为积分待定常数; $N_\varphi = \tan^2(\pi/4 + \varphi/2)$; c 为土体黏聚力; φ 为土体内摩擦角。

将式(10)作为边界条件代入式(12)得

$$\sigma_x = \frac{1}{N_\varphi + N_\varphi^{1/2} \tan \varphi - 1} \left\{ (D/D_1)^{N_\varphi + N_\varphi^{1/2} \tan \varphi - 1} \left[q_{BB'} (N_\varphi + N_\varphi^{1/2} \tan \varphi - 1) + c(2 \tan \varphi + 2N_\varphi^{1/2} + N_\varphi^{-1/2}) \right] - c(2 \tan \varphi + 2N_\varphi^{1/2} + N_\varphi^{-1/2}) \right\}. \quad (13)$$

如图 6 所示, 取 $EAA'E'$ 区域土体微单元, 考虑土体在 x 方向受力平衡, 联合式(13)得 $EAA'E'$ 区域水平应力为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{-c(1+2N_\varphi^{1/2} \tan \varphi)}{N_\varphi \tan \varphi} + \frac{\exp(2xN_\varphi \tan \varphi / D_2)}{N_\varphi \tan \varphi} \\ &\quad \left\{ c(1+2N_\varphi^{1/2} \tan \varphi) / \exp[N_\varphi \tan(\pi/8 + \varphi/4) \tan \varphi (D_1 - D_2) / D_2] + \frac{N_\varphi \tan \varphi}{(N_\varphi + N_\varphi^{1/2} \tan \varphi - 1) \exp[N_\varphi \tan(\pi/8 + \varphi/4) \tan \varphi (D_1 - D_2) / D_2]} \right\} \end{aligned}$$

$$\left[(D_2/D_1)^{N_\varphi + N_\varphi^{1/2} \tan \varphi - 1} \times \left[q_{BB'} (N_\varphi + N_\varphi^{1/2} \tan \varphi - 1) + c(2 \tan \varphi + 2N_\varphi^{1/2} + N_\varphi^{-1/2}) \right] - c(2 \tan \varphi + 2N_\varphi^{1/2} + N_\varphi^{-1/2}) \right]. \quad (14)$$

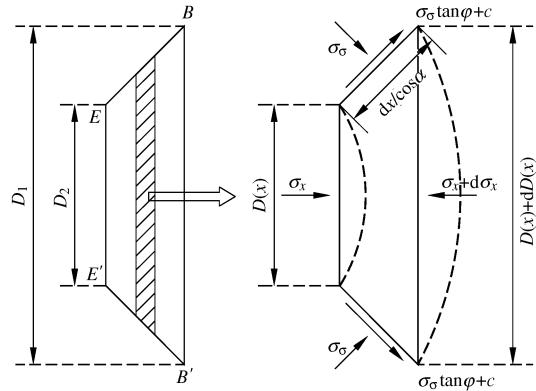


图 5 $EBB'E'$ 区域土体微单元示意图

Fig. 5 Sketch diagram of small element in $EBB'E'$ region

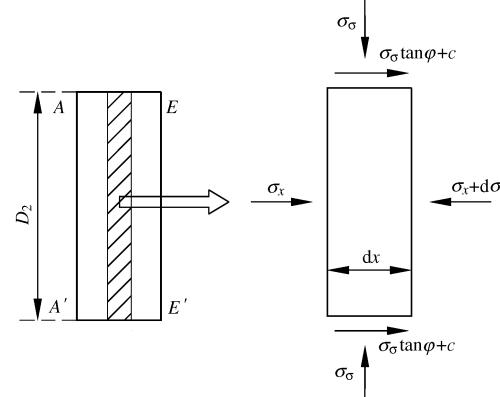


图 6 $EAA'E'$ 区域土体微单元示意图

Fig. 6 Sketch diagram of small element in $EAA'E'$ region

2.2 桩身被动荷载计算方法与步骤

当按 BB' 边为边界条件推导的结果进行计算时, 按式(14)计算 AA' 处的水平应力会出现小于静止土压力的情况, 这显然是不正确的, 因此, 解题的关键是需要找到真实的静止土压力平衡点的位置。

做如下的假定: 记 $EAA'E'$ 区域为区域 1, 记 $EBB'E'$ 区域为区域 2。

$EAA'E'$ 区域 x 方向间距范围为 $x \in [x_0, x_1] = [0, \tan(\pi/8 + \varphi/4) \times (D_1 - D_2)/2]$, $EBB'E'$ 区域 x 方向间距范围为 $x \in [x_1, x_2] = [\tan(\pi/8 + \varphi/4)(D_1 - D_2)/2, \tan(\pi/8 + \varphi/4) + 1/\cos(\pi/4 - \varphi/2)(D_1 - D_2)/2]$; $EBB'E'$ 区域竖向宽度为 $D(x) = D_2 + 2(x - x_1) \tan(\pi/4 + \varphi/2)$, $x \in [x_1, x_2]$ 。

则解题步骤为: ① 根据式(14)得 $EAA'E'$ 区域的水平应力 σ_{1x} 及相应的水平力 $q_{1x} = \sigma_{1x} D_2$; ② 根据假设条件⑤得 $EAA'E'$ 区域的静止土压力 $\sigma_{10} = K_0 \gamma z$ 及相应的水平力 $q_{10} = K_0 \gamma z D_2$; ③ 根据式(13)得 $EBB'E'$ 区域的水平应力 σ_{2x} 及相应的水平力 $q_{2x} = \sigma_{2x} D(x)$; ④ 根据

假设条件 (5) 得 $EBB'E'$ 区域静止土压力 $\sigma_{20}=K_0\gamma z$ 及相应的水平力 $q_{20}=K_0\gamma zD(x)$; ⑤设计算点深度为 z , 按式 (10) 得 q_{BB} 。

首先在 $EAA'E'$ 区域内令 $q_{1x}=q_{10}$, 解得 x_{sl} , 判断 x_{sl} 是否在 $[x_0, x_1]$ 区间内。如果在, 则将 x_{sl} 代入式 (14) 得水平力 $q_{1x}(x_{sl})=\sigma_{1x}(x_{sl})D_2$, 则相应的深度 z 处桩身被动力荷载为

$$p_p(z)=q_{BB}-q_{1x}(x_{sl}) \quad (15)$$

如果 x_{sl} 不在 $[x_0, x_1]$ 区间内, 则在 $EBB'E'$ 区域内令 $q_{2x}=q_{20}$, 解得 x_{s2} 。将 x_{s2} 代入式 (14) 得水平力 $q_{2x}(x_{s2})=\sigma_{2x}(x_{s2})D(x_{s2})$, 则相应的深度 z 处桩身被动力荷载为

$$p_p(z)=q_{BB}-q_{2x}(x_{s2}) \quad (16)$$

根据上述的求解步骤和方法, 即可求得堆载作用下被动桩不同深度处的桩身被动力荷载。

3 基于非线性地基反力法被动桩计算

横山幸满^[25]、赵明华等^[26]在求解桩身响应时均未考虑土体的塑性屈服。虽然张磊等^[30]进行了既考虑土体屈服又考虑轴向荷载的 $P-\Delta$ 效应的单桩内力求解, 但其求解采用线性地基反力模型, 且所研究桩为主动桩。

本文基于地基反力系数的一般形式, 考虑土体屈服以及轴向荷载的 $P-\Delta$ 效应的影响, 采用 Laplace 正逆变换, 结合矩阵传递法求解堆载作用下被动桩的变形与内力。

