

考虑拟弹性塑性变形的土体弹塑性本构模型

杨光华^{1, 3, 4}, 姚捷^{2, 3}, 温勇³

(1. 广东省水利水电科学研究院, 广东 广州 510610; 2. 中铁第四勘察设计院集团有限公司, 湖北 武汉 430063;
3. 武汉大学土木建筑工程学院, 湖北 武汉 430072; 4. 广东省岩土工程技术研究中心, 广东 广州 510610)

摘要: 传统弹塑性理论下的关联流动模型用于岩土材料时, 对更一般的本构关系的描述难以令人满意, 这是因为土的塑性应变增量方向存在非唯一性, 这在理论和试验上都已得到证明。传统弹塑性理论是基于塑性应变增量方向具有唯一性的假设之上的, 因而不论采用关联流动法则还是非关联流动法则, 都难以较好地解决岩土材料本构关系的建模问题, 有必要去发展新的理论。同时已有的研究也表明土的塑性应变增量方向不仅取决于总应力, 也与应力增量是相关的, 即表现出弹性应变的特性。在广义位势理论的基础上, 研究塑性应变增量的分解准则, 提出了考虑拟弹性塑性变形的土体弹塑性本构模型, 把传统不可恢复的塑性应变增量分解为具有弹性应变特性的拟弹性部分和纯塑性部分。拟弹性部分遵从弹性法则, 并与应力增量有相同的方向, 采用弹性模型表示; 纯塑性部分遵从传统塑性理论的假设, 方向具有唯一性, 可以采用符合塑性理论的假设来建模。这样分解后建立的模型将更为合理和简便, 又可以解决土的塑性应变增量方向存在非唯一性的问题。最后通过与试验结果的对比证明了其可行性, 对试验结果可得到效果更好的模型。

关键词: 广义位势理论; 塑性应变增量; 拟弹性分解; 弹塑性模型

中图分类号: TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2013)08-1496-08

作者简介: 杨光华(1962-), 男, 博士, 教授级高级工程师, 博士生导师, 主要从事土的本构理论、深基坑工程、高层建筑基础工程及软土工程方面的科研和设计。E-mail: yghsks@21cn.com。

Elastic-plastic model for soils considering quasi-elastic-plastic deformation

YANG Guang-hua^{1, 3, 4}, YAO Jie^{2, 3}, WEN Yong³

(1. Guangdong Research Institute of Water Resources and Hydropower, Guangzhou 510610, China; 2. China Railway Siyuan Survey and Design Group Co., Ltd., Wuhan 430063, China; 3. School of Civil and Architectural Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 4. Guangdong Geotechnical Engineering Technology Research Center, Guangzhou 510610, China)

Abstract: The associated flow model based on the traditional elastic-plastic theory can not describe the constitutive relationship of soils well. It is because the direction of plastic strain increment of soils is not unique, which has been theoretically and experimentally proved. The traditional elastic-plastic theory is based on the assumption that the direction of the plastic strain increment is unique, so neither the associated flow rule nor the non-associated flow rule can solve the modeling problem of soil constitutive relationship satisfactorily, and it is necessary to develop a new theory. What is more, the known results show that the direction of the plastic strain increment of soil not only depends on the total stress but also the stress increment, which exhibits the characteristics of elastic strain. Based on the generalized potential theory, the decomposing rule of plastic strain increment is studied, and an elastic-plastic model for soils considering quasi-elastic-plastic deformation is proposed. The traditional unrecoverable plastic strain increment is decomposed into quasi-elastic part and pure-plastic part. The quasi-elastic part obeys the elastic rule, which has the same direction with the stress increment and can be expressed by elastic model. The pure-plastic part obeys the traditional plasticity theory, in which the direction is unique and the modeling of constitutive relationship can be based on the the assumption of plastic theory. The proposed model is more reasonable and convenient, and it can solve the problem of non-uniqueness of the direction of the plastic strain increment of soils. Finally, the feasibility of the proposed model is verified through comparison with the test results, indicating that the proposed model has better effectiveness.

Key words: generalized potential theory; plastic strain increment; quasi-elastic decomposition; elastic-plastic model

0 引言

传统的弹塑性本构建模理论中, 无论采用关联或

收稿日期: 2012-11-13

非关联流动法则, 其理论假设的前提都是塑性应变增量方向具有唯一性, 而塑性应变增量方向具有唯一性的数学条件其实就是表示塑性应变增量与应力增量关系的塑性矩阵 $[D_p]$ 的秩为1, 即矩阵的旋度值为0。而当实际土体的塑性应变增量方向是不唯一时, 其塑性矩阵的秩不为1, 数学上其实就是意味着存在部分塑性应变具有弹性特性, 即与应力增量相关。实际的土在理论上满足塑性应变增量方向具有唯一性条件是困难的^[1]。实际中也有众多试验认为塑性应变增量方向是与应力增量方向相关的^[2-4], 但如果强迫把不可恢复的应变都定义为满足方向具有唯一性条件的塑性应变来建模, 势必会使弹塑性矩阵变得奇异, 从而导致求解的困难和结果的不真实^[5-6]。

