

n 次齐次屈服函数相关联流动法则失效的机理研究

胡亚元

(浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室, 滨海和城市岩土工程研究中心, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 岩土材料一些常用的与摩擦有关的经典屈服准则, 如 Mohr-Coulomb 屈服准则、俞茂宏广义双剪应力屈服准则、Lade-Duncan 屈服准则、Matsuoka-Nakai 屈服准则和沈珠江三剪应力屈服准则等, 都属于 n 阶欧拉齐次函数。把上述屈服准则从真实空间推广到耗散空间后发现, 当耗散空间中的 n 阶齐次屈服函数与真实应力无关时, 根据耗散空间的 Drucker 塑性公设获得的耗散功与应力状态无关; 对于砂性材料其值甚至为零, 与塑性发生时熵增大于零的热力学第二定律相违背。为了克服上述缺陷, 必须在耗散空间的 n 阶齐次屈服函数中引入与真实应力有关的函数项, 然而, 由此获得的真实空间屈服准则与塑性应变增量之间必须服从非相关联流动法则。由于服从相关联流动法则时耗散空间屈服准则表达式与真实空间的完全相同, 故在真实空间中服从 n 阶齐次屈服准则的岩土摩擦材料也不适宜采用相关联流动法则。

关键词: 屈服准则; Drucker 塑性公设; n 阶齐次函数; 耗散空间; 流动法则

中图分类号: TU47

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2013)02-0243-09

作者简介: 胡亚元(1968-), 男, 副教授, 从事环境土工、地基处理和土体本构关系的研究工作。E-mail: huyayuan@ccea.zju.edu.cn。

Failure mechanism of associated flow rule for n th homogenous yield function

HU Ya-yuan

(Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering of Ministry of Education, Research Center of Coastal and Urban Geotechnical Engineering of Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: Some commonly-used classical yield criteria related to friction effect in geomaterials belong to n th Euler homogeneous function. Such criteria refer to Mohr-Coulomb yield criterion, generalized Yu Maohong twin shear stress yield criterion, Lade-Duncan yield criterion, Matsuoka-Nakai yield criterion and Shen Zhujiang three-shear stress yield criterion. After this type of yield criteria is extended from true space to dissipative space, it is found that if n th homogeneous yield criterion in dissipative space is independent of true stress, the dissipative work based on the Drucker's plastic postulate in dissipative space will be independent of stress state, and even equal to zero for sand materials, the latter of which does not conform to the second law of thermodynamics which demonstrates that entropy production must be larger than zero during the appearance of plastic behavior. To avoid this unconformity, a partial function related to the true stress must be added into the n th homogeneous yield function in dissipative space. Therefore, the relation between the new obtained yield criterion in true space and the increment of plastic strain must conform to the non-associated flow rule. Because the expression of the yield criteria in dissipative space is the same as that in true space on the condition of the associated flow rule, the associated flow rule is invalid for geomaterials with friction effect and n th homogeneous yield criteria in true space.

Key words: yield criterion; Drucker's plastic postulate; n th homogeneous function; dissipation space; flow rule

0 引 言

Drucker 塑性公设是经典塑性力学相关联流动法则的理论基础, 但大量岩土试验表明, 大部分情况下岩土材料不满足相关联流动法则, 因此很多学者对 Drucker 塑性公设的适用性问题进行了讨论^[1-6]。Drucker^[1]分析了基于理想塑性假设的塑性公设的不完善性; 陈惠发^[2]、赵彭年^[4]等发现 Mohr-Coulomb

屈服准则与经典力学中滑块的摩擦运动受力规律相一致, 通过参照摩擦滑块滑移运动类比材料屈服变形过程, 揭示岩土材料采用非相关联流动法则的力学机理; 杨光华发展了陈惠发等人的这一思想^[6], 进一步研究了摩擦滑块移动时的应力循环做功过程, 证明

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51178419)

收稿日期: 2012-04-23

Drucker 塑性公设不适用于岩土 Mohr-Coulomb 屈服准则。然而,除 Mohr-Coulomb 屈服准则外,岩土材料还存在其它摩擦屈服准则^[7],如俞茂宏屈服准则、Matsuoka-Nakai 屈服准则和沈珠江三剪应力屈服准则等,由于在经典力学中没有与这些屈服准则相匹配的摩擦滑块,因此无法沿用陈惠发等^[2]所曾采用的证明方法,所以相关联流动法则和 Drucker 塑性公设在这些屈服准则中的适用性问题,还有待于进一步研究。

近年来,国内外的岩土专家从热力学出发研究材料的塑性现象^[8-16]。Ziegler^[8]首先在热力学框架内提出塑性应变增量在耗散空间的正交性,并从能量耗散的热力学角度证明服从 Mohr-Coulomb 屈服准则的塑性材料在真实空间必须服从非正交流动法则^[8];基于 Ziegler 研究成果,Collins 等^[9]探究了服从广义 Mises 屈服准则的塑性应变必须服从非相关联流动法则的热力学机理。胡亚元指出当服从 Mohr-Coulomb 或 Lade-Duncan 屈服准则的砂土服从相关联流动法则时,将违反热力学熵增规律^[12]。在本文中笔者着重证明遵循 n 阶欧拉齐次屈服准则的塑性应变增量和屈服函数之间必须采用非相关联流动法则,而 Mohr-Coulomb 屈服准则和广义 Mises 屈服准则必须服从非相关联流动法则^[8-9]是本文的一个特例。

本文从超塑性力学出发^[8-11],把 Drucker 塑性公设从真实空间修正到耗散空间,提出耗散空间的 Drucker 塑性公设。把一些常用的与摩擦角相关的岩土屈服准则,例如 Mohr-Coulomb 屈服准则、广义 Mises 屈服准则、Lade-Duncan 砂土屈服准则、俞茂宏双剪应力屈服准则等^[7],转换成耗散空间的屈服准则,证明这些屈服准则都属于 n 阶欧拉齐次函数。推导了服从 n 阶欧拉齐次屈服准则的岩土材料耗散功公式,证明了若耗散空间的 n 阶欧拉齐次屈服准则与真实应力无关,则其对应的耗散功与岩土材料的应力状态无关,对于黏聚力为零的砂性土,甚至会出现塑性发生时熵增为零的现象,违背热力学第二定律;为了使服从 n 阶齐次屈服准则的岩土材料与热力学第二定律不相违背,必须根据岩土材料塑性发生时摩擦引起的能量耗散与真实空间正应力(或球应力)相关的机制,在耗散空间的屈服准则中增加与真实应力状态相关的函数项,使塑性发生时材料的耗散功大于零。由于耗散空间中的 n 阶欧拉齐次屈服函数必须与真实应力相关,故 n 阶欧拉齐次屈服函数在真实应力空间中必须服从非相关联流动法则。同时,本文发现超塑性力学^[8-11]所依据的耗散函数对岩土材料而言通常比较复杂,难以通过试验成果归纳总结,目前在岩土本构领域应用还存在较大困难。为了发挥经典塑性力学和热力学超塑性力学各自的优点,避免各自的不足,建议在超塑

