

# 无越流承压含水层降落漏斗体积

杨建民<sup>1,2</sup>, 李 嘉<sup>1</sup>

(1. 天津大学建工学院土木系, 天津 300072; 2. 滨海土木工程结构与安全教育部重点实验室(天津大学), 天津 300072)

**摘 要:** 承压含水层抽水井降落漏斗反映了含水层的水文性质, 如渗透系数和弹性释水系数等水文地质参数, 降落漏斗形状和体积具有重要工程应用价值。根据 Theis 井流函数, 在无越流承压含水层抽水试验后期,  $s - \lg r$  和  $s - \lg t$  半对数坐标曲线都呈现直线关系, 该特征常用于计算水文地质参数和影响半径。应用积分方法, 分别以降深和井距作为积分变量, 推导了无越流承压含水层单个抽水井降落漏斗体积, 并与精确值对比分析, 阐明了常规用  $s - \lg r$  直线延长线所得影响半径内降落漏斗体积占完整降落漏斗体积的比例及差异所在。

**关键词:** 体积; 降落漏斗; 承压含水层; 无越流

中图分类号: TU463; P641 文献标识码: A 文章编号: 1000 - 4548(2013)S1 - 0186 - 04

作者简介: 杨建民(1979 - ), 男, 博士、副教授, 从事地下工程水力学教学与科研。E-mail: yangjianmin@tju.edu.cn。

## Volume of depression cone of pumping wells in non-leaky confined aquifer

YANG Jian-min<sup>1,2</sup>, LI Jia<sup>1</sup>

(1. Department of Civil Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China; 2. Key Laboratory of Coast Civil Structure Safety(Tianjin University), Ministry of Education, Tianjin 300072, China)

**Abstract:** The depression cone of pumping wells reflects the hydrogeological conditions of aquifer, such as hydraulic parameters and elastic storage of confined aquifer. The geometrical shape and volume of depression cone has important application value. According to the Theis equation, during the late period of pumping tests on non-leaky confined aquifer, the relationship between drawdown and distance is a straight line in  $s - \lg r$  figure, and that between drawdown and time shows a straight line in  $s - \lg t$  figure. These characteristics are often used to calculate hydrogeological parameters and influence radius. Applying the integration method, the volume of depression cone of pumping well in non-leaky confined aquifer is derived by regarding the drawdown and distance as integration variables. A contrast to the exact solution shows that the depression cone within the influence radius calculated by means of the straight line of  $s - \lg r$  is proportional to the entire drawdown cone. The difference between the above two depression cones is pointed out.

**Key words:** volume; depression cone; confined aquifer; non-leakage

## 0 引 言

承压含水层内抽水井的降落漏斗体积是抽水场水文地质条件的综合反映, 直接体现了降水影响深度和影响距离, 在地下水资源管理的水量评价、抽水导致地面沉降的沉降计算和基坑工程的减压井减压效果等领域具有重要的工程应用价值。

影响半径在水文地质中及工程实践中被广泛应用, 通常根据现场降深 - 井距半对数坐标上  $s - \lg r$  直线段延长至降深为零处而确定。按照质量守恒原理, 无越流承压含水层内总的降落漏斗体积应当是  $Qt/S$ <sup>[1]</sup>, 但工程实践中主要关注影响半径范围内的降落漏斗, 此式应用不甚方便。孙树义<sup>[2]</sup>应用积分方法推导出了无越流承压含水层降落漏斗体积, 张宏仁<sup>[1]</sup>

对该公式进行了修正, 但两公式内都包含有单井最大降深  $s_w$ , 而抽水试验中由于井损存在且难以准确确定, 故  $s_w$  也难以准确确定。且孙树义<sup>[2]</sup>和张宏仁<sup>[1]</sup>公式都未确定常规  $s - \lg r$  直线段延长方法所得影响半径内降落漏斗体积数值。