3.1 方程的建立

考虑到解的通用性, 采用如图 7 所示简化模型进行推导计算。设土体为均质土, 地面上桩长度为 H_0 , 地面以下桩长为 H_1 , 主动侧土体的屈服自地面开始并随桩身变形的增加而渐次向下发展, 塑性段和弹性段桩长分别为 L_1 和 L_2 , 如图 7 所示。桩自由段分布荷载为 $q(z_G)=q_0+\Delta q\cdot z_G/H_0$, 其中, q_0 和 $(q_0+\Delta q)$ 分别为自由段桩身顶端和底端的分布荷载集度。由式 (15) 或 (16) 计算得桩身被动力荷载为 $p_p(z)$ 。桩顶轴力、剪力和弯矩分别为 N_0 , Q_0 和 M_0 。如图 7 中所示方向, 假定位移以向右为正, 转角以向左倾斜为正, 弯矩以桩身右侧受压为正, 剪力以绕研究对象顺时针转为正, 土反力以向左为正。地面以上桩身轴力为 $N_G(z_G)=N_0+f_0z_G$, 塑性段桩身轴力为 $N_p(z_p)=N_0+f_0H_0+f_1z_p$, 弹性段桩身轴力为 $N_e(z)=N_0+f_0H_0+f_1L_1+f_1z_e$, 其中 f_0 和 f_1 分别为地面以上及以下桩身轴力增长系数, 取值方法参阅文献[33]。主动侧土体被离散为一系列独立的弹簧, 且单位桩长上的土反力与水平位移比例关系如下:

$$\left. \begin{array}{l} \text{塑性段, } p_u = k_1(z_p)bu_* \text{,} \\ \text{弹性段, } p_a(z) = k_2(z_e)bu_e \text{。} \end{array} \right\} \quad (17)$$

式中 b 为桩宽度或桩径, u_e 为地面以下弹性段桩身水平位移, u_* 为土体屈服位移; p_u 与 p_a 为单位桩长上的土抗力, 本文采用三参数反力系数模型, 即 $k_1(z_p)=m(z_0+z_p)^n$, $k_2(z_e)=m(z_0+L_1+z_e)^n$, m 为比例系数, z_0 为地面处当量深度, n 为指数。

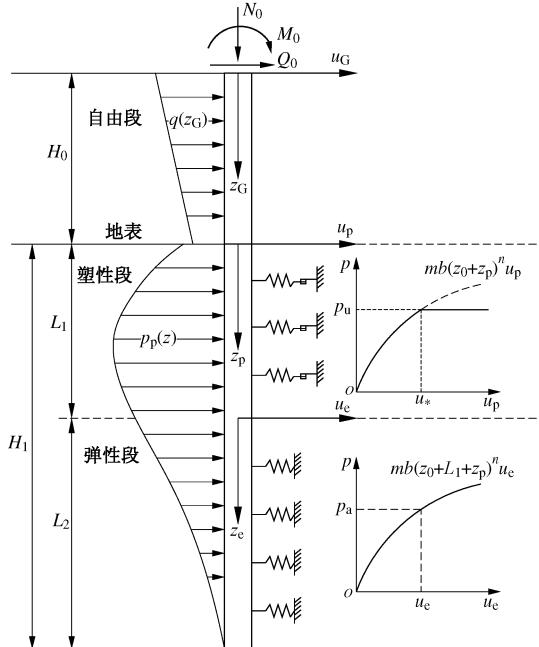


图 7 纵横荷载被动桩的模型

Fig. 7 Passive piles under combined vertical and lateral loads

砂土的屈服位移为

$$u_* = 3b/80 \quad (18)$$

黏土的屈服位移为

$$u_* = 20\varepsilon_c b \quad (19)$$

式中, ε_c 为应变, Matlock 建议 ε_c 的取值为 0.005~0.02, 对于脆性黏土和灵敏黏土可取 0.005, 对于重塑土和欠固结土可取 0.02, 其余类型的黏土可取 0.01。

则自由段、塑性段和弹性段桩身的挠曲线微分方程分别为

$$EI \frac{d^4 u_G}{dz_G^4} + N_G \frac{d^2 u_G}{dz_G^2} = q_0 + \frac{\Delta q}{H_0} z_G \quad (20)$$

$$EI \frac{d^4 u_p}{dz_p^4} + N_p \frac{d^2 u_p}{dz_p^2} + f_1 \frac{du_p}{dz_p} + bm(z_0+z_p)^n u_* - p_p(z_p) = 0 \quad (21)$$

$$EI \frac{d^4 u_e}{dz_e^4} + N_e \frac{d^2 u_e}{dz_e^2} + f_1 \frac{du_e}{dz_e} + bm(z_0+L_1+z_e)^n u_e - p_p(z_e) = 0 \quad (22)$$

自由段桩身响应可以采用常规的方法即可解得, 但式 (21)、(22) 无法采用常规方法和幂级数法进行

求解。考虑解的形式统一性和程序编写便利性, 式 (20) ~ (22) 均采用矩阵传递法进行解题。

3.2 自由段桩身响应矩阵传递解

为了使用 Laplace 正逆变换法, 需要将自由段桩进行离散, 如图 8 所示。将自由段等分成 n_0 份, 则自由段每小段长为 H_0/n_0 。取第 i 段桩身微单元进行分析, 那么, 自由段桩身轴力均为 N_0 。

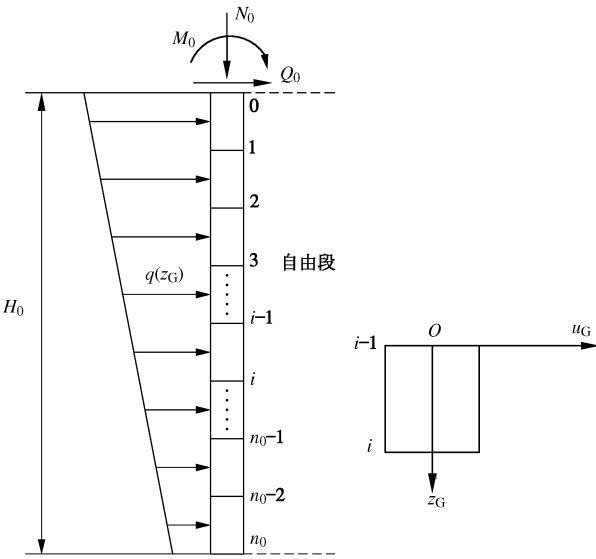


图 8 自由段离散示意图

Fig. 8 Sketch diagram of discretization for free region of piles

将式 (19) 转换成微分方程组, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_{Gi}}{dz_{Gi}} &= \theta_{Gi}, \\ \frac{d\theta_{Gi}}{dz_{Gi}} &= \frac{M_{Gi}}{EI}, \\ \frac{dM_{Gi}}{dz_{Gi}} &= Q_{Gi} - N_{Gi}\theta_{Gi}, \\ \frac{dQ_{Gi}}{dz_{Gi}} &= q_0 + \frac{\Delta q}{H_0}z_{Gi}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

式中, u_{Gi} , θ_{Gi} , M_{Gi} 和 Q_{Gi} 分别为第 i 段底部的水平位移、转角位移、弯矩和剪力, EI 为隔离桩抗弯刚度。

将式 (23) 写成矩阵形式方程为

$$\frac{d\mathbf{S}_{Gi}}{dz_{Gi}} = \mathbf{A}_{Gi} \mathbf{S}_{Gi} + \mathbf{f}_{Gi}, \quad (24)$$