性力学理论指导下,采用耗散空间中的 Drucker 塑性公设来建立弹塑性模型更实用方便。

1 基于耗散空间 Drucker 塑性公设的弹塑性理论

1.1 弹塑性模型的自由能函数

根据总应变与弹性应变和塑性应变之间的关系,岩土弹塑性模型的力学元件组合结构如图 1 所示。

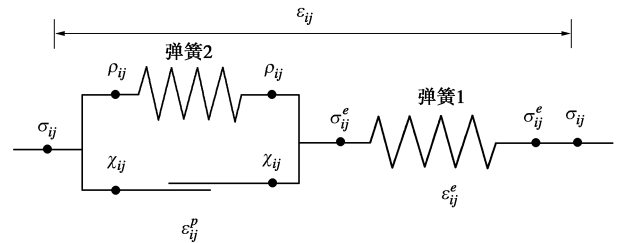


图 1 内变量与真实变量所对应的力学元件组合

Fig. 1 Mechanical components combination of internal variable and true variables

图中的 ϵ_{ij} 为应变张量, σ_{ij} 为与 ϵ_{ij} 热力学对偶的应力张量, ϵ_{ij}^p 为塑性应变张量, χ_{ij} 为与 ϵ_{ij}^p 热力学对偶的塑性应力张量, ρ_{ij} 为 ϵ_{ij}^p 所对应的弹簧 2 元件的应力张量。在岩土力学试验中,能够比较直观地测定 σ_{ij} 和 ϵ_{ij} , 而不宜测定 χ_{ij} 和 ϵ_{ij}^p , 因此在准热力学超塑性力学中,把 ϵ_{ij} 称为真实应变张量, σ_{ij} 为真实应力张量; ϵ_{ij}^p 为反映塑性元件的内应变张量(或称为耗散应变张量), χ_{ij} 为反映塑性元件的内应力张量(或称为耗散应力张量)。由热力学理论可知,图 1 所示弹塑性元件组合的力学性质可以选择 $\{\epsilon_{ij}, \sigma_{ij}\}$ 中的任何一个物理量和 $\{\epsilon_{ij}^p, \chi_{ij}\}$ 中的任何一个物理量作为一组独立自由变量来描述。在超塑性力学中,由于耗散函数为 σ_{ij} 和 ϵ_{ij}^p 的函数,所以选用 σ_{ij} 和 ϵ_{ij}^p 作为一组独立自由变量来描述图 1 所示力学元件组合的受力性质^[9-10]。本文遵循传统塑性力学的建模思路,从应力表示的屈服函数出发采用 Drucker 塑性公设建立岩土弹塑性模型,故需要选用 σ_{ij} 和 χ_{ij} 作为一组独立自由变量来描述图 1 所示力学元件组合的受力性质。设弹簧 1 和弹簧 2 均为 Green 超弹性元件,其中弹簧 1 所具有的 Gibbs 自由能为 $G_{e1}(\sigma_{ij}^e)$, 弹簧 2 所具有的 Gibbs 自由能为 $G_{e2}(\rho_{ij})$ 。根据图 1 的受力性质有

$$\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \chi_{ij} \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e \quad (2)$$

图 1 所示弹塑性力学元件体系的总 Gibbs 自由能为

$$\begin{aligned} G(\sigma_{ij}, \chi_{ij}) &= G_{e1}(\sigma_{ij}^e) + G_{e2}(\rho_{ij}) \\ &= G_{e1}(\sigma_{ij}^e) + G_{e2}(\sigma_{ij} - \chi_{ij}) \quad (3) \end{aligned}$$

根据 Gibbs 自由能的热力学性质, ϵ_{ij} 和 ϵ_{ij}^p 可由式 (3) 得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \\ \varepsilon_{ij}^p &= -\frac{\partial G}{\partial \chi_{ij}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

值得注意的是,当图1中弹簧2不存在时,此时 $\rho_{ij} = 0$, 由式(1)可知 $\sigma_{ij} = \chi_{ij}$, 而热力学要求描述体系的基本变量 σ_{ij} 与 χ_{ij} 必须是一组相互独立的自由变量。如何从数学技巧上暂时解除 $\sigma_{ij} = \chi_{ij}$ 的约束使 σ_{ij} 和 χ_{ij} 成为独立自由变量呢? 笔者发现这一数学困难与优化理论中 Lagrange 把约束优化问题转化为非约束优化问题相类似。借鉴 Lagrange 的求解思路, 笔者获得图1中弹簧2不存在时的 Gibbs 自由能表达式为

$$G(\sigma_{ij}, \chi_{ij}) = G_1(\sigma_{ij}) + \zeta(\sigma_{ij} - \chi_{ij}), \quad (5)$$

式中, ζ 为优化原理中的 Lagrange 乘子, 满足 $\partial G / \partial \zeta = 0$ 。引入 Lagrange 乘子 ζ 后, 按照 Lagrange 理论, σ_{ij} 和 χ_{ij} 可按独立自由变量规律对式(5)进行求导而无需考虑 $\sigma_{ij} = \chi_{ij}$ 这一约束条件。

1.2 耗散空间的 Drucker 塑性公设

与上一节讨论自由能思路相一致, 本文仍然选用 σ_{ij} 与 χ_{ij} 作为一组独立自由变量来论述 Drucker 塑性公设。设图1所示塑性元件的屈服准则函数为 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a) = 0$, 其中 H_a 为硬化参数, 则耗散空间中的 Drucker 塑性公设表述为: “当选用 σ_{ij} 与 χ_{ij} 作为一组相互独立的自由变量时, 在耗散空间中, 对处在某一状态下的稳定材料单元, 借助于一个外部附加作用, 在其原有内应力状态之上缓慢地施加并卸除一组附加内应力, 则在该内应力状态循环内附加内应力在内应变产生过程中所作的功为非负”。

本文 Drucker 塑性公设与经典塑性力学中的主要不同在于: 经典塑性力学中的 Drucker 塑性公设是采用真实应力 σ_{ij} 来表述的, 本文把用 σ_{ij} 表述的塑性公设称为真实空间中的 Drucker 塑性公设。事实上, 从图1可知, 与塑性元件直接相关的是 χ_{ij} 而不是 σ_{ij} , 故理应采用内应力 χ_{ij} 来描述 Drucker 塑性公设, 本文把用 χ_{ij} 表述的塑性公设称为耗散空间中的 Drucker 塑性公设。类比真实空间的 Drucker 塑性公设分析过程, 可根据耗散空间中的 Drucker 塑性公设证明耗散空间的屈服面必凸且内应变率 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ (内应变增量为 $d\varepsilon_{ij}^p = \dot{\varepsilon}_{ij}^p dt$) 与耗散空间屈服面 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 之间存在如下数学关系:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}^p \frac{\partial Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)}{\partial \chi_{ij}}, \quad (6)$$

式中的 $\dot{\lambda}$ 为塑性因子。式(6)反映了塑性应变率与屈服面之间在耗散空间中的正交性。同时, 塑性变形是不可逆变形, 在其发生过程中还需满足热力学第二定

律, 根据超塑性力学理论, 无热传递等温过程塑性变形引起的耗散函数(耗散功)表达式为

$$D = T \dot{S}^i = \chi_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (7)$$

热力学第二定律要求发生不可逆塑性变形时需满足:

$$D = T \dot{S}^i = \chi_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p > 0. \quad (8)$$