对于影响半径, 陈崇希教授<sup>[3]</sup>认为“只有当地下水因抽水而得到新的补给量或排泄量的减少, 而且该影响范围内新补给量和排泄量减少的总和等于抽水量, 影响范围才能稳定下来。”薛禹群院士<sup>[4]</sup>论证影响半径“ $R$  是时间的函数, 仅仅是一个参数; 从非稳定流的 Theis 公式也可以导出稳定流的 Thiem 公式”, 并

基金项目: 国家自然科学基金项目(50908160); 教育部高校博士点新教师基金项目(20090032120051); 天津大学自主创新基金项目  
收稿日期: 2013 - 03 - 03

且说明影响半径具有广泛的实际应用价值。于是本文仍沿用“影响半径”这一名词。

本文针对无越流承压含水层, 基于 Theis 井流理论, 应用两种积分方法, 一种将井距  $r$  作为积分自变量, 一种将降深  $s$  作为积分自变量, 分别推导无越流承压含水层单井降落漏斗, 并在所得降落漏斗体积公式中消除单井最大降深  $s_w$ , 从而易于工程应用。

## 1 Theis 井流理论分析

无越流承压含水层完整井单井抽水的井流函数 Theis 公式<sup>[5]</sup>如下:

$$s(r, t) = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad (1)$$

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt}, \quad (2)$$

式中,  $s$  为水位降深,  $r$  为井距,  $t$  为抽水持续时间,  $Q$  为井流量,  $T$  为导水系数,  $S$  为承压含水层的弹性释水系数。

$s - \lg t$  曲线的斜率为

$$\frac{\partial s}{\partial(\lg t)} = \frac{2.3Q}{4\pi T} e^{-u}. \quad (3)$$

$s - \lg r$  曲线的斜率推导<sup>[6]</sup>如下:

$$\frac{\partial s}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi T} \frac{1}{r} e^{-u} \quad (4)$$

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial s}{\partial(\lg r)} \frac{d(\lg r)}{dr} = \frac{\partial s}{\partial(\lg r)} \frac{1}{r} \lg e, \quad (5)$$

$$\frac{\partial s}{\partial(\lg r)} = \frac{\partial s}{\partial r} r = -\frac{Q}{2\pi T} e^{-u} \frac{1}{\lg e} = -\frac{2.3Q}{2\pi T} e^{-u}, \quad (6)$$

所以,

$$\frac{\partial s}{\partial(\lg r)} = -\frac{2.3Q}{2\pi T} e^{-u}. \quad (7)$$

同理可得

$$\frac{\partial s}{\partial(\ln r)} = -\frac{Q}{2\pi T} e^{-u}. \quad (8)$$

当  $u \leq 0.01$  时,  $e^{-u} \approx 1$ , 式 (3), (8) 可近似表示为

$$\frac{\partial s}{\partial(\lg t)} = \frac{2.3Q}{4\pi T}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial s}{\partial(\ln r)} = -\frac{Q}{2\pi T}. \quad (10)$$

式 (9) 表示  $s - \lg t$  曲线斜率为一常数, 常用来推算承压含水层的导水系数  $T$ 。式 (10) 表明  $s - \ln r$  曲线斜率也为一常数, 且与  $s - \lg t$  曲线斜率为固定倍数关系, 常用于推算承压含水层的影响半径  $R_0$ 。利用以上两直线, 可以由承压含水层一个观测孔抽水试验资料推算不同井距处的水位降深。

由式 (10) 得降深 - 距离在半对数坐标上线性表达式为

$$s = \left( -\frac{Q}{2\pi T} \right) \ln r + s_w, \quad (11)$$

式中,  $s_w$  为抽水井的有效降深。根据式 (10) 揭示的  $s - \ln r$  函数曲线为一直线的含义,  $s_w$  可由 3 个或 3 个以上观测孔的降深 - 距离实测数据推算而得。