合理的土的本构模型是要真实模拟或反映土的变形特性。为此, 本文基于广义位势理论基础上构建能更合理地反映塑性应变增量方向不具有唯一性的新模型, 其主要思想是把不可恢复应变分解为两部分, 一部分是纯塑性应变, 其满足与应力增量方向无关的假设; 另一部分是拟弹性的塑性应变, 即符合弹性变形规律的塑性应变, 其增量方向与应力增量方向相关, 符合弹性分解法则。这样总应变增量可分解为: 弹性应变、拟弹性塑性应变和纯塑性应变3部分。文中在广义位势理论基础上建立了相应的模型, 并通过试验对模型的效果进行验证, 从而为解决塑性应变增量方向不具有唯一性的问题提出了新的模型。

1 广义位势理论

笔者在1988年提出广义塑性位势理论, 1991年提出多重势面理论, 1991年、1992年、1993年^[7-11]分别从张量角度和数学分析角度论证了多重势面理论的数学基础, 被称之为不考虑应力主轴旋转的广义塑性位势理论^[1, 12]。

后来的研究表明^[13-14], 传统的弹性位势理论、非线性弹性理论和塑性位势理论都可归结为数学上的势函数问题, 因而可以用广义位势理论来表达和统一, 从而使以往建立于不同物理假设基础上的本构理论可以从数学上由广义位势理论来统一和联系起来, 使本构理论从数学上具有更清晰的、直接的概念, 更易理解和应用, 同时扩大了建模的手段和方法, 并且对传统的建模理论有了更清晰的数学基础, 形成了新的理论体系。

广义位势理论把材料本构模型的研究分为两大内容^[1]。以塑性应变为例, 一是主空间上的本构试验及其拟合方程:

$$\{d\varepsilon_i^p\}_{3 \times 1} = [D_p]_{3 \times 3} \{d\sigma_i\}_{3 \times 1} \quad (1)$$

二是由主空间到一般坐标空间的数学变换, 可采用广义位势理论的方法, 当假设塑性应变增量主方向与应力总量主方向一致时, 则有分解准则:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 d\varepsilon_k^p \cdot \frac{\partial \sigma_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2)$$

把式(1)的3个主塑性应变增量 $d\varepsilon_i^p$ ($i=1, 2, 3$) 看作为应力空间上一个矢量的3个分量, 则可用3个线性无关的势函数 φ_i ($i=1, 2, 3$) 的梯度矢量来表述, 则有

$$d\varepsilon_k^p = \sum_{i=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \sigma_i} \quad (3)$$

把式(3)代入式(2), 可得多重势面的理论公式:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \sum_{k=1}^3 d\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

同样, 可以应用广义位势理论建立应变空间的理论及其他建模理论。显然, 多重势面理论并不是依据塑性公设而建立的, 而是从数学原理上建立的, 具有明确的数学基础。

当 $d\varepsilon^p = (d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p)$ 在应力空间可以用单一势函数的梯度矢量表达时, 此时相当于式(1)中的矩阵 $[D_p]_{3 \times 3}$ 秩为1, 且矢量 $d\varepsilon^p$ 的旋度为零, 则

$$d\varepsilon_k^p = d\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \sigma_k} \quad (5)$$

当 $d\varepsilon_i^p$ 方向与 σ_i 方向相同时, 代入式(2)得

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

此即为传统的塑性位势理论的公式, 其只是广义位势理论的一个特例。

因此, 从广义位势理论出发, 岩土材料的本构理论可以看作是一个数学方法表述土的力学特性问题。

2 土体拟弹性塑性应变的机理及数学思考

2.1 拟弹性塑性应变的机理

从细观上来看, 忽略材料颗粒的压碎, 塑性应变增量中具有拟弹性性质, 其根据有以下两点:

(1) 土料的颗粒会产生滑移, 同时也可以发生转动, 如图1所示, 后者同样会导致塑性应变^[15-16]。经典塑性理论是在金属塑性力学的晶格滑移机理基础上发展起来的, 显然不能适应这一点。因此, 应该用不同形式的屈服面和不同的硬化规律来反映这两种不同的塑性应变。颗粒间接触面上的总应力是否满足Mohr-Coulomb条件决定了是否出现滑移, 而应力增量则决定了转动, 它的方向性则不像传统的塑性流动那样简单。塑性形变理论从其变化特性上来讲实际上也

可看作非线性弹性理论,它可以在一定程度上反映应变增量与应力增量之间的关系。从而,传统的流动法则不能描述的那一部分塑性应变可以看作是一种拟弹性应变。

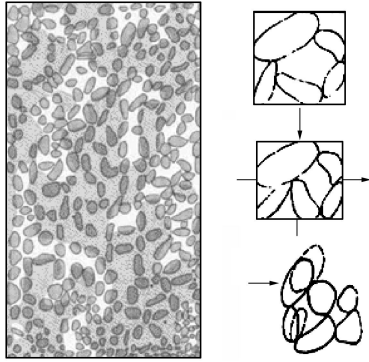


图1 岩土材料变形机理

Fig. 1 Deformation mechanism of geotechnelial materials

(2)剪胀应变在传统塑性理论中也被看作塑性应变,但实际试验表明:剪胀应变也是具有可恢复性的,加载时剪胀,卸载时体缩^[17-18]。可见剪胀应变具有与弹性应变类似的可逆性,这构成了另一种拟弹性应变。因此,在对塑性应变增量的描述中增加拟弹性应变的这一修正方案充分考虑了土的真实变形机理,理论上是合理的。