2 符合 n 阶齐次函数的岩土屈服准则

屈服函数 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 可分为下面3部分之和。第一部分是当 $\chi_{ij} = \sigma_{ij} = 0$ 时 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 的值, 记为 $-C(H_a) = Q(0, 0, H_a)$, 对于砂性摩擦材料, 由于其屈服函数经过应力零点, 故 $C(H_a) = 0$; 对于黏性摩擦材料, 它是广义黏聚力, 是内黏聚力 c 和硬化参数的一般函数 $C = f(c, H_a)$; 第二部分是当 $\chi_{ij} = 0$ 时 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 的值减去第一部分的值, 记为 $-g_1(\sigma_{ij}, H_a) = Q(0, \sigma_{ij}, H_a) - Q(0, 0, H_a)$, 该部分的特点是其函数项与 χ_{ij} 无关且 $g_1(0, H_a) = 0$; 第三部分是 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 减去第一和第二部分所剩下的部分, 记为 $g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 。故:

$$Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a) = g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a) - g_1(\sigma_{ij}, H_a) - C(H_a), \quad (9)$$

从式(9)可知当 $\chi_{ij} = 0$ 时有 $g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a) = 0$ 。同时, 由屈服条件 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a) = 0$ 和式(9)可得

$$g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a) = g_1(\sigma_{ij}, H_a) + C(H_a). \quad (10)$$

若式(9)中的 $g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 满足

$$\chi_{ij} \frac{\partial g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)}{\partial \chi_{ij}} = n g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a), \quad (11)$$

则称式(9)中的屈服函数 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 为耗散空间的 n 阶欧拉齐次屈服函数。

根据经典塑性力学和热力学超塑性力学中屈服面和塑性位势的相互对应关系, 可以把岩土真实空间中的屈服准则转化为耗散空间中的屈服准则, 几类常用的与摩擦有关的耗散空间屈服准则见表1。根据式(11)的定义, 发现表1所列的屈服准则均为耗散空间的 n 阶欧拉齐次屈服函数。

表1中的 χ_1 , χ_2 和 χ_3 分别为内应力 χ_{ij} 的第一、第二和第三主应力, I_1^p , I_2^p , I_3^p 为内应力第一、第二及第三不变量, J_2^p , J_3^p 为内应力偏量的第二和第三不变量, θ_σ^p 为内应力的 Lode 角。 σ_1 , σ_2 和 σ_3 分别为真实应力张量 σ_{ij} 的第一、第二和第三主应力, I_1 , I_2 , I_3 分别为真实应力第一、第二和第三不变量, J_2 , J_3 为真实应力偏张量第二和第三不变量, θ_σ 为真实应力的 Lode 角。表中的广义内黏聚力 C , 内摩擦角 φ , 常数 μ 和 a 等, 对于硬化材料应为硬化参数 H_a 的一般函数。由于本文在分析 Drucker 塑性公设时 H_a 被视为常量, 故省略书写 H_a 符号对本文的理论推导和研

究结论无影响, 为行文简洁起见, 在表 1 的屈服函数中省略了 H_a 。同时参数 C 在 Mohr-Coulomb 屈服准则中等于黏土的内黏聚力 c ($C=c$), 在广义双剪应力屈服准则、广义 Mises 屈服准则和 n 阶齐次 Zienkiewicz-Pande 型屈服准则中为内黏聚力 c 的函数 ($C=f(c)$)。由于摩擦屈服材料的能量耗散与滑移面上的正应力有关, 故表 1 中真实应力对耗散空间屈服函数的贡献假定为真实应力正应力 σ_i ($i=1, 2, 3$) 和球应力 ($I_1=3\sigma_p$, σ_p 为真实应力的球应力) 的函数。

表 1 耗散空间反映摩擦效应的 n 阶齐次屈服准则

Table 1 n th order homogeneous yield criteria reflecting frictional effects in dissipation space

耗散应力空间屈服准则示例 (Q)	
一阶 齐次 式	Mohr-Coulomb 屈服准则 $(\chi_1 - \chi_3) - \sin \varphi (\chi_1 + \chi_3) = \mu(\sigma_1 + \sigma_3) + 2C \cos \varphi$ 广义双剪应力屈服准则 A. 当 $\chi_1(1 + \sin \varphi) - \chi_2 \leq \chi_2 - \chi_3(1 - \sin \varphi)$ 时 $(2\chi_3 - \chi_2 - \chi_1) - \sin \varphi (2\chi_3 + \chi_1 + \chi_2) = \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_3) + C$ B. 当 $\chi_1(1 + \sin \varphi) - \chi_2 \geq \chi_2 - \chi_3(1 - \sin \varphi)$ 时 $(2\chi_1 - \chi_2 - \chi_3) - \sin \varphi (2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3) = \mu(2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + C$
	广义 Mises 屈服准则 $\sqrt{J_2^p} - aI_1^p = \mu I_1 + C$
	三阶 Matsuoka-Nakai 屈服准则 $I_3^p - aI_1^p I_2^p = \mu I_1^3$
	Lade-Duncan 屈服准则 $I_3^p - a(I_1^p)^3 = \mu I_1^3$
	n 阶齐次 Zienkiewicz-Pande 型屈服准则
n 阶	$(\frac{\sqrt{J_2^p}}{\varpi(\theta_\sigma^p)})^n - a(I_1^p)^n = \mu I_1^n + C$

3 n 阶齐次屈服准则必须服从非相关关联流动法则的证明

根据耗散空间的 Drucker 塑性公设, 把式 (9) 代入式 (6) 得

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)}{\partial \chi_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)}{\partial \chi_{ij}}, \quad (12)$$

把 (12) 代入式 (7) 并利用式 (11) 得

$$D = \dot{\lambda} \chi_{ij} \frac{\partial g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)}{\partial \chi_{ij}} = n \dot{\lambda} g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a), \quad (13)$$

把式 (10) 代入到式 (13) 可得耗散功 D 为

$$D = n \dot{\lambda} [g_1(\sigma_{ij}, H_a) + C(H_a)], \quad (14)$$

从式 (14) 可以看出, 对于砂性材料, $C=0$, 此时 $D = n \dot{\lambda} g_1(\sigma_{ij}, H_a)$, 要使塑性发生时 $D > 0$, $g_1(\sigma_{ij}, H_a)$ 必不能等于零, 故 $g_1(\sigma_{ij}, H_a)$ 必是与 σ_{ij} 有关的函数。因为若 $g_1(\sigma_{ij}, H_a)$ 与 σ_{ij} 无关, 则由

$\sigma_{ij}=0$ 时 $g_1(\sigma_{ij}, H_a)=0$ 可推知 $g_1(\sigma_{ij}, H_a) \equiv 0$, 但这与 $g_1(\sigma_{ij}, H_a)$ 必不等于零的结论相矛盾。同时若 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 与 σ_{ij} 无关, 则根据函数 $g_1(\sigma_{ij}, H_a) = Q(0, 0, H_a) - Q(0, \sigma_{ij}, H_a)$ 可得 $g_1(\sigma_{ij}, H_a) \equiv 0$, 这又与 $g_1(\sigma_{ij}, H_a)$ 必不等于零相矛盾。故不论 $g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 是否与 σ_{ij} 相关, 由于 $g_1(\sigma_{ij}, H_a)$ 与 σ_{ij} 有关, $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 必与 σ_{ij} 有关, 即耗散空间 n 阶齐次函数的砂性屈服准则必须与真实应力相关。对于黏性材料, 摩擦塑性流动时其能耗与滑移面上的正应力密切相关。然而, 当屈服准则与真实应力无关即 $g_1(\sigma_{ij}, H_a)=0$ 时, 由式 (14) 可知其耗散功为 $Cn\dot{\lambda}$, 故耗散功在 $\dot{\lambda}$ [或 $d\lambda$ ($d\lambda = \dot{\lambda}dt$)] 变化过程中只与广义黏聚力和塑性因子有关, 而与材料所处的应力状态无关, 这就与摩擦变形时其能耗与滑移面上的应力状态密切相关相违背。故对于黏性材料, 当耗散空间的屈服准则 $g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 服从 n 阶齐次函数时, $g_1(\sigma_{ij}, H_a)$ 也不宜取零, 故黏性材料的 n 阶齐次屈服准则 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 也应与真实应力 σ_{ij} 有关。上述分析表明, 只有 $g_1(\sigma_{ij}, H_a) \neq 0$ 即 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 与 σ_{ij} 有关的耗散空间欧拉齐次屈服函数才能反映岩土材料的摩擦塑性流动能耗性质。