由式 (11) 得  $s - \ln r$  直线上  $\ln r$  的最大值为

$$(\ln r)_{\max} = \frac{2\pi T}{Q} s_w. \quad (12)$$

$\ln r$  与  $s$  之间的函数关系式为

$$\ln r = \frac{2\pi T}{Q} (s_w - s). \quad (13)$$

$r$  与  $s$  之间的函数关系式为

$$r = e^{\frac{2\pi T}{Q} s_w} \cdot e^{-\frac{2\pi T}{Q} s}. \quad (14)$$

根据 Theis 井流函数, 影响半径<sup>[7]</sup>又可表示为

$$R_0 = 1.5 \sqrt{\frac{T}{S}} t. \quad (17)$$

根据影响半径公式 (17) 和  $s - \ln r$  直线段线斜率公式 (10), 得无越流承压含水层抽水井处的有效降深如下:

$$s_w = \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( 2.25 \frac{T}{S} t \right). \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (11) 得影响半径以内任意井距处降深:

$$s = \left( -\frac{Q}{2\pi T} \right) \ln r + \frac{Q}{4\pi T} \ln \left( 2.25 \frac{T}{S} t \right), \quad (19)$$

$$s = \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2.25 T t}{r^2 S}. \quad (20)$$

## 2 以降深为积分变量计算降落漏斗体积

以降深为积分变量, 应用积分方法, 则无越流承压含水层完整抽水井的水位降落漏斗体积  $V$  表达式为

$$V = \int_0^{s_w} \pi r^2 ds. \quad (21)$$

将式 (14) 代入式 (21) 得

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{s_w} \left[ e^{\frac{2\pi T}{Q} s_w} \cdot e^{-\frac{2\pi T}{Q} s} \right]^2 ds \\ &= \left( \pi e^{\frac{4\pi T s_w}{Q}} \right) \left[ -\frac{Q}{4\pi T} e^{-\frac{4\pi T}{Q} s} \right]_0^{s_w} \\ &= \left( -\frac{Q}{4\pi T} e^{\frac{4\pi T s_w}{Q}} \right) \left[ e^{-\frac{4\pi T}{Q} s_w} - 1 \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi T} \left( e^{\frac{4\pi T}{Q} s_w} - 1 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

所以得无越流承压含水层完整抽水井的水位降落

漏斗体积表达示为

$$V = \frac{Q}{4T} \left( e^{\frac{4\pi T}{Q} s_w} - 1 \right) \quad (23)$$

将式(18)代入式(23)得

$$V = \frac{Q}{4T} \left[ e^{\frac{4\pi T}{Q} \frac{Q}{4\pi T} \ln\left(\frac{2.25Tt}{S}\right)} - 1 \right] = \frac{Q}{4T} \left( \frac{2.25Tt}{S} - 1 \right) \quad (24)$$

所以对于无越流承压含水层,其降落漏斗体积可表示为

$$V = \frac{Q}{4T} \left( \frac{2.25Tt}{S} - 1 \right) \quad (25)$$

式(25)中,  $S$  为含水层的弹性释水系数,其值一般为  $10^{-4} \sim 10^{-3}$ , 所以  $2.25Tt/S$  远大于 1, 于是以降深为积分变量所求的无越流承压含水层完整抽水井的水位降落漏斗体积式(25)可表示为