2.2 从广义位势理论的角度对塑性应变增量方向问题的探讨

广义位势理论认为土的塑性应变增量从数学上要严格满足方向唯一性是较困难的^[1]。为方便说明,在 $p-q$ 平面上讨论塑性矩阵的正定性问题。应变分量的增量表达式为^[1]

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^p &= Adp + Bdq, \\ d\varepsilon^p &= Cdp + Ddq, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中, A, B, C, D 为塑性系数。容易得出,总塑性应变 $d\varepsilon^p$ 方向唯一时,要求塑性系数满足^[1]:

$$AD - BC = 0 \quad (8)$$

若 $\min(A, B, C, D) \neq 0$, 又可表示为

$$\frac{BC}{AD} = 1 \quad (9)$$

当 $A \neq D, B \neq C$ 时,式(9)成立则必存在 B 或 C 大于 A 或 D ,即存在非对角占优的问题,这是流动法则的必然,除非像金属材料那样 $A=0, B=0, C=0$,但实际土体 $A>0$,因此,当 $[D_p]$ 为非对角占优严重时,很易出现 $[D_{ep}]$ 的非正定性,这就导致解的失真^[5-6]。

由以上分析可见,真实土体更一般的情况应为

$$AD - BC > 0 \quad (10)$$

如对于硬化剪缩土, $A>0, D>0, C<0, B>0$, 则

$AD - BC > 0$, 说明 $d\varepsilon^p$ 方向是与 $d\sigma$ 方向有关的,即硬化剪缩土不存在 $d\varepsilon^p$ 方向的唯一性;对剪胀土,理论上也不能证明 $AD - BC = 0$ 。因此,严格的 $d\varepsilon^p$ 方向唯一性是困难的^[1],沈珠江较早对塑性应变增量方向具有唯一性的假设提出疑问^[19]。因此,传统理论对塑性应变增量方向描述是不足的,式(10)的关系表示的是 $d\varepsilon^p$ 方向不具有唯一性,也即是存在弹性应变的特性。因此,可以把其中的符合弹性应变特性的部分分解出来,称其为拟弹性塑性应变。

2.3 利用拟弹性部分改善弹塑性本构矩阵

从2.1节和2.2节的分析可知,土体变形中存在拟弹性塑性部分,合理解决的方法应是按以上广义弹塑性理论的思想,把拟弹性塑性变形划归弹性变形,即减少 A, D 使剩余部分满足式(8),从而使弹塑性矩阵性质得到改善,使模型更合理。

这一理论与文献[5, 6]建议加大弹性应变比例来改善弹塑性矩阵非正定性的设想具有相同的效果。因此,传统理论中产生 $[D_{ep}]$ 非正定性其实并不是土体真实的反映,是人为主观因素所产生的,是模型假设的缺陷。当恢复其真实面貌,采用能真实表现土的力学特性的模型时,则可克服这一问题。

把上述思想用符号表示,即把传统弹塑性矩阵分解为

$$\begin{aligned} [D_{ep}] &= [D_e] - [D_p] = \\ &= [D_e^c] + [D_p^c] - [D_p^p] \quad (11) \end{aligned}$$

即从塑性矩阵 $[D_p]$ 中分出拟弹性部分 $[D_p^c]$, 归入到弹性分解准则内,合并到弹性矩阵部分从而转化为

$$[D_{ep}] = [D_e^c] + [D_p^c] - [D_p^p] \quad (12)$$

这样使符合弹性应变的矩阵增大,这将大大改善弹塑性矩阵的性质,又符合内在的力学机理,因而是个很好的处理方法。

3 考虑拟弹性塑性变形的土体弹塑性本构模型

3.1 建模思路

塑性应变增量的方向与应力增量方向有关,又与应力总量有关,可以按照它的这个特性将其分解为符合弹性分解准则的拟弹性塑性部分和符合传统理论中方向具有唯一性的纯塑性流动部分。前者符合弹性理论的形式,方向与应力增量方向相关,从广义位势理论来看,满足 $B = C = 0$,因而可以在弹性理论框架内处理,即主空间直接数学拟合;后者方向由总应力状态确定,符合正交流动法则,即 $AD = BC$ 框架内的传统塑性理论。

这相当于在塑性矩阵中拿出拟弹性这一部分合并到弹性矩阵部分, 这样从理论上可改善总的弹塑性矩阵性质, 也更符合土的实际变形机理。这样分解后建立的模型将更为合理和简便, 又可以解决土塑性应变增量方向不具有唯一性的问题。

3.2 拟弹性参数的确定

在 $p-q$ 空间中, 按多重势面模型的本构方程为^[1, 20]

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v &= \left(A + \frac{1}{K_e} \right) dp + Bdq, \\ d\bar{\varepsilon} &= Cdp + \left(D + \frac{1}{3G_e} \right) dq, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中, K_e , G_e 为弹性体积模量和剪切模量。