由于岩土试验能够直接测定的应力为真实应力 σ_{ij} , 因此需要把耗散空间中采用 χ_{ij} 和 σ_{ij} 表示的屈服准则转化为真实空间单独采用 σ_{ij} 表示的屈服准则以便与岩土试验成果相比较。由于当应力在屈服准则内变化时不产生新的内应变, 故真实空间的屈服准则是内应变恒定 (初始屈服面的内应变为零) 时屈服面所满足的数学关系式。为此需利用式 (3) 建立内应变一定时 χ_{ij} 和 σ_{ij} 之间的函数关系。根据式 (1) 有 $\rho_{ij} = \sigma_{ij} - \chi_{ij}$, 把式 (3) 代入式 (4) 得

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial G_{e1}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial G_{e2}(\sigma_{ij} - \chi_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial G_{e1}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial G_{e2}(\rho_{ij})}{\partial \rho_{ij}}, \quad (15a)$$

$$\varepsilon_{ij}^p = -\frac{\partial G_{e2}(\sigma_{ij} - \chi_{ij})}{\partial \chi_{ij}} = \frac{\partial G_{e2}(\rho_{ij})}{\partial \rho_{ij}}, \quad (15b)$$

式 (15b) 表明, ε_{ij}^p 同时也是 ρ_{ij} 关于 Gibbs 自由能 $G_{e2}(\rho_{ij})$ 的对偶项, 故根据 Legendre 变换, 存在函数 $F_{e2}(\varepsilon_{ij}^p) = \rho_{ij} \varepsilon_{ij}^p - G_{e2}(\rho_{ij})$ 使得

$$\rho_{ij}(\varepsilon_{ij}^p) = \frac{\partial G_{e2}(\varepsilon_{ij}^p)}{\partial \varepsilon_{ij}^p}, \quad (16)$$

把式 (16) 代入式 (1) 获得内应变恒定时 χ_{ij} 和 σ_{ij} 之间的函数关系为

$$\chi_{ij} = \sigma_{ij} - \rho_{ij}(\varepsilon_{ij}^p) = \sigma_{ij} - \frac{\partial G_{e2}(\varepsilon_{ij}^p)}{\partial \varepsilon_{ij}^p}, \quad (17)$$

令 $\varepsilon_{ij}^e = \partial G_{e1}(\sigma_{ij}) / \partial \sigma_{ij}$, 把式 (15b) 代入式 (15a) 得

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (18)$$

式(17)和式(18)的数学关系式正确地反映图1所示的弹塑性模型的力学性质,这就证实了式(3)确实是图1所示力学元件组合结构的 Gibbs 自由能。

式(17)反映了塑性应变一定时内应力 χ_{ij} 和真实应力 σ_{ij} 之间的函数关系,故真实空间的屈服准则可由式(17)代入到 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a) = 0$ 得

$$F(\sigma_{ij}, H_a) = Q([\sigma_{ij} - \rho_{ij}(\varepsilon_{ij}^p)], \sigma_{ij}, H_a), \quad (19)$$

在 ε_{ij}^p 恒定时对式(19)求 σ_{ij} 偏导得

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial Q}{\partial \chi_{ij}} \frac{\partial \chi_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial Q}{\partial \chi_{ij}} + \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (20)$$

由式(20)和式(6)可得

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \chi_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (21)$$

根据本节式(14)至式(15a)之间的理论分析,对于耗散空间中反映摩擦效应的 n 阶齐次屈服函数,受热力学第二定律的约束, $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 必须与 σ_{ij} 有关,故式(21)中的 $\partial Q / \partial \sigma_{ij}$ 必不等于零,故塑性应变增量 $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ 与真实应力空间中的屈服面必不正交,这就证明了遵循 n 阶齐次屈服函数的塑性应变增量必须服从非相关联流动法则。

当然,当采用其它非 n 阶齐次屈服函数或无需反映摩擦效应的黏土 n 阶齐次屈服函数(此时塑性流动时能量耗散与滑移面上的应力状态无关)时, $g_1(\sigma_{ij}, H_a)$ 有可能为零。当 $g_1(\sigma_{ij}, H_a) \equiv 0$ 同时 $g(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 也与 σ_{ij} 无关时,由式(9)可知 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij}, H_a)$ 与 σ_{ij} 无关,即式(21)等式右边的第二项为零,此时根据式(21)有

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \chi_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (22)$$

即真实空间的屈服准则等于塑性位势,岩土材料符合相关联流动法则。

4 实例分析

上述理论分析比较抽象,下面用几个具体的实例来论证本文结论的正确性。为简化分析,在下面具体实例分析中,本文做了如下简化:①假定图1中的弹簧2不存在;②由于本文分析 Drucker 塑性公设时硬化参数 H_a 被视为常量,省略书写 H_a 符号不影响本文的理论推导和研究结论,因此在下文的屈服准则表达式中省略了硬化参数符号 H_a 。

根据上文1.1节,当图1中弹簧2不存在时,其 Gibbs 自由能用式(5)表示。把式(5)代入式(4)得

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial G(\sigma_{ij}, \chi_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial G_1(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} + \zeta = \varepsilon_{ij}^e + \zeta, \quad (23a)$$

$$\varepsilon_{ij}^p = -\frac{\partial G(\sigma_{ij}, \chi_{ij})}{\partial \chi_{ij}} = \zeta, \quad (23b)$$

式中 $\varepsilon_{ij}^e = \partial G_1(\sigma_{ij}) / \partial \sigma_{ij}$, 把式(23a)代入式(23b)得

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (24)$$

同时根据式(5)中的乘子 ζ 满足 $\partial G / \partial \zeta = 0$ 得

$$\chi_{ij} = \sigma_{ij}, \quad (25)$$

式(24)和式(25)反映了图1中弹簧2不存在时弹塑性力学元件的串联性质,说明式(5)确实是图1所示弹簧2不存在时弹塑性本构关系的 Gibbs 自由能函数。

4.1 Zienkiewicz-Pande 型 n 阶齐次屈服函数必须服从非相关联流动法则的理论证明

如表1所示,耗散空间中 Zienkiewicz-Pande 型 n 阶齐次屈服函数 $Q(\chi_{ij}, \sigma_{ij})$ 可表示为

$$g = \left[\frac{\sqrt{J_2^p}}{\varpi(\theta_\sigma^p)} \right]^n - a(I_1^p)^n = \mu I_1^n + C, \quad (26)$$