其中, $\mathbf{S}_{Gi} = [u_{Gi} \ \theta_{Gi} \ M_{Gi} \ Q_{Gi}]^T$,

$$\mathbf{A}_{Gi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/EI & 0 \\ 0 & -N_{Gi} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_{Gi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_0 + \Delta q z_{Gi} / H_0 \end{bmatrix}.$$

令: $L[\mathbf{S}_{Gi}(z_{Gi})] = \mathbf{F}_{Gi}(s_{Gi})$, $L[\mathbf{f}_{Gi}(z_{Gi})] = \mathbf{y}_{Gi}(s_{Gi})$, s_{Gi}

为 Laplace 变换后自变量。对式 (24) 进行 Laplace 变

换得

$$\begin{aligned} L\left[\frac{d\mathbf{S}_{Gi}}{dz_{Gi}}\right] &= L[\mathbf{A}_{Gi} \mathbf{S}_{Gi} + \mathbf{f}_{Gi}] \\ \Rightarrow s_{Gi} \mathbf{F}_{Gi}(s_{Gi}) - \mathbf{S}_{Gi}(0) &= \mathbf{A}_{Gi} \mathbf{F}_{Gi}(s_{Gi}) + \mathbf{y}_{Gi}(s_{Gi}) \\ \Rightarrow \mathbf{F}_{Gi}(s_{Gi}) &= (\mathbf{I}_{4 \times 4} \times s_{Gi} - \mathbf{A}_{Gi})^{-1} \mathbf{S}_{Gi}(0) + (\mathbf{I}_{4 \times 4} \times s_{Gi} - \mathbf{A}_{Gi})^{-1} \mathbf{y}_{Gi}(s_{Gi}). \end{aligned} \quad (25)$$

式中 $\mathbf{S}_{Gi}(0) = [u_{Gi0} \ \theta_{Gi0} \ M_{Gi0} \ Q_{Gi0}]^T$, $\mathbf{I}_{4 \times 4}$ 为四阶单位矩阵。

式 (24) 的 Laplace 逆变换为

$$\mathbf{S}_{Gi}(z_{Gi}) = L^{-1}[(\mathbf{I} \times s_{Gi} - \mathbf{A}_{Gi})^{-1}] \mathbf{S}_{Gi}(0) + L^{-1}[(\mathbf{I} \times s_{Gi} - \mathbf{A}_{Gi})^{-1} \mathbf{y}_{Gi}(s_{Gi})]. \quad (26)$$

设 $\alpha_{Gi}^2 = N_{Gi}/EI$, 则可得

$$L^{-1}[(\mathbf{I} \times s_{Gi} - \mathbf{A}_{Gi})^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{\alpha_{Gi}} & \frac{1-\cos(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{N_{Gi}} & \frac{\alpha_{Gi} z_{Gi} - \sin(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{N_{Gi} \alpha_{Gi}} \\ 0 & \cos(\alpha_{Gi} z_{Gi}) & \frac{\alpha_{Gi} \sin(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{N_{Gi}} & \frac{1-\cos(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{N_{Gi}} \\ 0 & -N_{Gi} \sin(\alpha_{Gi} z_{Gi}) & \cos(\alpha_{Gi} z_{Gi}) & \frac{\sin(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{\alpha_{Gi}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} L^{-1}[(\mathbf{I} \times s_{Gi} - \mathbf{A}_{Gi})^{-1} \mathbf{y}_{Gi}(s_{Gi})] &= \\ \left[q_0 \left[\alpha_{Gi}^2 z_{Gi}^2 - 2 + 2\cos(\alpha_{Gi} z_{Gi}) \right] / (2N_{Gi} \alpha_{Gi}^2) \right. & \\ \left. q_0 \left[\alpha_{Gi} z_{Gi} - \sin(\alpha_{Gi} z_{Gi}) \right] / (N_{Gi} \alpha_{Gi}) \right. & \\ \left. q_0 \left[1 - \cos(\alpha_{Gi} z_{Gi}) \right] / \alpha_{Gi}^2 \right. & \\ \left. q_0 z_{Gi} \right] & \\ \left[(\Delta q / H_0) (6\sin(\alpha_{Gi} z_{Gi}) - 6\alpha_{Gi} z_{Gi} + \alpha_{Gi}^3 z_{Gi}^3) / (6N_{Gi} \alpha_{Gi}^3) \right. & \\ \left. (\Delta q / H_0) (2\cos(\alpha_{Gi} z_{Gi}) - 2 + \alpha_{Gi}^2 z_{Gi}^2) / (2N_{Gi} \alpha_{Gi}^2) \right. & \\ \left. (\Delta q / H_0) [\alpha_{Gi} z_{Gi} - \sin(\alpha_{Gi} z_{Gi})] / \alpha_{Gi}^3 \right. & \\ \left. (\Delta q / H_0) z_{Gi}^2 / 2 \right] & \end{aligned} \quad (28)$$

联合式 (27)、(28) 可得传递系数矩阵为

$$\mathbf{U}_{Gi} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{\alpha_{Gi}} & \frac{1-\cos(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{N_{Gi}} & \frac{\alpha_{Gi} z_{Gi} - \sin(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{N_{Gi} \alpha_{Gi}} & \chi_{1Gi} \\ 0 & \cos(\alpha_{Gi} z_{Gi}) & \frac{\alpha_{Gi} \sin(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{N_{Gi}} & \frac{1-\cos(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{N_{Gi}} & \chi_{2Gi} \\ 0 & -N_{Gi} \sin(\alpha_{Gi} z_{Gi}) & \cos(\alpha_{Gi} z_{Gi}) & \frac{\sin(\alpha_{Gi} z_{Gi})}{\alpha_{Gi}} & \chi_{3Gi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \chi_{4Gi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

式中, $\chi_{1Gi} = q_0 [\alpha_{Gi}^2 z_{Gi}^2 - 2 + 2\cos(\alpha_{Gi} z_{Gi})] / (2N_{Gi} \alpha_{Gi}^2) + (\Delta q / H_0) (6\sin(\alpha_{Gi} z_{Gi}) - 6\alpha_{Gi} z_{Gi} + \alpha_{Gi}^3 z_{Gi}^3) / (6N_{Gi} \alpha_{Gi}^3)$; $\chi_{2Gi} = q_0 [\alpha_{Gi} z_{Gi} - \sin(\alpha_{Gi} z_{Gi})] / (N_{Gi} \alpha_{Gi}) + (\Delta q / H_0) [2\cos(\alpha_{Gi} z_{Gi}) - 2 + \alpha_{Gi}^2 z_{Gi}^2] / (2N_{Gi} \alpha_{Gi}^2)$; $\chi_{3Gi} = q_0 [1 - \cos(\alpha_{Gi} z_{Gi})] / \alpha_{Gi}^2 + (\Delta q / H_0) [\alpha_{Gi} z_{Gi} - \sin(\alpha_{Gi} z_{Gi})] / \alpha_{Gi}^3$; $\chi_{4Gi} = q_0 z_{Gi} + (\Delta q / H_0) z_{Gi}^2 / 2$ 。

结合式 (26)、(29) 得

$$\mathbf{S}_{Gi} = \mathbf{U}_{Gi} \mathbf{S}_{Gi0} \quad \circ \quad (30)$$

即

$$[u_{Gi} \ \theta_{Gi} \ M_{Gi} \ Q_{Gi}]^T = \mathbf{U}_{Gi} [u_{Gi0} \ \theta_{Gi0} \ M_{Gi0} \ Q_{Gi0}]^T \circ \quad (31)$$