$$V = \frac{2.25}{4} \frac{Qt}{S} = 0.5625 \frac{Qt}{S} \quad (26)$$

### 3 以井距为积分变量计算降落漏斗体积

以井距为积分变量,应用积分方法,则无越流承压含水层完整抽水井的水位降落漏斗体积  $V$  可表示为

$$V = \int_0^{R_0} 2\pi r s dr \quad (27)$$

将式(20)代入式(27)得

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{R_0} 2\pi r \left( \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2.25Tt}{r^2 S} \right) dr \\ &= \frac{Q}{T} \int_0^{R_0} r \ln \left( \sqrt{\frac{2.25Tt}{S}} \frac{1}{r} \right) dr \\ &= \frac{Q}{T} \left( \int_0^{R_0} r \ln \sqrt{\frac{2.25Tt}{S}} dr - \int_0^{R_0} r \ln r dr \right) \\ &= \frac{Q}{T} \frac{r^2}{2} \ln \sqrt{\frac{2.25Tt}{S}} \Big|_0^{R_0} - \frac{Q}{T} \frac{r^2}{4} (\ln r^2 - 1) \Big|_0^{R_0} = \frac{2.25}{4} \frac{Qt}{S} \end{aligned} \quad (28)$$

于是,以井距为积分变量所求无越流承压含水层完整抽水井的水位降落漏斗体积也可表示为式(26)。

### 4 精确解及差异分析

以上根据 Theis 井流函数,  $u$  值较小时  $s - \ln r$  呈直线,即井距  $r$  较小或者抽水时间  $t$  较长之后降深与井距关系在半对数坐标上呈直线的特点,应用积分方法,推导了影响半径  $R_0$  以内的降落漏斗体积。张宏仁推导的无越流承压含水层单井降落漏斗体积精确解<sup>[4]</sup>如下:

$$V = \int_0^r 2\pi r s dr = \frac{Qt}{S} \int_0^u W(u) du$$

$$= \frac{Qt}{S} [uW(u) + 1 - e^{-u}] \quad (29)$$

将影响半径  $R_0$  代入式(29)得式(17)及下式:

$$u = \frac{r^2 S}{4Tt} \Big|_{r=R_0} = 0.5625 \quad (30)$$

$$V = \frac{Qt}{S} [uW(u) + 1 - e^{-u}] \Big|_{u=0.5625} = 0.7061 \frac{Qt}{S} \quad (31)$$

比较降落漏斗体积公式(26)和式(31),两者之间有差异,式(26)和式(31)与质量守恒原理所得的理论解  $Qt/S$  也有差异,图1说明其差异所在。

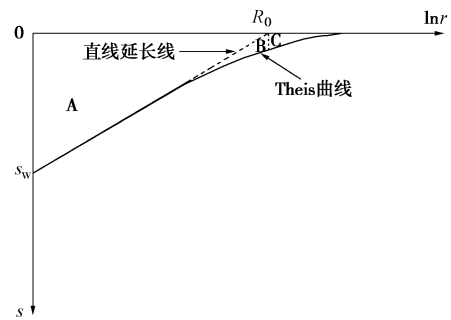


图1 降落曲线及降落漏斗组成

Fig. 1 Drawdown curve and component of depression cone

由图1可以看出,在  $s - \ln r$  图上,当井距  $r$  较小时,  $u$  值偏小,  $s - \ln r$  关系呈直线,当井距  $r$  较大时,  $u$  值偏大,  $s - \ln r$  关系偏离直线。在 Theis 曲线内,由  $s - \ln r$  直线段及其延长段和影响半径  $R_0$  点向下到 Theis 曲线的虚线段,将 Theis 曲线内降落漏斗体积分为图1所示 A、B、C 三部分。A、B、C 三部分绕降深  $s$  轴旋转所得体积与本文中推导所得降落漏斗体积公式之间的关系如下:

$$Qt/S = V_A + V_B + V_C \quad (32)$$

$$0.7061 \frac{Qt}{S} = V_A + V_B \quad (33)$$

$$0.5625 \frac{Qt}{S} = V_A \quad (34)$$

式(32)~(34)表明了降落漏斗体积各种计算方法的差异所在。在  $s - \ln r$  图上, Theis 曲线后段曲线偏离直线,于是  $s - \ln r$  直线延长线到 0 降深处所得的影响半径  $R_0$  点实际降深并非零降深。