根据等压试验、等 p 试验和等 σ_3 及其回弹试验可以确定式 (13) 的系数^[20]。按文献[20]的方法, 可以假设塑性系数 A, B, C, D 满足关联模型的条件而得关联模型; 也可以对其不做假设, 则得到的模型称为 $E\mu KG$ 模型, 这时塑性系数不满足式 (8) 的条件, 此时从数学角度上则说明塑性应变的方向不具有唯一性, 是存在符合弹性准则的塑性应变部分, 该部分称其为拟弹性塑性应变, 这时式 (13) 的总应变增量与应力增量关系可以进一步分解表示为

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v &= \left(A_{pp} + \frac{1}{K_e} + A_{ep} \right) dp + Bdq, \\ d\bar{\varepsilon} &= Cdp + \left(D_{pp} + \frac{1}{3G_e} + D_{ep} \right) dq, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中, 要求纯塑性系数 A_{pp}, B, C, D_{pp} 满足塑性应变增量 $d\varepsilon^p$ 方向唯一性的条件式 (8)。

拟弹性塑性应变部分为则假设它符合广义虎克定律:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^{ep} &= A_{ep} dp = \frac{1}{K'} dp, \\ d\bar{\varepsilon}^{ep} &= D_{ep} dq = \frac{1}{3G'} dq, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中, $d\varepsilon_v^{ep}$ 为拟弹性塑性体应变增量, $d\bar{\varepsilon}^{ep}$ 为拟弹性塑性剪应变增量, K', G' 为拟弹性体积模量和剪切模量。

从式 (15) 可得

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^{ep}}{d\varepsilon_v^{ep}} = \frac{D_{ep} dq}{A_{ep} dp} = \frac{K' dq}{3G' dp} \quad (16)$$

而拟弹性部分与弹性部分方向相同:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^{ep}}{d\varepsilon_v^{ep}} = \frac{D_{ep} dq}{A_{ep} dp} = \frac{K' dq}{3G' dp} = \frac{d\bar{\varepsilon}^e}{d\varepsilon_v^e} = \frac{K_e dq}{3G_e dp} \quad (17)$$

令其比例为 $\frac{K_e}{3G_e} = k$, 可由弹性参数求得。

剩余纯塑性应变部分为

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^{pp} &= (A - A_{ep}) dp + Bdq = A_{pp} dp + Bdq, \\ d\bar{\varepsilon}^{pp} &= Cdp + (D - D_{ep}) dq = Cdp + D_{pp} dq. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

这部分塑性应变增量符合正交流动法则, 即满足方向具有唯一性的式 (8), 则有

$$(A - A_{ep})(D - D_{ep}) = BC \quad (19)$$

联立式 (17), 整理得

$$kA_{ep}^2 - (kA + D)A_{ep} + AD - BC = 0 \quad (20)$$

解得

$$A_{ep} = \frac{(kA + D) \pm \sqrt{(kA + D)^2 - 4k(AD - BC)}}{2k} \quad (21a)$$

进而可得

$$D_{ep} = kA_{ep} \quad (21b)$$

剩余部分的主纯塑性应变系数为

$$\left. \begin{aligned} A_{pp} &= A - A_{ep}, \\ D_{pp} &= D - D_{ep}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

式 (21a) 分子中, 正负号根据实际物理意义取值, 一般应使 $A_{pp} > 0, D_{pp} > 0$, 以及根据土性质的实际情况, 尽量使主对角占优: $A_{pp} > B, D_{pp} > C$ 。但当剪缩很强烈时可选取 $A_{pp} < B$ 的分解结果。

实际计算中, 弹性应变、拟弹性塑性应变、纯塑性应变分别存储, 前者为可恢复的应变, 后两者为不可恢复的应变。

3.3 将关联模型与试验差值部分直接归为拟弹性塑性应变的方法

为了方便计算, 也可以把式 (13) 的塑性系数 A, B, C, D 直接假设满足关联流动的假设, 但此时模型毕竟并不完全与土的变形特性相适应, 这时可以把关联流动法则下的结果和试验值之间的差值部分归并为拟弹性塑性部分进行修正, 并根据差值部分确定 A_{ep}, D_{ep} , 这样的模型更简单, 而 A, B, C, D 可以用 E_t, μ_t 来表示^[1, 20], 从而建立关联流动法则下加拟弹性修正项的 ($E_t, \mu_t, A_{ep}, D_{ep}$) 4 参数弹塑性模型:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v &= \left(A + \frac{1}{K_e} + A_{ep} \right) dp + Bdq, \\ d\bar{\varepsilon} &= Cdp + \left(D + \frac{1}{3G_e} + D_{ep} \right) dq, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

此时, 塑性系数 A, B, C, D 的确定方法如下: 假设 4 个塑性系数的关系与关联模型时的关系一致, 即

$$\left. \begin{aligned} AD - BC &= 0, \\ B &= C. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