式中 u_{Gi} , θ_{Gi} , M_{Gi} 和 Q_{Gi} 分别为第 i 段底部水平位移、转角位移、弯矩和剪力; u_{Gi0} , θ_{Gi0} , M_{Gi0} 和 Q_{Gi0} 不仅为第 i 段顶部水平位移、转角位移、弯矩和剪力, 也是第 $i-1$ 段底部的水平位移、转角位移、弯矩和剪力, 即为 $\mathbf{S}_{G(i-1)}$ 量。根据式 (30) 可得递推关系:

$$\mathbf{S}_{Gi} = \mathbf{U}_{Gi} \mathbf{S}_{G(i-1)} \quad \circ \quad (32)$$

又由于在桩身顶部有 $\mathbf{S}_{G0} = \mathbf{S}_0$, 则自由段桩身响应矩阵传递解为

$$\mathbf{S}_{Gn_0} = \mathbf{U}_{Gn_0} \mathbf{U}_{G(n_0-1)} \cdots \mathbf{U}_{G2} \mathbf{U}_{G1} \mathbf{S}_{G0} = \mathbf{U}_G \mathbf{S}_{G0} = \mathbf{U}_G \mathbf{S}_0 \quad (33)$$

式中 \mathbf{U}_G 为桩身塑性段总传递矩阵; u_{Gn_0} , θ_{Gn_0} , M_{Gn_0} 和 Q_{Gn_0} 分别为自由段与塑性段界面处桩身的水平位移、转角位移、弯矩和剪力; u_0 , θ_0 , M_0 和 Q_0 分别为桩顶处的水平位移、转角位移、弯矩和剪力。

3.3 塑性段桩身响应矩阵传递解

如图 9 所示, 将塑性段桩身等分成 N_1 份, 则自由段每小段长为 L_1/N_1 。取第 i 段桩身微单元进行分析, 每段桩身轴力假定为常数, 取每段桩身的上下面的轴力平均值作为该段桩身的平均值:

$$N_{pi} = N_0 + f_0 H_0 + f_1 (2i-1) L_1 / (2N_1) \quad \circ \quad (34)$$

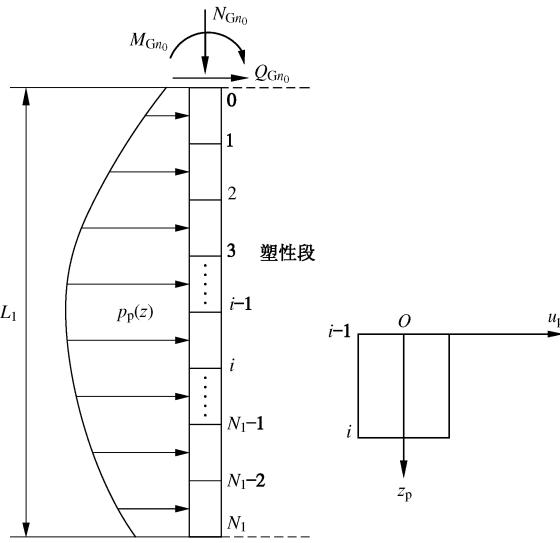


图 9 塑性段离散示意图

Fig. 9 Sketch diagram of discretization for plastic region of piles

假定每小段上的地基反力系数 k_{li} 为常数, 根据分中值定理得

$$\begin{aligned} k_{li} &= m \int_{(i-1)L_1/N_1}^{iL_1/N_1} (z_0 + z_p)^n dz_p / (L_1/N_1) \\ &= m N_1 \left[(z_0 + iL_1/N_1)^{n+1} - (z_0 + (i-1)L_1/N_1)^{n+1} \right] / (L_1 + nL_1). \end{aligned} \quad (35)$$

将式 (21) 转换成微分方程组, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_{pi}}{dz_{pi}} &= \theta_{pi}, \\ \frac{d\theta_{pi}}{dz_{pi}} &= \frac{M_{pi}}{EI}, \\ \frac{dM_{pi}}{dz_{pi}} &= Q_{pi} - N_{pi} \theta_{pi}, \\ \frac{dQ_{pi}}{dz_{pi}} &= p_{pi} - k_{li} b u_* \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

设 $\alpha_{pi}^2 = N_{pi}/EI$, 根据自由段桩身响应求解思路进行塑性段桩身响应传递矩阵求解。则塑性段桩身传递系数矩阵为

$$\mathbf{U}_{pi} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_{pi} z_{pi}) & \frac{1-\cos(\alpha_{pi} z_{pi})}{N_{pi}} & \frac{\alpha_{pi} z_{pi} - \sin(\alpha_{pi} z_{pi})}{N_{pi} \alpha_{pi}} & \chi_{1pi} \\ 1 & \frac{\alpha_{pi}}{N_{pi}} & \frac{N_{pi} \alpha_{pi}}{N_{pi}} & \chi_{2pi} \\ 0 & \cos(\alpha_{pi} z_{pi}) & \frac{\alpha_{pi} \sin(\alpha_{pi} z_{pi})}{N_{pi}} & \frac{1-\cos(\alpha_{pi} z_{pi})}{N_{pi}} \\ 0 & \frac{-N_{pi} \sin(\alpha_{pi} z_{pi})}{\alpha_{pi}} & \cos(\alpha_{pi} z_{pi}) & \frac{\sin(\alpha_{pi} z_{pi})}{\alpha_{pi}} \\ 0 & 0 & 0 & \chi_{3pi} \\ 0 & 0 & 0 & \chi_{4pi} \end{bmatrix} \quad (37)$$

式中 $\chi_{1pi} = (p_{pi} - k_{li} b u_*) [4\cos(\alpha_{pi} z_{pi}) - 4 + 2z_{pi}^2 \alpha_{pi}^2] / (4N_{pi} \alpha_{pi}^2)$; $\chi_{2pi} = (p_{pi} - k_{li} b u_*) [\alpha_{pi} z_{pi} - \sin(\alpha_{pi} z_{pi})] / (N_{pi} \alpha_{pi})$; $\chi_{3pi} = (p_{pi} - k_{li} b u_*) [1 - \cos(\alpha_{pi} z_{pi})] / \alpha_{pi}^2$; $\chi_{4pi} = z_{pi} (p_{pi} - k_{li} b u_*)$ 。

则可得塑性段桩身矩阵传递关系

$$\mathbf{S}_{pi} = \mathbf{U}_{pi} \mathbf{S}_{pi0} \quad , \quad (38)$$

即

$$[u_{pi} \ \theta_{pi} \ M_{pi} \ Q_{pi}]^T = \mathbf{U}_{pi} [u_{pi0} \ \theta_{pi0} \ M_{pi0} \ Q_{pi0}]^T \circ \quad (39)$$

式中 u_{pi} , θ_{pi} , M_{pi} 和 Q_{pi} 分别为第 i 段底部水平位移, 转角位移, 弯矩和剪力; u_{pi0} , θ_{pi0} , M_{pi0} 和 Q_{pi0} 不仅为第 i 段顶部水平位移、转角位移、弯矩和剪力, 也是第 $i-1$ 段底部的水平位移、转角位移、弯矩和剪力, 即为 $\mathbf{S}_{p(i-1)}$ 。根据式 (37) 可得递推关系:

$$\mathbf{S}_{pi} = \mathbf{U}_{pi} \mathbf{S}_{p(i-1)} \quad . \quad (40)$$

则塑性段桩身响应矩阵传递解为

$$\mathbf{S}_{pN_1} = \mathbf{U}_{pN_1} \mathbf{U}_{p(N_1-1)} \cdots \mathbf{U}_{p2} \mathbf{U}_{p1} \mathbf{S}_{p0} = \mathbf{U}_p \mathbf{S}_{p0} \quad . \quad (41)$$