对比式(26)和式(9)可知 $g_1(\sigma_{ij}, H_a) = \mu I_1^n$, 令

$$\left. \begin{aligned} I_1^p &= 3\chi_p, \\ J_2^p &= \chi_q / \sqrt{3}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中 χ_p 为球内应力, χ_q 为广义内剪应力,把式(27)代入式(26)并令 $a_1 = a \cdot 3^n$, $a_2 = (\sqrt{3})^{-n}$ 得

$$g = a_2 \left[\frac{\chi_q}{\varpi(\theta_\sigma^p)} \right]^n - a_1 (\chi_p)^n = \mu I_1^n + C, \quad (28)$$

根据耗散空间的 Drucker 塑性公设,由式(28)可得

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \chi_p} = -a_1 n (\chi_p)^{n-1} \dot{\lambda}, \quad (29a)$$

$$\dot{\gamma}_q^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \chi_q} = a_2 n \frac{\chi_q^{n-1}}{\varpi^n(\theta_\sigma^p)} \dot{\lambda}, \quad (29b)$$

$$\dot{\gamma}_\theta^p = \dot{\lambda} \frac{\partial Q}{\partial \theta_\sigma^p} \frac{1}{\chi_q} = a_2 n \frac{-\varpi'(\theta_\sigma^p)}{\varpi^{n+1}(\theta_\sigma^p)} \chi_q^{n-1} \dot{\lambda}, \quad (29c)$$

式中, $\dot{\varepsilon}_v^p$ 为内球应变率, $\dot{\gamma}_q^p$ 和 $\dot{\gamma}_\theta^p$ 分别为广义内剪应力和内应力洛德角所对应的内剪应变率。根据式(29b)和(29c)可得内剪应变率的模为

$$\dot{\gamma}^p = \dot{\lambda} \sqrt{(\dot{\gamma}_q^p)^2 + (\dot{\gamma}_\theta^p)^2}, \quad (30)$$

根据式(29b)和(29c)可得内剪应变率在 π 平面上的洛德角 θ_{ε^p} 为

$$\tan(\theta_{\varepsilon^p} - \theta_\sigma^p) = \frac{\dot{\gamma}_q^p}{\dot{\gamma}_\theta^p} = -\frac{\varpi(\theta_\sigma^p)}{\varpi'(\theta_\sigma^p)} = \Gamma(\theta_\sigma^p), \quad (31)$$

设 Γ^R 为 Γ 的反函数,根据式(31)可得

$$\theta_{\sigma}^p = \Gamma^R \left(\frac{\dot{\gamma}_q^p}{\dot{\gamma}_{\theta}^p} \right) = \Gamma^R(\xi), \quad (32)$$

式中 $\xi = \tan(\theta_{\sigma^p} - \theta_{\sigma}^p)$ 。将 (29a) 和 (29b) 变换并把 θ_{σ}^p 用 $\Gamma^R(\xi)$ 代入得

$$(\chi_p)^n = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{-a_1 n \dot{\lambda}} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (33a)$$

$$(\chi_q)^n = \left[\frac{\dot{\gamma}_q^p}{a_2 n \dot{\lambda}} \varpi^n[\Gamma^R(\xi)] \right]^{\frac{n}{n-1}}, \quad (33b)$$

把 (33a) 和 (33b) 代入到式 (28) 得

$$a_2 \left[\frac{\dot{\gamma}_q^p \varpi[\Gamma^R(\xi)]}{a_2 n \dot{\lambda}} \right]^{\frac{n}{n-1}} - a_1 \left(\frac{-\dot{\varepsilon}_v^p}{a_1 n \dot{\lambda}} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \mu I_1^n + C, \quad (34)$$

由式 (34) 可得

$$n \dot{\lambda} = \sqrt[n-1]{a_2 \left[\frac{\dot{\gamma}_q^p}{a_2} \varpi[\Gamma^R(\xi)] \right]^{\frac{n}{n-1}} - a_1 \left(\frac{-\dot{\varepsilon}_v^p}{a_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}}, \quad (35)$$

根据式 (14) 和式 (26), 可求得 Zienkiewicz-Pande 型 n 阶齐次屈服函数的耗散功为

$$D = n \dot{\lambda} (\mu I_1^n + C), \quad (36)$$

把式 (35) 代入到式 (36) 获得与耗散功相关的耗散函数表达式为

$$D = \sqrt[n]{\mu(I_1^n + C)} \cdot \sqrt[n-1]{a_2 \left[\frac{\dot{\gamma}_q^p}{a_2} \varpi[\Gamma^R(\xi)] \right]^{\frac{n}{n-1}} - a_1 \left(\frac{-\dot{\varepsilon}_v^p}{a_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}}, \quad (37)$$

从式 (37) 可以看出, 即使形式简单的 Zienkiewicz-Pande 型 n 阶齐次屈服函数, 与其相对应的耗散函数 D 也十分复杂。

与经典塑性力学不同, Collins 和 Houlsby 创建的基于热力学的超塑性力学^[8-11] 首先从耗散函数 D 着手, 利用 Ziegler 正交原理和耗散函数 D 的奇异性来获得屈服函数。对于本实例而言, 需先获得耗散函数式 (37), 然后再利用 Ziegler 正交原理求得屈服函数:

$$\chi_p = \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_v^p} = \frac{\sqrt[n]{\mu(I_1^n + C)} \cdot \left(\frac{-\dot{\varepsilon}_v^p}{a_1} \right)^{\frac{1}{n-1}}}{\sqrt[n]{a_2 \left[\frac{\dot{\gamma}_q^p}{a_2} \varpi[\Gamma^R(\xi)] \right]^{\frac{n}{n-1}} - a_1 \left(\frac{-\dot{\varepsilon}_v^p}{a_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}}}, \quad (38a)$$

$$\frac{\chi_q}{\varpi[\Gamma^R(\xi)]} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\gamma}_q^p} = \frac{\sqrt[n]{\mu(I_1^n + C)} \cdot \left\{ \frac{\dot{\gamma}_q^p}{a_2} \varpi[\Gamma^R(\xi)] \right\}^{\frac{1}{n-1}}}{\sqrt[n]{a_2 \left[\frac{\dot{\gamma}_q^p}{a_2} \varpi[\Gamma^R(\xi)] \right]^{\frac{n}{n-1}} - a_1 \left(\frac{-\dot{\varepsilon}_v^p}{a_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}}}, \quad (38b)$$

对式 (38b) 和式 (38a) 等式两边乘 n 次幂后 (38b)

乘以 a_2 减去 (38a) 乘以 a_1 , 再根据式 (32) 用 θ_{σ}^p 替代 $\Gamma^R(\xi)$, 可获得屈服方程为

$$a_2 \left[\frac{\chi_q}{\varpi(\theta_{\sigma}^p)} \right]^n - a_1 (\chi_p)^n = \mu I_1^n + C, \quad (39)$$