此时塑性矩阵 $[D_{ep}^{\sigma}]$ 为对称矩阵。在这一假设下, 4

个塑性系数 A, B, C, D 即可以类似邓肯—张模型那样较为方便地确定, 亦可用邓肯—张模型的 E_t, μ_t 参数来表示^[1, 20]。

如在传统的常规三轴试验中, 由于 $d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$, $dp = \frac{1}{3}d\sigma_1$, $dq = d\sigma_1$, $d\varepsilon_2 = d\varepsilon_3 = -\mu_t d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_v = (1-2\mu_t) d\varepsilon_1$, $d\bar{\varepsilon} = \frac{2}{3}(1+\mu_t)d\varepsilon_1$, 代入式 (13) 得

$$\left. \begin{aligned} (1-2\mu_t) \frac{d\varepsilon_1}{d\sigma_1} &= \frac{1}{3} \left(A + \frac{1}{K_e} \right) + B, \\ \frac{2}{3}(1+\mu_t) \frac{d\varepsilon_1}{d\sigma_1} &= \frac{1}{3} C + \left(D + \frac{1}{3G_e} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

而在常规三轴试验中有 $E_t = \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}$, 则

$$\left. \begin{aligned} \frac{1-2\mu_t}{E_t} &= \frac{1}{3} \left(A + \frac{1}{K_e} \right) + B, \\ \frac{2(1+\mu_t)}{3E_t} &= \frac{1}{3} C + \left(D + \frac{1}{3G_e} \right). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

联立式 (24) 和式 (26), 即可求得 A, B, C, D 4 个系数:

$$A = \frac{K_{ep}^2}{G_{ep} + \frac{1}{3}K_{ep}}, \quad (27a)$$

$$B = C = \frac{K_{ep}G_{ep}}{G_{ep} + \frac{1}{3}K_{ep}} = K_{ep} - \frac{1}{3}A, \quad (27b)$$

$$D = \frac{G_{ep}^2}{G_{ep} + \frac{1}{3}K_{ep}} = G_{ep} - \frac{1}{3}B, \quad (27c)$$

$$K_{ep} = \frac{1-2\mu_t}{E_t} - \frac{1}{3K_e}, \quad (27d)$$

$$G_{ep} = \frac{2(1+\mu_t)}{3E_t} - \frac{1}{3G_e}, \quad (27e)$$

式中, $K_e = \frac{E_e}{3(1-2\mu)}$, $G_e = \frac{E_e}{2(1+\mu)}$ 。

这样, 由 E_t, μ_t 即可与求得 4 个塑性系数 A, B, C, D , 此即 $p-q$ 空间的简化多重势面模型。

3.4 模型的涵盖能力

新的模型只在广义位势理论的框架下增加两个拟弹性参数 A_{ep}, D_{ep} , 从而在计算中一开始就包含两项塑性应变增量: 拟弹性塑性应变和纯塑性应变, 两项各自随着应力水平的变化而变化。拟弹性占比较多时, 应变增量方向与应力增量方向有关; 占比较少时则可看作为与之无关, 这时拟弹性系数可直接取为零, 即退化为传统的正交流动模型, 因而新模型涵盖更广。

4 试验验证

4.1 水坠坝冲填土参数的拟弹性分解

对广东仁化县水坠坝冲填土, 文献[21]通过回弹试验确定了弹性参数 $[D_e]$; 杨光华^[1, 20]确定了多重势面模型所需的、不做假设的塑性系数 A, B, C, D (从等向固结试验 $\ln p - \varepsilon_v$ 及其回弹曲线确定 A , 从 p 为常数的三轴试验确定 D , 从常三轴试验确定 B 和 C), 经判断它们不符合关联流动法则, 即 $B \neq C$; 塑性应变增量方向也不具有唯一性, 即不满足 $AD=BC$ 。这里按 3.2 节方法对这套参数进行分解。

以 $p=150$ kPa 及 $p=50$ kPa 两组等 p 试验为例, 计算结果如图 2, 3 所示。

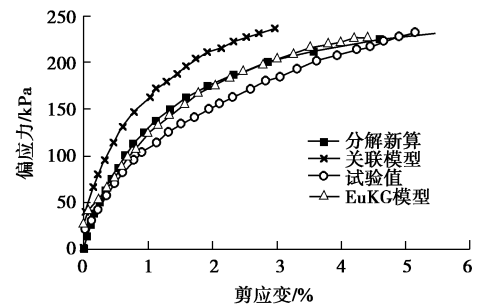


图 2 $q - \bar{\varepsilon}$ 曲线 ($p=150$ kPa)

Fig. 2 Experimental and computed curves of $q - \bar{\varepsilon}$ ($p=150$ kPa)

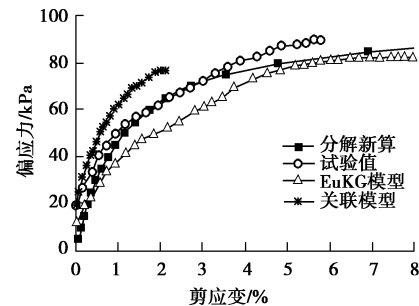


图 3 $q - \bar{\varepsilon}$ 曲线 ($p=50$ kPa)

Fig. 3 Experimental and computed curves of $q - \bar{\varepsilon}$ ($p=50$ kPa)

由图可知, 分解后剪应变的计算与试验有较好符合, 与试验值吻合更好一些, 比关联模型要好。这样处理后, 不但使模型计算与试验更符合, 同时也保持了关联模型弹塑性矩阵对称的优点, 且弹性应变增加了拟弹性塑性应变部分, 使弹性矩阵增大, 从而使弹塑性矩阵的性质得到改善, 利于数值计算, 达到了文献[5, 6]所要求的目的而又具有较好的理论基础。