式中 \mathbf{U}_p 为桩身塑性段总传递矩阵; u_{pN_1} , θ_{pN_1} , M_{pN_1} 和 Q_{pN_1} 分别为塑性与弹性界面处桩身的水平位移、转角位移、弯矩和剪力; u_0 , θ_0 , M_0 和 Q_0 分别为桩顶处的水平位移、转角位移、弯矩和剪力。

3.4 弹性段桩身响应矩阵传递解

如图 10 所示。将弹性段等分成 N_2 份, 则自由段每小段长为 L_2/N_2 。取第 i 段桩身微单元进行分析, 每小段桩的桩身轴力假定为常数, 取每小段桩身的上

下面的轴力平均值作为该小段桩身轴力值，则第 i 段桩身轴力为

$$N_{ei} = N_0 + f_0 H_0 + f_1 L_1 + f_1 (2i-1) L_2 / (2N_2) \quad (42)$$

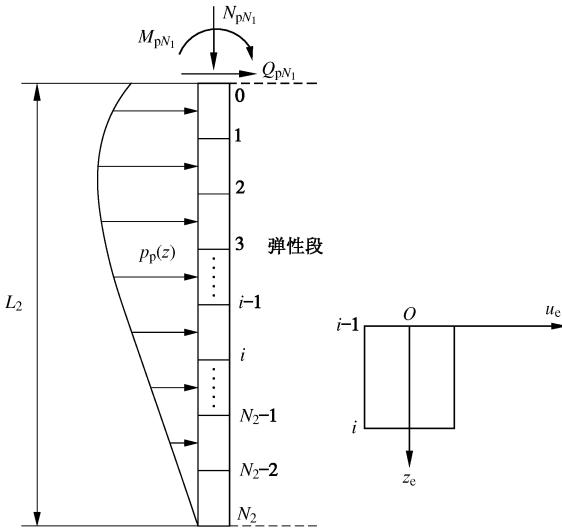


图 10 弹性段离散示意图

Fig. 10 Sketch diagram of discretization for elastic region of piles

假定每段上的地基反力系数 k_{2i} 为常数，根据积分中值定理得

$$\begin{aligned} k_{2i} &= m \int_{(i-1)L_2/N_2}^{iL_2/N_2} (z_0 + L_1 + z_e)^n dz_e / (L_2/N_2) \\ &= m N_2 \left[(z_0 + L_1 + iL_2/N_2)^{n+1} - (z_0 + L_1 + (i-1)L_2/N_2)^{n+1} \right] / (L_2 + nL_2) \end{aligned} \quad (43)$$

则将式 (21) 转换成微分方程组，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_{ei}}{dz_{ei}} &= \theta_{ei}, \\ \frac{d\theta_{ei}}{dz_{ei}} &= \frac{M_{ei}}{EI}, \\ \frac{dM_{ei}}{dz_{ei}} &= Q_{ei} - N_{ei} \theta_{ei}, \\ \frac{dQ_{ei}}{dz_{ei}} &= p_{pi} - k_{2i} b u_{ei} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

令 $\lambda_{ei} = N_{ei}/(4EI)$ ， $\eta_{ei} = k_{2i}b/(4EI)$ ，按照塑性段的求解思路进行弹性段桩身传递矩阵求解。在对式 (44) 进行 Laplace 逆变换时，需解如下方程：

$$s_{ei}^4 + 4\lambda_{ei}s_{ei}^2 + 4\eta_{ei} = 0 \quad (45)$$

式中， s_{ei} 为 Laplace 变换后的自变量。

对式 (45) 求解得

$$\omega_{j(j=1,2,3,4)} = \pm \sqrt{\frac{-N_{ei}}{2EI} \pm \sqrt{\left(\frac{N_{ei}}{2EI}\right)^2 - \frac{k_{2i}b}{4EI}}} \quad (46)$$

又由于实际上大部分桩 $N_{ei} < \sqrt{2EIk_{2i}b}$ ，故式 (46) 组成两组共轭复数根，即

$$\omega_{j(j=1,2,3,4)} = \pm (\gamma_{ei} \pm \xi_{ei}i) \quad (47)$$

令 $\beta_{ei}^4 = k_{2i}b/(4EI)$ ，代入式 (47) 可得

$$\begin{cases} \gamma_{ei} = \sqrt{\sqrt{\frac{k_{2i}b}{4EI}} - \frac{N_{ei}}{4EI}} = \sqrt{\beta_{ei}^2 - \lambda_{ei}} \\ \xi_{ei} = \sqrt{\sqrt{\frac{k_{2i}b}{4EI}} + \frac{N_{ei}}{4EI}} = \sqrt{\beta_{ei}^2 + \lambda_{ei}} \end{cases} \quad (48)$$

设 $\omega_1 = \gamma_{ei} + \xi_{ei}i$ ， $\omega_2 = \gamma_{ei} - \xi_{ei}i$ ， $\omega_3 = -(\gamma_{ei} + \xi_{ei}i)$ ， $\omega_4 = -(\gamma_{ei} - \xi_{ei}i)$ ，将 4 组解代入弹性段桩身的 Laplace 逆变换，得弹段桩身响应的传递系数矩阵为式 (49)，见附录。

用式 (49) 可得弹性段桩身矩阵传递关系：

$$\mathbf{S}_{ei} = \mathbf{U}_{ei} \mathbf{S}_{ei0} \quad (50)$$

即

$$[u_{ei} \ \theta_{ei} \ M_{ei} \ Q_{ei}]^T = \mathbf{U}_{ei} [u_{ei0} \ \theta_{ei0} \ M_{ei0} \ Q_{ei0}]^T \quad (51)$$

式中 u_{ei} ， θ_{ei} ， M_{ei} 和 Q_{ei} 分别为弹性段桩身第 i 段底部的水平位移、转角位移、弯矩和剪力； u_{ei0} ， θ_{ei0} ， M_{ei0} 和 Q_{ei0} 不仅为弹性段桩身第 i 段顶部的水平位移、转角位移、弯矩和剪力，也是其也是第 $i-1$ 段底部的水平位移、转角位移、弯矩和剪力，即为 $\mathbf{S}_{e(i-1)}$ 。根据式 (51) 可得递推关系为

$$\mathbf{S}_{ei} = \mathbf{U}_{ei} \mathbf{S}_{e(i-1)} \quad (52)$$

则弹性段桩身响应矩阵传递解为：

$$\mathbf{S}_{eN_2} = \mathbf{U}_{eN_2} \mathbf{U}_{e(N_2-1)} \cdots \mathbf{U}_{e2} \mathbf{U}_{e1} \mathbf{S}_{e0} = \mathbf{U}_e \mathbf{S}_{e0} \quad (53)$$

式中 \mathbf{U}_e 为桩身弹性段总传递矩阵； u_{eN_2} ， θ_{eN_2} ， M_{eN_2} 和 Q_{eN_2} 为弹性段桩身底部的水平位移、转角位移、弯矩和剪力； u_{e0} ， θ_{e0} ， M_{e0} 和 Q_{e0} 分别为弹性段桩身顶部即塑性与弹性界面处的水平位移、转角位移、弯矩和剪力。