式 (39) 与式 (28) 相同, 表明式 (37) 确实是式 (28) (或式 (26)) 所对应的耗散函数。

值得注意的是, 本文式 (37) 是根据屈服方程式 (26) 和耗散空间的 Drucker 塑性公设获得的。但在岩土本构实际建模时, 依据 Collins 和 Houlsby 创建的超塑性力学, 屈服方程一般事先是未知的, 需要通过土工试验获得的耗散函数 D 和 Ziegler 正交原理推导获得。然而, 比较本实例的屈服函数式 (26) 和耗散函数式 (37) 可知, 耗散函数表达式比屈服函数表达式要复杂, 因此根据试验数据总结耗散函数表达式要比屈服函数更加困难, 尤其对于离散性比较大的松散介质岩土更是如此。同时, 超塑性力学在推求屈服函数时需利用一阶欧拉齐次耗散函数的奇异性, 其数学工具是《凸分析》, 理论依据比较抽象, 对工程师的数学修养要求也较高。鉴于此, 目前大多数岩土专家仍然希望采用 Drucker 塑性公设这类更简单的建模方式来研究岩土的塑性本构特性。因此, 如何利用超塑性力学自动满足热力学定律并能同时解释相关联流动法则和非相关联流动法则的优点, 同时避免超塑性力学建模过程中需使用错综复杂的数学分析的缺陷, 是岩土工程界亟待解决的基础理论问题。为此, 本文建议把 Drucker 塑性公设从真实空间移植到耗散空间, 结合耗散空间的耗散功公式判断屈服准则与热力学定理的相容性将是一个较为简单的途径。例如在本实例中, 根据耗散空间的屈服准则式 (26) 和修正的 Drucker 塑性公设, 可得内应变增量与内应力之间的正交关系式 (29a) ~ (29c), 代入到耗散功公式式 (7) 后利用 n 阶齐次函数的性质获得式 (36)。由式 (36) 可知, 若采用相关联流动法则, 则 $g_1(\sigma_{ij}) = \mu I_1^n = 0$ (即常数 $\mu = 0$), 此时式 (36) 变为

$$D = C n \dot{\lambda}, \quad (40)$$

对于砂性材料, 黏聚力 $C = 0$, 由式 (40) 立刻可以得到 $D = 0$, 与热力学第二定理相违背, 这表明假定式 (36) 中的 $g_1(\sigma_{ij}) = \mu I_1^n = 0$ 是错误的, 砂性摩擦材料必须符合非相关联流动法则。对于黏性材料, 尽管 $C \neq 0$, 但是, 当材料存在摩擦效应时, 塑性流动时的能耗与滑移面上的正应力 (或球应力) 密切相关, 但式 (40) 中的耗散功在 $\dot{\lambda}$ 变化过程中却只与 C 有关而与应力状态无关, 这与摩擦变形时耗能与应力状态有关的常识也相矛盾, 故对于黏性摩擦材料, 耗散功式 (36) 中的 μI_1^n 反映的是塑性发生时真实空间球应

力对耗散功的贡献, 故也不可能为零, 因此对于黏性材料该屈服准则也需满足非相关流动法则。这就证明了当材料存在摩擦效应时, 耗散空间中的 Zienkiewicz-Pande 型 n 阶齐次屈服函数 $g_1(\sigma_{ij}) \neq 0$, 因此必须采用非相关流动法则。同时, 根据热力学第二定律, 在任何非负球应力下 D 均必须大于零, 进一步可知 $\mu > 0$ 。

根据弹簧 2 不存在时图 1 力学元件组合图, 把式 (25) 代入式 (26) 可得真实空间的屈服函数 $F(\sigma_{ij})$ 为

$$F = \left[\frac{J_2}{g(\theta_\sigma)} \right]^n - (\mu + a)I_1^n = C, \quad (41)$$

式 (41) 表明真实空间的屈服准则也属于 Zienkiewicz-Pande 型 n 阶齐次屈服函数, 由于 $\mu \neq 0$, 故 $\partial F / \partial \sigma_{ij} \neq \partial Q / \partial \chi_{ij}$, 由式 (28a) ~ (28c) 可知

$$\dot{\varepsilon}_v^p \neq \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_p}; \quad \dot{\gamma}_q^p \neq \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial q} \text{ 和 } \dot{\gamma}_\theta^p \neq \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \theta_\sigma} \frac{1}{q}, \quad (42)$$

式中 $q = \sqrt{3J_2}$ 为真实空间广义剪应力, 式 (42) 表明塑性增量方向不与真实空间的屈服面 F 正交, 即服从不相关流动法则。

图 2 给出了 $C = 0$ 时真实应力空间和耗散应力空间的 Zienkiewicz-Pande 型 n 阶齐次函数屈服面。根据式 (25) 第一式 $\chi_{ij} = \sigma_{ij}$ 可知真实和耗散空间的应力主轴重合, 由于 $\mu \neq 0$, 故真实空间和耗散空间的 Zienkiewicz-Pande 型 n 阶齐次屈服面与子午面交线的倾角不相等。根据耗散空间的 Drucker 塑性公设可知塑性应变增量与耗散空间的屈服面正交, 故其与真实空间的屈服面必不正交, 这再一次证明服从 Zienkiewicz-Pande 型 n 阶齐次屈服准则的摩擦材料其塑性应变增量必须服从非相关流动法则。

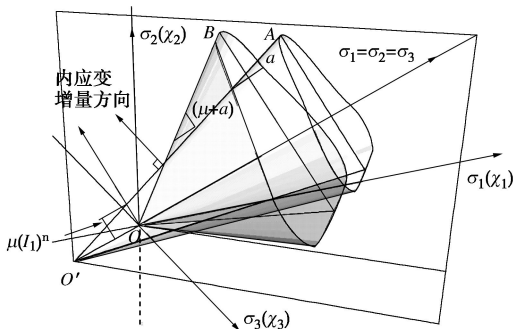


图 2 耗散空间和真实空间的 Zienkiewicz-Pande 型 n 阶齐次屈服面

Fig. 2 Zienkiewicz-Pande's n th homogenous yield surface in dissipative and true spaces

4.2 Lade-Duncan 屈服函数必须服从非相关流动法则的理论证明

根据表 1, 耗散空间的 Lade-Duncan 屈服函数为

$$I_3 - a(I_1^p)^3 = \mu I_1^3, \quad (43)$$

对比式 (43) 和式 (9) 可知 $g_1(\sigma_{ij}, H_a) = \mu I_1^n$, $C(H_a) = 0$ 。设 $Y(\dot{\varepsilon}_1^p, \dot{\varepsilon}_2^p, \dot{\varepsilon}_3^p)$ 是下列方程的正数解:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\sqrt{(3aY + \dot{\varepsilon}_1^p)(3aY + \dot{\varepsilon}_2^p)(3aY + \dot{\varepsilon}_3^p)}}{(3aY + \dot{\varepsilon}_i^p)} = \sqrt{Y}, \quad (44)$$

并令 $\omega(Y, \varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p)$

$$= \sqrt{(3aY + \dot{\varepsilon}_1^p)(3aY + \dot{\varepsilon}_2^p)(3aY + \dot{\varepsilon}_3^p)} - a\sqrt{Y^3}. \quad (45)$$

根据与上文 4.1 节相类似的推导可得

$$D = 3\dot{\lambda}\mu I_1^3 = 3\dot{\lambda}\mu \left[\omega(Y, \varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p) \right]^2 I_1^3. \quad (46)$$