4.2 北京细砂四参数弹塑性模型

文献[22]进行了北京地区细砂土的 3 组围压 (0.1, 0.2, 0.3 MPa) 下的常规三轴试验, 得到了

Duncan-Chang $E - B$ 的模型参数, 以及 $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_v - \varepsilon_1$ 试验曲线, 如图 4 所示。

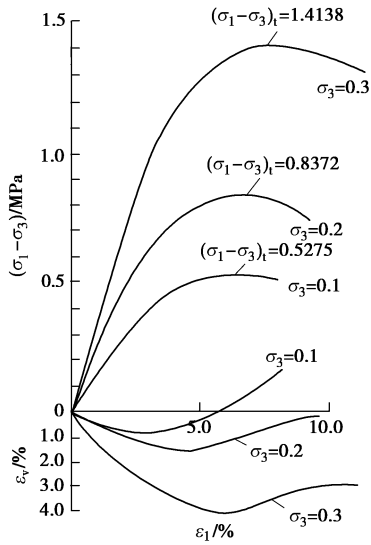


图 4 北京细砂试验曲线^[22]

Fig. 4 Experimental curves of $(\sigma_1 - \sigma_3) - \varepsilon_1$ and $\varepsilon_v - \varepsilon_1$ for fine sandy soil^[22]

根据 3.3 节的简化多重势面模型塑性系数确定方法, 在关联流动假设下, 广义位势理论的 4 个系数 A, B, C, D 即可以确定。然后将北京细砂在围压 0.1 MPa 下的三轴试验结果和邓肯模型、简化多重势面模型所计算的结果进行对比, 如图 5 所示。

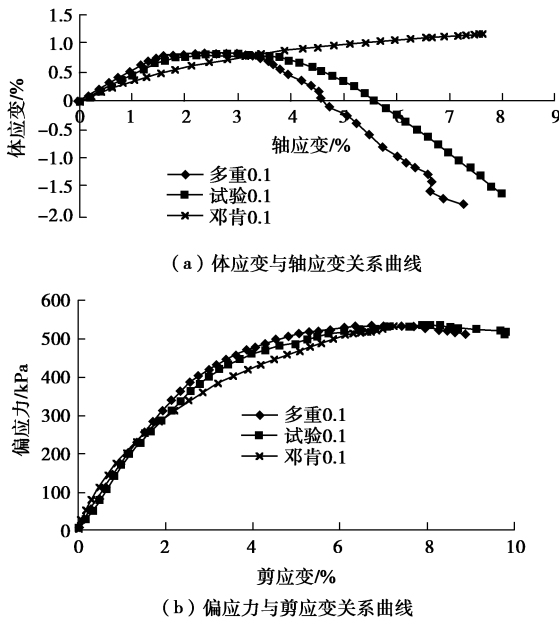


图 5 常三轴受力下北京细砂应变曲线 ($\sigma_3 = 0.1$ MPa)

Fig. 5 Volumetric strain of Beijing sandy soil at conventional stress case ($\sigma_3 = 0.1$ MPa)

由图可知, 邓肯模型不能反映剪胀性, 简化多重势面模型考虑关联流动条件下可以反映剪胀性, 但体应变计算的后半段还有一点差距。因此, 考虑增加拟

弹性部分进行修正。当不做较复杂的试验时, 可按 3.3 节提出的方法, 用试验值减去简化多重势面模型 (关联法则) 计算值, 差出的部分归为拟弹性塑性应变, 并转化为相应的拟弹性参数即 A_{ep} 和 D_{ep} 进行拟合计算, 结果如图 6 所示。

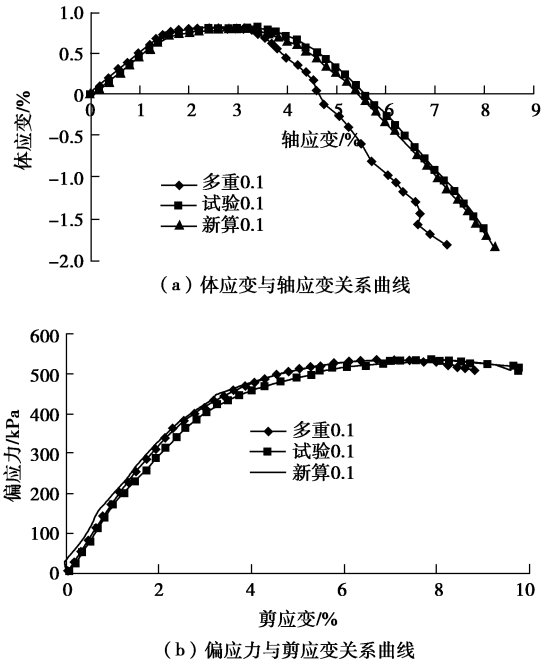


图 6 加拟弹部分后的拟合结果

Fig. 6 Fitting results with quasi-elastic-plastic parameters

由图可知, 对于体应变, 新算法拟合效果明显更好一些; 对于剪应变, 也有所改善, 虽然改进效果没有体应变明显, 但总的效果已得到较大改进。进一步的研究表明, A_{ep}, D_{ep} 并不完全符合线弹性准则。因此, 此时最准确的方法是进一步建立独立的非线性拟弹性参数或用数值表示的 A_{ep}, D_{ep} 的插值空间, 这样就构成了 $(E_t, \mu_t, A_{ep}, D_{ep})$ 4 参数的弹塑性数值模型^[1]。