又由于自由段桩身响应和塑性段桩身响应在交界面处是连续的，即两者的响应量在交界面是相等的：

$$\mathbf{S}_{Gn_0} = \mathbf{S}_{p0} \quad (54)$$

塑性段桩身响应和弹性段桩身响应在弹塑性交界面处是连续的，则有

$$\mathbf{S}_{pN_1} = \mathbf{S}_{e0} \quad (55)$$

联合式 (33)、(41)、(53)、式 (54)、(55)，得

$$\mathbf{S}_{eN_2} = \mathbf{U}_e \mathbf{U}_p \mathbf{U}_G \mathbf{S}_0 = \mathbf{U} \mathbf{S}_0 \quad (56)$$

式 (56) 为整个完整桩身响应的矩阵传递方程， \mathbf{U} 为完整桩身的总传递矩阵。

3.5 边界条件

根据桩顶约束条件的不同可以分为“桩顶固定”和“桩顶自由”两种桩顶边界条件。当桩顶自由时，有

$$\begin{cases} M_0 = M_0 \\ Q_0 = Q_0 \end{cases} \quad (57)$$

如桩顶没有弯矩和剪力，则令 $M_0 = 0$ ， $Q_0 = 0$ 即可。

当桩顶固定式, 有

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \theta_0 = 0 \end{cases} \quad (58)$$

根据桩端约束条件的不同可以分为“桩底固定”、“桩底铰接”和“桩底自由”三者桩端边界条件。当桩底自由时, 有

$$\begin{cases} M_{eN_2} = 0 \\ Q_{eN_2} = 0 \end{cases} \quad (59)$$

当桩底铰接时, 有

$$\begin{cases} u_{eN_2} = 0 \\ M_{eN_2} = 0 \end{cases} \quad (60)$$

当桩底固定时, 有

$$\begin{cases} u_{eN_2} = 0 \\ \theta_{eN_2} = 0 \end{cases} \quad (61)$$

将上述桩顶、桩底边界条件代入式(56)中, 可以得到4个未知量的4个方程组成的方程组, 这样, 即可求得4个未知量。此时桩顶、桩底的水平位移、转角位移、弯矩和剪力全部知道, 而每段桩的传递矩阵也知道, 即可求得桩身任意段桩身的水平位移、转角位移、弯矩和剪力量, 过程如下:

u_0 、 θ_0 、 M_0 和 Q_0 为整个桩身顶部的水平位移、转角位移、弯矩和剪力, 此时均为已知量, 则根据式(32)、(40)、(52)可得自由段桩身第*i*段桩身响应为

$$S_{Gi} = U_{Gi} U_{G(i-1)} \cdots U_{G2} U_{G1} S_0 \quad ; \quad (62)$$

塑性段桩身第*i*段桩身响应为

$$S_{pi} = U_{pi} U_{p(i-1)} \cdots U_{p2} U_{p1} U_G S_0 \quad ; \quad (63)$$

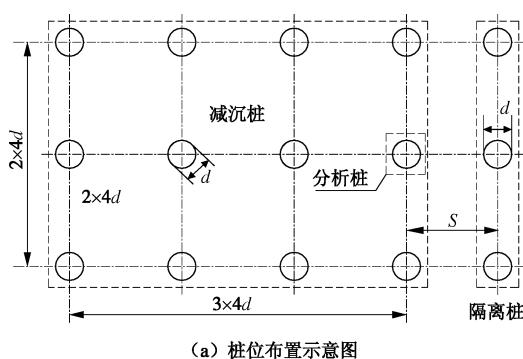
弹性段桩身第*i*段桩身响应为

$$S_{ei} = U_{ei} U_{e(i-1)} \cdots U_2 U_1 U_p U_G S_0 \quad . \quad (64)$$

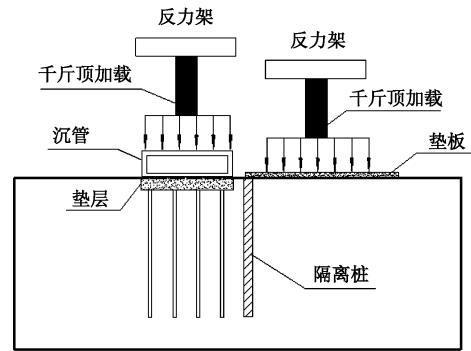
根据式(62)~(64), 即可求得桩身任意深度处的桩身水平位移、转角位移、弯矩和剪力。

4 理论与试验对比分析

港珠澳大桥沉管隧道建设中为降低堆载对沉管隧道下减沉桩的影响, 施工过程中在堆载边缘处设置了隔离桩。为研究隔离桩受力特性进行了多组室内试验。其中一组试验布置如图11所示。



(a) 桩位布置示意图



(b) 荷载布置示意图

图 11 模型试验示意图

Fig. 11 Sketch diagram of experimental model

试验槽中填土厚度为4 m, 砂土的物理性质见表1; 桩采用薄壁钢管模拟, 外径d为40 mm, 壁厚1.33 mm, 桩长为1.2 m, 弹性模量约为 $E \approx 216$ GPa, 相邻桩间距均为 $4d$, 隔离桩与减沉桩之间最近中心距S为240 mm; 荷载由千斤顶控制, 荷载最大值为200 kPa, 分8级逐级加载。桩身抗弯刚度 EI 为 $6.3489 \text{ kN}\cdot\text{m}^2$, 指数n取1, 桩顶弯矩和剪力分别为 $M_0 = 0$, $Q_0 = 0$, 桩顶轴力由实测数据知 $N_0 = 2.3275 \text{ kN}$, 桩身轴力增长系数 $f_1 = -1.6264 \text{ kN/m}$, z_0 和m值经多组桩长为1.6 m的试验数据进行反演后分别取为 $z_0 = 0.15 \text{ m}$ 和 $m = 22 \text{ MN/m}^4$, 计算时桩身长度等分为150等份。则如图11(a)中所示桩长1.2 m的分析桩试验弯矩与理论计算弯矩对比如图12所示。

表 1 试验用土力学参数

Table 1 Mechanical parameters of experimental soils

土层名称	密度/(g·cm ⁻³)	黏聚力/kPa	最小干密度/(g·cm ⁻³)	最大干密度/(g·cm ⁻³)	内摩擦角/(°)
细砂	1.56	0	1.429	1.733	26.3

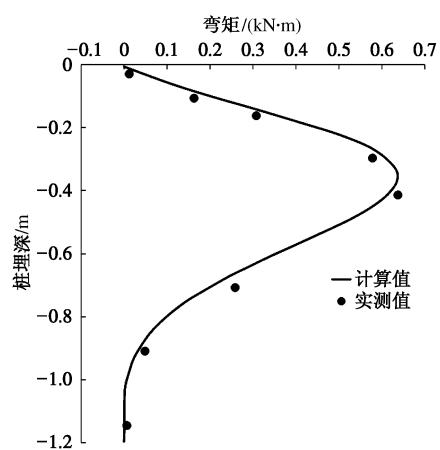


图 12 桩身弯矩实测与计算值对比图

Fig. 12 Comparison between measured and calculated bending moment

由图11(a)、图12可知, 桩身弯矩的计算值与

实测值吻合的较好。计算值与实测值的弯矩最大值分别为 $0.635 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 和 $0.637 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ，相差非常小。这说明本文的解和程序是可靠的。

5 结语

对被动桩的研究最大的难度在于对桩土相互作用模型的合理假设与高阶微分方程的求解。已有的解析解或幂级数解也能够近似表达桩身的内力与变形，但因解答过程中对桩土相互作用模型的特定假设而使解失去了普遍性。