超塑性力学^[8-11]从耗散函数式 (46) 出发, 利用 Ziegler 正交原理建立屈服准则得

$$I_1 = \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_v^p} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_i^p} \frac{\partial \dot{\varepsilon}_i^p}{\partial \dot{\varepsilon}_v^p} = \sqrt{Y} \sqrt{\frac{\mu I_1^3}{\omega(Y, \varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p)}}, \quad (47)$$

$$I_3 = \prod_{i=1}^3 \frac{\partial D}{\partial \dot{\varepsilon}_i^p} = \mu I_1^3 \sqrt{\prod_{i=1}^3 (3aY + \dot{\varepsilon}_i^p)} \frac{1}{\omega(Y, \varepsilon_1^p, \varepsilon_2^p, \varepsilon_3^p)}, \quad (48)$$

在式 (47) 推导过程中利用了 $\partial \omega / \partial Y = 0$ 这一性质。

由式 (48) 和式 (47) 并利用式 (45) 得

$$I_3 - a(I_1^p)^3 = \mu I_1^3, \quad (49)$$

式 (49) 与式 (43) 相同, 表明式 (46) 确实是式 (43) 所对应的耗散函数 D 。然而, 由于式 (46) 中的 Y 需求解式 (44), 故耗散函数表达式式 (46) 明显要比屈服函数表达式式 (43) 复杂得多。这说明对于一般岩土材料, 按超塑性力学从耗散函数出发建立本构关系比较复杂, 而按 Drucker 塑性公设从耗散空间的屈服函数出发建立本构关系相对比较简单。因此笔者建议把 Drucker 塑性公设从真实空间移植到耗散空间, 结合耗散空间耗散功公式判断屈服准则与热力学定理的相容性来建立岩土的本构模型。例如在本实例中, 根据笔者建议的上述思路可以容易地获得耗散函数 $D = 3\dot{\lambda}\mu I_1^3$ (式 (46) 的前一个等式)。根据塑性发生时 $D > 0$ 可得 $\mu > 0$, 即式 (43) 中 $g_1(\sigma_{ij}) = \mu I_1^n \neq 0$, 故耗散空间中的 Lade-Duncan 屈服准则必与真实应力相关, 遵循 Lade-Duncan 屈服准则的岩土材料必须服从非相关流动法则。这就揭示了服从 Lade-Duncan 屈服准则的塑性变形增量必须采用非相关流动法则的热力学依据。

根据式 (25) 和式 (43) 可得真实空间同样属于欧拉齐次函数的 Lade-Duncan 屈服准则:

$$F = I_3 - (a + \mu)I_1^3 = 0. \quad (50)$$

图 3 给出了真实应力空间和耗散应力空间的 Lade-Duncan 屈服面。由于 $\mu > 0$, 真实空间和耗散空间的 Lade-Duncan 屈服面与子午面交线的倾角不相等, 塑性增量方向不可能与这两个面同时垂直, Lade-Duncan 屈服面必然服从非相关流动法则。

上文 4.1~4.2 节给出了 Zienkiewicz-Pande 型齐次屈服准则和 Lade-Duncan 齐次屈服准则的耗散函数表达式的求解推导过程。当岩土服从其它屈服准则时,若该屈服准则的函数形式已知,也可以根据与 4.1~4.2 节相类似的方法求出相应的耗散函数表达式,再结合热力学第二定律判断在塑性变形过程中其耗散功是否大于零。当然也可以根据土工试验直接确定耗散函数表达式,但影响耗散函数的因素较多,耗散功又难以直接测量,与确定屈服准则相比,根据土工试验准确确定耗散函数公式会更为困难。因此笔者建议先根据土工试验确定岩土屈服准则,然而再根据屈服准则确定耗散功并根据热力学第二定律判断塑性功的非负性,这一建模思路对岩土材料更容易实现。

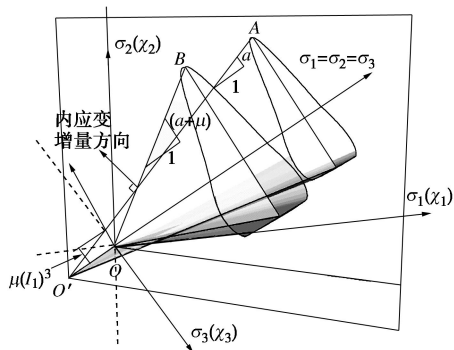


图 3 耗散空间和真实空间的 Lade-Duncan 屈服面

Fig. 3 Lade-Duncan yield surface in dissipative and true spaces

4.3 耗散空间的俞茂宏广义双剪应力屈服函数必须服从非相关联流动法则的理论证明

根据表 1,耗散空间中的俞茂宏广义双剪应力屈服准则为

$$\begin{aligned} & \text{当 } \chi_1(1+\sin\varphi) - \chi_2 \leq \chi_2 - \chi_3(1-\sin\varphi) \text{ 时} \\ & (2\chi_3 - \chi_2 - \chi_1) - \sin\varphi(2\chi_3 + \chi_1 + \chi_2) \\ & = \mu(\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_3) + C, \end{aligned} \quad (51a)$$

$$\begin{aligned} & \text{当 } \chi_1(1+\sin\varphi) - \chi_2 \geq \chi_2 - \chi_3(1-\sin\varphi) \text{ 时} \\ & (2\chi_1 - \chi_2 - \chi_3) - \sin\varphi(2\chi_1 + \chi_2 + \chi_3) \\ & = \mu(2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + C, \end{aligned} \quad (51b)$$

式中, φ 为耗散空间的内摩擦角, C 为广义黏聚力。与上文 4.1 和 4.2 节类似,根据式 (51a)~(51b) 和式 (14) 可得俞茂宏广义双剪应力屈服准则的耗散功公式为

$$\text{当 } \chi_1(1+\sin\varphi) - \chi_2 \leq \chi_2 - \chi_3(1-\sin\varphi) \text{ 时} \\ D = [\mu(\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_3) + C] \cdot \dot{\lambda}, \quad (52a)$$

$$\text{当 } \chi_1(1+\sin\varphi) - \chi_2 \geq \chi_2 - \chi_3(1-\sin\varphi) \text{ 时} \\ D = [\mu(2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) + C] \cdot \dot{\lambda}, \quad (52b)$$

根据与上文 4.1 和 4.2 节相类似的分析,当 $\mu=0$ 时,式 (52a) 和式 (52b) 退化为

$$D = C\dot{\lambda}. \quad (53)$$

式 (53) 表明,此时材料的耗散功在 $\dot{\lambda}$ 变化时只与黏聚力有关而与应力水平无关,这与摩擦滑移时能量耗散与滑移面上的正应力有关相矛盾。特别是对于砂性土 $C=0$,由式 (53) 可知 $D=0$,与塑性发生时热力学第二定律相矛盾。因此式 (52a) 和式 (52b) 中与真实应力有关的常数 $\mu \neq 0$,广义双剪应力屈服面需服从非相关联流动法则。同时为了在任何非负主应力下式 (52a)~(52b) 中的 D 始终为正, μ 需满足 $\mu > 0$ 。

根据式 (25) 和式 (51a)~(51b) 可得真实空间中广义双剪应力屈服准则为

$$\begin{aligned} & \text{当 } \sigma_1(1+\sin\varphi) - \sigma_2 \geq \sigma_2 - \sigma_3(1-\sin\varphi) \text{ 时} \\ & (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) - \mu^*(2\sigma_3 + \sigma_1 + \sigma_2) = C, \end{aligned} \quad (54a)$$

$$\begin{aligned} & \text{当 } \sigma_1(1+\sin\varphi) - \sigma_2 \leq \sigma_2 - \sigma_3(1-\sin\varphi) \text{ 时} \\ & (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) - \mu^*(2\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = C, \end{aligned} \quad (54b)$$