5 用于建立三参数剪胀模型的弹塑性计算模式

通常人们对剪胀材料采用弹性模型, 建立其三参数的应力应变增量关系式如下^[23]:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v &= \frac{dp}{K_p} + \frac{dq}{K_q}, \\ d\bar{\varepsilon} &= \frac{dq}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

但若按弹性模型建立其计算模式时, 对剪胀参数 K_q 部分处理要采用迭代方法计算, 不便应用。其实对以上的关系, 在广义位势理论上可以建立一种更方便的弹塑性模型的计算格式, 按照以上的分解准则, 可以将应变分解为弹性部分和塑性部分。

弹性部分:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_v^e &= \frac{dp}{K_p} \\ d\bar{\varepsilon}^e &= \frac{dq}{G} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

塑性部分:

$$d\varepsilon_v^p = \frac{dq}{K_q} \quad (30)$$

这样, 弹性部分完全可以按广义胡克定律解决, 而塑性部分仅有剪胀应变, 对比式(30)、(7)可见, 此时, $A=0$, $C=0$, $D=0$, 仅有 $B = \frac{1}{K_q} \neq 0$, 满足 AD

$-BC=0$ 的塑性应变增量方向唯一性的条件, 只是 $B \neq C$, 塑性矩阵为非对称, 由广义位势理论中的多重势面模型直接得到塑性矩阵为^[1]

$$[D_p] = \frac{1}{|A|} \cdot B \cdot [D_c] \cdot \left\{ \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\}^T [D_c] \quad (31)$$

$$|A| = 1 + B \cdot \left\{ \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right\} [D_c] \left\{ \frac{\partial p}{\partial q} \right\} \quad (32)$$

其结果与程展林等^[23]的结果一致, 而这里可以很方便地直接从广义位势理论来建立, 理论依据充分, 按传统理论建立则显得很困难。从而对剪胀三参数模型建立其弹塑性模型计算格式, 克服了按弹性模型时处理 K_q 的困难, 这种分解建模的方法具有科学、灵活的特点。因此, 可以直接套用广义位势理论来建立弹塑性的计算矩阵。

6 结 论

(1) 通过已有成果和理论的分析, 土的塑性应变增量方向具有非唯一性的现象是存在的, 而传统的弹塑性理论不能合理地表达这一现象, 若强制采用传统理论表达, 则势必造成弹塑性矩阵的不合理, 甚至会奇异, 影响解的合理性。

(2) 本文基于广义位势理论基础上提出的考虑拟弹性变形的模型, 把总的塑性应变分解为满足弹性分解准则的拟弹性部分和符合传统塑性理论假设的纯塑性部分, 建立可以模拟塑性应变增量方向具有非唯一性的弹塑性模型。通过试验验证表明, 模型的效果良好, 从而为解决这一多年来未解决的问题提供了一种有效的方法。

(3) 对于像粗粒料的三参数模型, 采用本文的思想方法可以很方便地建立其弹塑性模型, 从而可以更好地解决剪胀材料的建模问题。

(4) 由于岩土材料力学特性的复杂性, 传统理论的局限性, 本文利用广义位势理论探索一种新的表述

途径, 取得一定的效果, 但尚有不少问题需进一步深入研究。

参考文献:

- [1] 杨光华, 李广信, 介玉新. 土的本构模型的广义位势理论及其应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007. (YANG Guang-hua, LI Guang-xin, JIE Yu-xin. The general potential theory for soil constitutive model and its application[M]. Beijing: China Water Power Press, 2007. (in Chinese))
- [2] 窦宜. 关于塑性势问题的讨论[J]. 岩土工程学报, 1981, 3(2): 75 - 76. (DOU Yi. Discussion on the plastic potential[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1981, 3(2): 75 - 76. (in Chinese))
- [3] ANANDARAJAH A, SOBHAN K, KUGANENTHIRA N. Incremental stress-strain behavior of granular soil[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1995, 121(1): 57 - 68.
- [4] LADE P V, DUNCAN J M. Cubical triaxial tests on cohesionless soil[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1973, 99(SM10): 793 - 812.
- [5] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000. (SHEN Zhu-jiang. Theoretical soil mechanics[M]. Beijing: China Water Power Press, 2000. (in Chinese))
- [6] 殷宗泽, 卢海华, 朱俊高. 土体的椭圆-抛物双屈服面模型及其柔度矩阵[J]. 水利学报, 1996(12): 23 - 28. (YIN Zong-ze, LU Hai-hua, ZHU Jun-gao. Elliptic-parabolic double yield surface model for soil and its flexibility matrix[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 1996(12): 23 - 28. (in Chinese))
- [7] 杨光华. 建立土的本构关系的广义塑性位势理论[C]// 第三届全国岩土力学数值分析与解析方法会议论文集. 珠海, 1988. (YANG Guang-hua. Building the generalized plastic potential theory in constitutive relation of soils[C]// Proceedings of the 3th National Conf on the Numerical Analysis and Analytical Method for Rock and Soil Mechanics. Zhuhai, 1988. (in Chinese))
- [8] 杨光华. 岩土类工程材料的多重势面弹塑性本构模型理论[J]. 岩土工程学报, 1991, 13(5): 99 - 107. (YANG Guang-hua. The multi-potential constitutive theory of elasto-plasticity for the soil and rock materials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1991, 13(5): 99 - 107. (in Chinese))
- [9] 杨光华. 岩土类工程材料本构关系的势函数模型理论[C]// 第四届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会. 泰安, 1991. (YANG Guang-hua. Theory of potential function model for rocks and soils[C]// Proc of 4th National