本文依据 Boussinesq 和局部塑性变形理论的改进解求得堆载作用下被动桩的桩身被动荷载；在此基础之上，着眼于桩身被动响应解的通用性，桩土相互作用模型采用考虑土体屈服的三参数地基反力模型并考虑轴向荷载 $P-\Delta$ 效应的影响。在解复杂高阶非线性微分方程时采用 Laplace 正逆变换结合矩阵传递法求得完整桩身响应量。本文解微分方程的思路与方法不仅适用于被动桩一类问题，同样也适用于主动桩一类问题的解答。最后，通过与试验数据的对比，验证了本文解的可靠性。本文的分析方法为堆载作用下被动桩受力特性的研究提供了较好的参考。

参考文献：

- [1] 李忠诚, 梁志荣. 大面积堆载土体侧移模式及对邻近被动桩影响分析[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(增刊 1) : 128 - 134. (LI Zhong-cheng, LIANG Zhi-rong. Calculation model and numerical analysis of passive piles subjected to adjacent surcharge loads[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(S1) : 128 - 134. (in Chinese))
- [2] 聂如松, 冷伍明, 杨奇, 等. 路基填土对桥台桩基影响的试验与数值仿真分析[J]. 岩土力学, 2009, 30(9): 2862 - 2868. (NIE Ru-song, LENG Wu-ming, YANG Qi, et al. Field test and 3D FEM studies of bridge abutment on piles foundation subjected to embankment load[J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(9): 2862 - 2868. (in Chinese))
- [3] 魏汝龙. 大面积填土对邻近桩基的影响[J]. 岩土工程学报, 1982, 4(2): 132 - 137. (WEI Ru-long. Influence studies on piles subjected to embankment load[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1982, 4(2): 132 - 137. (in Chinese))
- [4] DE BEER E E. The effects of horizontal loads on piles, due to surcharge or seismic effects[C]// Proc 9th ICSMFE. Tokyo, 1977: 547 - 558.
- [5] FRANX C, BOONSTRA G C. Horizontal pressures on pile foundations[C]// Proceedings 2nd conference on soil mechanics and foundation engineering, 1948: 131 - 135.
- [6] HEYMAN L, BOERSMA L. Bending moments in piles due to lateral earth pressure[C]// Proc of 5th ICSMFE. 1961, 2: 425 - 429.
- [7] NICU N D, ANTES D R, KESSLER R S. Field measurements on instrumented piles under an overpass abutment[J]. Highway Research Record, 1971, 354: 90 - 102.
- [8] 李忠诚, 洪昌地. 侧移土体被动桩成拱效应分析[J]. 岩土力学, 2008, 29(6): 1711 - 1715. (LI Zhong-cheng, HONG Chang-di. Soil arching action in passive piles under lateral displaced soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(6): 1711 - 1715. (in Chinese))
- [9] 陈福全, 杨敏. 地面堆载作用下邻近桩基性状的数值分析[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(11): 1286 - 1290. (CHEN Fu-quan, YANG Min. Numerical analysis of piles influenced by lateral soil movement due to surcharge loads[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005, 27(11): 1286 - 1290. (in Chinese))
- [10] 聂如松, 冷伍明, 邓宗伟, 等. 被动方桩土拱效应三维有限元分析[J]. 工业建筑, 2007, 37(7): 47 - 52. (NIE Ru-song, LENG Wu-ming, DENG Zong-wei, et al. 3D finite element research on soil arching effect between the passive square piles[J]. Industrial Construction, 2007, 37(7): 47 - 52. (in Chinese))
- [11] 代恒军, 梁志荣, 赵军, 等. 地面堆载作用下邻近桩基变形的三维数值分析 [J]. 岩土工程学报, 2010, 32(增刊 2) : 220 - 223. (DAI Heng-jun, LIANG Zhi-rong, ZHAO Jun, et al. 3D numerical analysis of pile influenced by lateral soil movement due to surcharge loads[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2010, 32(S2): 220 - 223. (in Chinese))
- [12] ITO T, MATSUI T, WONSUI T A. Extended design method for multi-row stabilizing piles against landslide[J]. Soils and Foundations, 1982, 22(1): 1 - 13.
- [13] 陈永战, 魏汝龙. 桩基码头岸坡与桩基相互作用的试验研究[J]. 水利水运科学研究, 1993(3): 257 - 265. (CHEN Yong-zhan, WEI Ru-long. Experimental study on interaction between pile-supported pier and bank slope[J]. Journal of Nanjing Hydraulic Research Institute, 1993(3): 257 - 265. (in Chinese))
- [14] 周健, 亓宾, 曾庆有. 被动侧向受荷桩模型试验及颗粒流数值模拟研究[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(10): 1449 - 1454. (ZHOU Jian, QI Bin, ZENG Qing-you. Model tests and PFC^{2D} numerical analysis on laterally loaded passive