式中, $\mu^* = \mu + \beta$, $\beta = \sin\varphi$ 。

把 $C=0$ 时真实空间和耗散空间的广义双剪应力屈服准则绘成屈服面如图 4 所示。由于 $\mu > 0$, φ 为内摩擦角,同样可得到 $\mu^* > \beta$,故真实空间和耗散空间的屈服面倾角不相等,且耗散空间的倾角小于真实空间倾角。而根据耗散空间 Drucker 塑性公设,内应变增量方向与耗散空间的屈服面正交,故与真实空间屈服面非正交,证明其需服从非相关联流动法则。

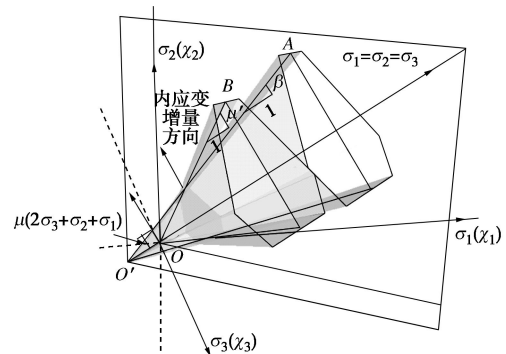


图 4 耗散空间和真实空间的俞茂宏广义双剪应力屈服面

Fig. 4 Yu's generalized double shear yield surface in dissipative and true spaces

5 结 论

本文基于经典塑性力学和热力学超塑性力学的内在联系和各自优点,研究了耗散空间的 Drucker 塑性公设的性质,给出了耗散空间中 n 阶齐次屈服函数的定义,获得了 n 阶齐次屈服面的耗散函数表达式,得出以下结论:

(1) 岩土材料许多常用的与摩擦有关的屈服准则,均属于 n 阶欧拉齐次屈服函数。

(2) 若岩土耗散空间的 n 阶欧拉齐次屈服函数与

真实应力无关, 则其耗散功只与广义黏聚力有关而与材料所处的应力水平无关。特别是当岩土材料属于砂性土时, 由于其广义黏聚力为零, 故其耗散功为零, 与塑性发生时的热力学第二定律相违背。

(3) 为了使塑性发生时岩土材料的耗散功与材料所处的应力状态有关, 特别是对于砂性土时与热力学第二定律不相违背, 必须在耗散空间的 n 阶欧拉齐次屈服函数中引入与真实应力相关的函数项。故服从耗散空间 n 阶齐次屈服函数的塑性应变增量必须采用非相关流动法则。本文实例也证明了本文结论的可靠性。

(4) 当采用相关流动法则时, 真实空间以真实应力表达的屈服准则与耗散空间以内应力表达的屈服准则相同, 故真实空间的 n 阶欧拉齐次屈服函数不宜采用相关流动法则。

根据本文研究结论和建模思路可以分析已有岩土模型是否与热力学第二定律相协调, 同时为岩土新模型的建立提供另一种建模视角, 在实际应用中有较广泛的理论价值和应用前景。

参考文献:

- [1] DRUCKER D C. The continuum theory of plasticity on the macroscale and microscale[J]. *Materials*, 1966, **1**: 873 - 910.
- [2] 陈惠发. 极限分析与土体塑性[M]. 詹世斌, 译. 北京: 高等教育出版社, 1995. (CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. ZHAN Shi-bin, trans. Beijing: Elsevier Scientific Publishing Company, 1975. (in Chinese))
- [3] 沈珠江. 土的弹塑性应力应变关系的合理形式[J]. 岩土工程学报, 1980, **2**(2): 11 - 19. (SHEN Zhu-jiang. Rational form of elasto-plastic stress-strain relation for soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 1980, **2**(2): 11 - 19. (in Chinese))
- [4] 赵彭年. 松散介质力学[M]. 北京: 地震出版社, 1995: 32 - 35. (ZHAO Peng-nian. *Mechanics of media*[M]. Beijing: China Seismic Press, 1995: 32 - 35. (in Chinese))
- [5] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. (ZHENG Ying-ren, SHEN Zhu-jiang, GONG Xiao-nan. *Principle of geotechnical plastic mechanics*[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2002. (in Chinese))
- [6] 杨光华. 岩土材料不符合 Drucker 公设的一个证明[J]. 岩土工程学报, 2010, **32**(1): 144 - 146. (YANG Guang-hua. A proof geotechnical materials not in agreement with Drucker's postulate[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2010, **32**(1): 144 - 146. (in Chinese))
- [7] 龚晓南. 土塑性力学[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1999: 91 - 148. (GONG Xiao-nan. *Soil plasticity*[M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1999: 91 - 148. (in Chinese))
- [8] ZIEGLER H. An introduction to thermomechanics[M]. 2nd ed. North-Holland: Amsterdam, 1983.
- [9] COLLINS I F, HOULSBY G T. Application of thermomechanical principles to the modeling of geotechnical materials[J]. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1997, **45**(3): 1975 - 2001.
- [10] COLLINS I F. Associated and non-associated aspects of the constitutive laws for coupled elastic/plastic materials[J]. *The International Journal of Geomechanics*, 2002(2): 259 - 267.
- [11] HOULSBY G T, PUZRIN A M. A thermomechanical framework for rate-independent dissipative materials with internal functions[J]. *The International Journal of Plasticity*, 2001, **17**: 1147 - 1165.
- [12] 胡亚元. 关于率无关塑性力学和广义塑性力学的评述[J]. 岩土工程学报, 2005, **27**(1): 128 - 131. (HU Ya-yuan, Comment on rate-independent plasticity and generalized plasticity[J]. *China Journal of Geotechnical Engineering*, 2005, **27**(1): 128 - 131. (in Chinese))
- [13] 秦理曼. 基于能量耗散土的本构模型研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2006. (QIN Li-man. *Soil constitutive models based on energy dissipation*[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2006. (in Chinese))
- [14] 赵成刚, 刘艳. 连续孔隙介质土力学及其在非饱和土本构关系中的应用[J]. 岩土工程学报, 2009, **31**(9): 1214 - 1335. (ZHAO Cheng-gang, LIU Yan. Continuum porous medium soil mechanics and its application in constitutive relationship of unsaturated soils[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, **31**(9): 1214 - 1335. (in Chinese))
- [15] 孔亮, 李学丰, 赵占兵. 土体热力学本构模型的改进、验证及有限元分析. 岩土工程学报, 2009, **31**(10): 1595 - 1601. (KONG Liang, LI Xue-feng, ZHAO Zhan-bing. Improvement, verification and FEM analysis of thermomechanical model for soil[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, **31**(10): 1595 - 1601. (in Chinese))
- [16] 胡亚元. 多重耗散函数率无关塑性力学在黏土模型中的应用[J]. 岩土力学, 2005, **26**(增刊 1): 9 - 12. (HU Ya-yuan. Application of multiple dissipation potentials functions rate-independent plasticity model with applications to clay[J]. *Soil and rock mechanics*, 2005, **26**(S1): 9 - 12. (in Chinese))