- Conference on numerical simulation and analytical methods in geomechanics. Tai'an, 1991. (in Chinese))
- [10] 杨光华. 岩土塑性本构关系的势函数理论表述问题[C]//首届全国岩土力学与工程青年工作者学术讨论会论文集. 杭州, 1992. (YANG Guang-hua. Formulation problems of potential function theory in the plastic constitutive relation of geotechnical material[C]// Proceedings of the First National Young Scholar Symposium on Rock and Soil Mechanics. Hangzhou, 1992. (in Chinese))
- [11] 杨光华. 岩土类工程材料本构方程的一个张量普遍形式定律[M]//水工结构工程理论与应用. 大连: 大连海运学院出版社, 1993. (YANG Guang-hua. A law for the general form of tensor in the constitutive equation of the soil and rock materials[M]// Theory and Application of Water Power and Structure Engineering. Dalian: Dalian Maritime University Press, 1993. (in Chinese))
- [12] 杨光华. 土的本构模型的数学理论及其应用[D]. 北京: 清华大学, 1998. (YANG Guang-hua. The mathematical theory for the constitutive model of soils and its application[D]. Beijing: Tsinghua University, 1998. (in Chinese))
- [13] 杨光华, 李广信. 岩土的本构模型的数学基础与广义位势理论[J]. 岩土力学, 2002, **23**(5): 531 - 535. (YANG Guang-hua, LI Guang-xin. Mathematical foundation of constitutive models of geotechnical material and generalized potential theory[J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, **23**(5): 531 - 535. (in Chinese))
- [14] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 广义塑性力学—岩土塑性力学基本原理[M]. 北京: 中国建工出版社, 2002. (ZHENG Ying-ren, SHEN Zhu-jiang, GONG Xiao-nan. Generalized plastic mechanics—the principles of geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2002. (in Chinese))
- [15] 李广信. 高等土力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004. (LI Guang-xin. Advanced soil mechanics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. (in Chinese))
- [16] 姚捷. 基于广义位势理论的土的本构模型的研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2010. (YAO Jie. Study on constitutive model of soil based on generalized potential theory[D]. Wuhan: Wuhan University, 2010. (in Chinese))
- [17] 李广信, 郭瑞平. 土的卸载体缩与可恢复剪胀[J]. 岩土工程学报, 2000, **23**(2): 158 - 161. (LI Guang-xin, GUO Ri-ping. Volume-contraction in unloading of shear tests and reversible dilatation of soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, **23**(2): 158 - 161. (in Chinese))
- [18] 张建民. 砂土的可逆和不可逆剪胀规律[J]. 岩土工程学报, 2000, **23**(1): 12 - 17. (ZHANG Jian-min. Reversible and irreversible dilatancy of sand[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, **23**(1): 12 - 17. (in Chinese))
- [19] 沈珠江. 土的弹塑性应力应变关系的合理形式[J]. 岩土工程学报, 1980, **2**(2): 11 - 19. (SHEN Zhu-jiang. The rational form of stress-strain relationship of soils based on elastic-plasticity theory[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1980, **2**(2): 11 - 19. (in Chinese))
- [20] YANG Guang-hua. A new elasto-plastic constitutive model for soils[C]// Int Conf on Soft Soil Eng. Guangzhou, 1993.
- [21] 陆培炎, 陈韶永, 熊丽珍, 等. 水坠坝冲填土弹塑性本构方程[J]. 岩土工程学报, 1984, **6**(2): 23 - 39. (LU Pei-yan, CHEN Shao-yong, XIONG Li-zhen, et al. Elastic plastic constitutive equation for soil of water fall dam[J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1984, **6**(2): 23 - 39. (in Chinese))
- [22] 冯卫星, 常绍东, 胡万毅. 北京细砂土邓肯-张模型参数试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, **18**(3): 327 - 330. (FENG Wei-xing, CHANG Shao-dong, HU Wan-yi. Experimental study on parameters of Duncan-Chang model for Beijing fine sandy soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 1999, **18**(3): 327 - 330. (in Chinese))
- [23] 程展林, 丁红顺, 吴良平. 粗粒土试验研究[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(8): 1151 - 1158. (CHENG Zhan-lin, DING Hong-shun, WU Liang-ping. Experimental study on mechanical behavior of granular material[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(8): 1151 - 1158. (in Chinese))