根据质量守恒原理所得的  $Qt/S$  是图1中完整 Theis 曲线,即 A、B、C 三部分绕  $s$  轴旋转所得的体积,降水井到影响半径  $R_0$  点降落漏斗体积精确解  $0.7061 Qt/S$ ,为图1中 Theis 曲线上到  $R_0$  点,即 A、B 两部分绕  $s$  轴旋转所得的体积,降水井到影响半径  $R_0$  点降落漏斗体积  $0.5625 Qt/S$  为图1中 Theis 曲线上直线段及其延长线到  $R_0$  点,即 A 部分绕  $s$  轴旋转所得的体积。

## 5 结 语

本文基于无越流承压含水层完整井经典井流函数 Theis 公式, 根据降深 - 时间半对数坐标曲线和降深 - 距离半对数坐标曲线直线段斜率的恒定倍数关系, 应用积分方法, 分别以降深和井距为积分变量推导了无越流承压含水层抽水井影响半径  $R_0$  内水位降落漏斗体积的表达式。

根据  $s - \ln r$  直线段延长可得影响半径  $R_0$ 。在影响半径  $R_0$  内, 按  $s - \ln r$  直线关系的水位降深漏斗体积为

$$V_A = 0.5625 \frac{Qt}{S} \quad (35)$$

在影响半径  $R_0$  内, 按  $s - \ln r$  实际曲线关系的水位降深漏斗体积为

$$V_{AB} = 0.7061 \frac{Qt}{S} \quad (36)$$

在实际降深影响范围内, 按  $s - \ln r$  实际曲线关系的水位降深漏斗体积为

$$V_{ABC} = \frac{Qt}{S} \quad (37)$$

将所得影响半径内降落漏斗体积公式与影响半径内降落漏斗体积精确解及应用质量守恒原理所得完整降落漏斗体积对比分析, 指出了三者之间差异所在, 供工程实践参考应用。

### 参考文献:

[1] 张宏仁. 漏斗体积的空间分布[J]. 水文地质工程地质, 1984(2): 44. (ZHANG Hong-ren. Space distribution of the

drawdown cone volume[J]. Hydrogeology and Engineering Geology, 1984(2): 44. (in Chinese))

[2] 孙树义. 疏干漏斗体水量估计[J]. 水文地质工程地质, 1983(5): 37 - 38. (SUN Shu-yi. Evaluation for the volume of the drawdown cone[J]. Hydrogeology and Engineering Geology, 1983(5): 37 - 38. (in Chinese))

[3] 陈崇希. 影响半径稳定井流模型与可持续开采量: 地下水动力学一个基本理论问题的分歧—与薛禹群院士商榷[J]. 水利学报, 2010, 41(8): 1003 - 1008. (CHEN Chong-xi. Influence radius of steady well flow model and sustainable extraction: a basic theoretical question in hydrodynamics of groundwater[J]. Journal of Hydraulic, 2010, 41(8): 1003 - 1008. (in Chinese))

[4] 薛禹群. 关于稳定井流模型和 Dupuit 公式的讨论—对陈崇希教授“商榷”一文的答复[J]. 水利学报, 2011, 42(10): 1252 - 1256. (XUE Yu-qun. Discussion on teady well flow model and Dupuit equation[J]. Journal of Hydraulic, 2011, 42(10): 1252 - 1256. (in Chinese))

[5] 薛禹群. 地下水动力学原理[M]. 北京: 地质出版社, 1986. (XUE Yu-qun. Theory of groundwater hydrodynamics[M]. Beijing: Geology Press, 1986. (in Chinese))

[6] 《数学手册》编写组, 数学手册[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979. (Compile group of 《mathematics manual》. Mathematics manual[M]. Beijing: The people's Education Press, 1979. (in Chinese))

[7] 薛禹群. 地下水动力学原理[M]. 北京: 地质出版社, 1986. (XUE Yu-qun. Theory of groundwater hydrodynamics[M]. Beijing: Geology Press, 1986. (in Chinese))

(本文责编 明经平)