- piles[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(10): 1449 - 1454. (in Chinese))
- [15] 胡建荣, 王金昌, 朱向荣. 滑动土体与邻近桩基相互作用的弹塑性解[J]. 岩土力学, 2011, **32**(11): 3414 - 3419. (HU Jian-rong, WANG Jin-chang, ZHU Xiang-rong. Elastoplastic solution for interaction between slipping soil and adjacent piles[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(11): 3414 - 3419. (in Chinese))
- [16] 梁发云, 张 浩. 开挖土体侧移作用下被动单桩能量变分分析方法[J]. 岩土工程学报, 2012, **34**(增刊 1): 19 - 23. (LIANG Fa-yun, ZHANG Hao. Variational solution of single passive pile subjected to lateral soil movement induced by adjacent excavation[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 2012, **34**(S1): 19 - 23. (in Chinese))
- [17] 梁发云, 李彦初. 土体侧移模式对邻近桩基性状影响的三维数值分析[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(2): 399 - 403. (LIANG Fa-yun, LI Yan-chu. Numerical analysis for effects of lateral soil movement on adjacent piles[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(2): 399 - 403. (in Chinese))
- [18] RANDOLPH M F, HOULSBY G T. The limiting pressure on a circular pile loaded laterally in cohesive soil[J]. Géotechnique, 1984, **34**(4): 613 - 623.
- [19] MATLOCK H. Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay[C]// Proc 2nd Annual Offshore Technology Conference. 1970: 577 - 594.
- [20] REESE L C, WELCH R C. Lateral loading of deep foundations in stiff clay[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, 1975, **101**(7): 633 - 649.
- [21] GUO W D. On limiting force profile, slip depth and response of lateral piles[J]. Computers and Geotechnics, 2006, **33**(1): 47 - 67.
- [22] ITO T, MATSUI T. Methods to estimate lateral force acting on stabilizing piles[J]. Soils and Foundations, 1975, **15**(4): 43 - 59.
- [23] 沈珠江. 桩的抗滑阻力和抗滑桩的极限设计[J]. 岩土工程学报, 1992, **14**(1): 151 - 56. (SHEN Zhu-jiang. Stabilizing force and design method for anti-slide piles[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1992, **14**(1): 51 - 56. (in Chinese))
- [24] CTPOFAHOB A C, 钟采元. 滑坡上加固结构和建筑物所受的土压力计算方法[J]. 路基工程, 1998(3): 67 - 74. (CTPOFAHOB A C, ZHONG Cai-yuan. Methods of earth pressure calculation for reinforced structures and buildings in the landslide[J]. Subgrade Engineering, 1998(3): 67 - 74. (in Chinese))
- [25] 横山幸满. 桩结构物的计算方法和计算实例[M]. 唐业清, 吴庆荪, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1984. (YOKOYAMA Y. Calculation methods and examples of pile structures[M]. TANG Ye-qing, WU Qing-sun, trans. Beijing: China Railway Publishing House, 1984. (in Chinese))
- [26] 赵明华. 轴向和横向荷载同时作用下的桩基计算[J]. 湖南大学学报 (自然科学版), 1987, **14**(2): 68 - 81. (ZHAO Ming-hua. The calculation of piles under simultaneous axial and lateral loading[J]. Journal of Hunan University (Natural Science), 1987, **14**(2): 68 - 81. (in Chinese))
- [27] 张爱军, 莫海鸿, 朱珍德, 等. 被动桩与土相互作用解析计算研究[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(2): 120 - 127. (ZHANG Ai-jun, MO Hai-hong, ZHU Zhen-de, et al. Analytical solution to interaction between passive piles and soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(2): 120 - 127. (in Chinese))
- [28] 常林越, 王金昌, 朱向荣, 等. 水平受荷长桩弹塑性解析计算[J]. 浙江大学学报(工学版), 2010, **44**(10): 2029 - 2035. (CHANG Lin-yue, WANG Jin-chang, ZHU Xiang-rong, et al. Elastoplastic analytical computation of laterally loaded long pile[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2010, **44**(10): 2029 - 2035. (in Chinese))
- [29] 常林越, 王金昌, 朱向荣, 等. 双层弹塑性地基水平受荷桩解析计算[J]. 岩土工程学报, 2011, **33**(3): 433 - 440. (CHANG Lin-yue, WANG Jin-chang, ZHU Xiang-rong, et al. Analytical calculation of laterally loaded piles in double-layered elastoplastic soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, **33**(3): 433 - 440. (in Chinese))
- [30] 张 磊, 龚晓南, 俞建霖. 考虑土体屈服的纵横荷载单桩变形内力分析[J]. 岩土力学, 2011, **32**(8): 2441 - 2445. (ZHANG Lei, GONG Xiao-nan, YU Jian-lin. Analysis of deformation and internal force for single pile under combined vertical and lateral loads considering yielding of soil[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(8): 2441 - 2445. (in Chinese))
- [31] 王广月. 地下结构局部超载侧压力计算[J]. 岩土工程技术, 1997(1): 35 - 40. (WANG Guang-yue. Lateral pressure calculation of underground structure with local surcharge[J]. Geotechnical Engineering Technique, 1997(1): 35 - 40. (in Chinese))
- [32] 李忠诚, 杨 敏. 被动桩土压力计算的被动拱 - 主动楔模

- 型[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(2): 4241-4247. (LI Zhong-cheng, YANG Min. Passive arching-active wedge model of soil pressure calculation in passive piles[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(2): 4241-4247. (in Chinese))
- [33] 王 哲, 龚晓南. 轴向与横向力同时作用下大直径灌注简桩的受力分析[J]. 苏州科技学院学报(工程技术版), 2005,

附录:

$$U_{ei} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{j=1}^4 (4\lambda_{ei} + \omega_j^2) \exp(\omega_j z_{ei})}{4(\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 \omega_j \exp(\omega_j z_{ei})}{4(\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 \lambda_{ei} \exp(\omega_j z_{ei})}{\sum_{j=1}^4 N_i (\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 \lambda_{ei} \exp(\omega_j z_{ei})}{\sum_{j=1}^4 N_i \omega_j (\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \chi_{1ei} \\ \frac{\sum_{j=1}^4 -\eta_{ei} \exp(\omega_j z_{ei})}{\sum_{j=1}^4 \omega_j (\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 \omega_j^2 \exp(\omega_j z_{ei})}{4(\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 \lambda_{ei} \omega_j \exp(\omega_j z_{ei})}{\sum_{j=1}^4 N_{ei} (\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 \lambda_{ei} \exp(\omega_j z_{ei})}{\sum_{j=1}^4 N_{ei} (\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \chi_{2ei} \\ \frac{\sum_{j=1}^4 -k_{2i} b \exp(\omega_j z_{ei})}{4(\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 -(N_{ei} \omega_j^2 + k_{2i} b) \exp(\omega_j z_{ei})}{4\omega_j (\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 \omega_j^2 \exp(\omega_j z_{ei})}{4(\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 \omega_j \exp(\omega_j z_{ei})}{4(\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \chi_{3ei} \\ \frac{\sum_{j=1}^4 -k_{2i} b (\omega_j^2 + 4\lambda_{ei}) \exp(\omega_j z_{ei})}{4\omega_j (\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 -k_{2i} b \exp(\omega_j z_{ei})}{4(\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 -\eta_{ei} \exp(\omega_j z_{ei})}{\sum_{j=1}^4 \omega_j (\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \frac{\sum_{j=1}^4 (4\lambda_{ei} + \omega_j^2) \exp(\omega_j z_{ei})}{4(\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} & \chi_{4ei} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

式 中 $\chi_{1ei} = \frac{p_{pi}}{k_{2i} b} \left(1 - \sum_{j=1}^4 \frac{(4\lambda_{ei} + \omega_j^2) \exp(\omega_j z_{ei})}{4(\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})} \right)$; $\chi_{2ei} = \frac{\lambda_{ei} p_{pi}}{N_{ei}} \sum_{j=1}^4 \frac{\exp(\omega_j z_{ei})}{\omega_j (\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})}$; $\chi_{3ei} = \sum_{j=1}^4 \frac{p_{pi} \exp(\omega_j z_{ei})}{4(\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})}$; $\chi_{4ei} = \sum_{j=1}^4 \frac{p_{pi} \omega_j \exp(\omega_j z_{ei})}{4(\omega_j^2 + 2\lambda_{ei})}$;

第一届全国非饱和土与特殊土力学及工程学术研讨会在重庆举行

由中国土木工程学会土力学及岩土工程分会非饱和土与特殊土专业委员会主办、解放军后勤工程学院和重庆交通大学等 8 个单位承办、《岩土力学》编辑部和《地下空间与工程学报》编辑部等 8 个单位协办的“第一届全国非饱和土与特殊土力学及工程学术研讨会”于 2013 年 10 月 12 日—13 日在重庆举行, 这是中国土木工程学会 2010 年 12 月批准成立“非饱和土与特殊土专业委员会”以来召开的第一次学术会议。来自全国 91 个单位的 387 名代表出席了会议, 其中具有高级职称的代表 156 名, 占 40%; 研究生代表 170 名, 占 44%; 渝外代表 258 名, 占 67%; 另有 3 位来自香港、美国和澳大利亚的教授和 4 名来自西北农林科技大学的优秀本科生代表参加。

会议以“实事求是、科学创新”为宗旨, 本着“百花齐放、百家争鸣”的方针, 开展了认真的学术交流。会议的学术报告共有 59 个, 包括 4 个《黄文熙讲座》学者论坛报告、36 个大会邀请报告和 19 个大会专题报告。报告内容涉及非饱和土、黄土、膨胀土、冻土、膨润土、盐渍土、残积土和红砂土等土类的工程特性和理论分析及其在重大工程中的应用, 充分反映了我国在这一领域的研究成果和研究水平, 是一次名符其实的学术盛会。

大会学术委员会和组织委员会的精细组织安排, 保证了会议的顺利进行, 受到了与会代表的一致好评。

(陈正汉 供稿)