

# 考慮非达西渗流的比奥固结有限元分析

邓岳保<sup>1, 2</sup>, 谢康和<sup>1, 2</sup>, 李传勋<sup>1, 2</sup>

(1. 浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室, 浙江 杭州 310058; 2. 浙江大学岩土工程研究所, 浙江 杭州 310058)

**摘要:** 在经典 Biot 固结理论基础上, 建立了考虑非达西渗流影响的固结方程, 并用有限元法进行了求解。首先, 引入目前广泛应用的 Hansbo 非达西渗流定律, 简要分析了该模型及其参数情况。通过对孔压梯度进行一定简化, 结合流量连续条件和力的平衡条件, 获得了考虑非达西渗流的 Biot 固结理论控制方程。在此基础上, 基于加权残数法和空间八结点单元, 推导了相应的有限元方程。通过在已有程序基础上编制非达西渗流模块, 实现了对上述有限元方程组的求解。最后通过与解析理论对比, 验证了数值方法的可靠性。结果发现: 相比于考虑非达西渗流的解析理论, 有限元解法误差随非达西渗流控制参数的增大而增大, 但总体误差在 10% 以内; 非达西渗流会延缓固结速率, 且该影响随着非达西渗流参数的增大而变得明显。

**关键词:** Biot 固结理论; 非达西流; 有限元法; 加权残数法

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2012)11-2058-08

作者简介: 邓岳保(1983-), 男, 湖南岳阳人, 博士研究生, 主要研究方向为固结理论数值分析和软土地基处理。E-mail: dengyuebao@yahoo.com.cn。

## Finite element analysis of Biot's consolidation with non-Darcian flow

DENG Yue-bao<sup>1, 2</sup>, XIE Kang-he<sup>1, 2</sup>, LI Chuan-xun<sup>1, 2</sup>

(1. Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering of Ministry of Education, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China; 2. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

**Abstract:** Based on the classic Biot's consolidation theory, the consolidation equation considering non-Darcian flow is set up and then solved numerically with the aid of the finite element method. Firstly, the well-known Hansbo's non-Darcian flow model is incorporated and the selection of the input parameters is analyzed correspondingly. Then, with a further simplification of the hydraulic gradient combining with the flow continuity condition and the force equilibrium condition, the governing equations for the Biot's general consolidation theory with non-Darcian flow are formulated. Based on this, the finite element formulations for the spatial eight-node block element are deduced by means of the weighted residual method. A program considering the effect of the non-Darcian flow is developed based on an existing procedure correspondingly. With this modified program, the obtained governing equations can be solved numerically. Finally, the reliability of the numerical method is verified against the established theoretical solutions. The results show that (1) the difference of the calculated results for the two methods increases with the increase of the non-Darcian flow parameters, and the maximum difference is smaller than 10%; (2) the consolidation rate will slow down when considering the effect of non-Darcian flow, and this effect is significant when the property of the non-Darcian flow is apparent.

**Key words:** Biot's consolidation theory; non-Darcian flow; finite element method; weighted residual method

## 0 引言

固结理论是土力学的基本课题之一。Terzaghi 于 1925 首次提出有效应力原理和一维固结理论, 奠定了现代土力学的基础, 标志着固结理论研究开始。Biot 进一步研究了土体三向变形与孔隙水压力的相互作用, 导出较为完善的流固耦合固结理论<sup>[1]</sup>。Biot 固结理论满足单元体平衡条件、材料本构关系、变形协调条件和水流连续条件, 实现了渗流场和位移场的直接

耦合, 可以考虑固结过程中土体平均总应力随时间变化, 可以揭示 Mandel-Cryer 效应等复杂的土力学现象。

Biot 固结理论提出后, 由于其控制方程的复杂性, 只有少数几种情况可获得解析解答。20 世纪六、七十年代以有限元法为代表的数值计算的迅猛发展为 Biot

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51179170, 50708093)

收稿日期: 2011-10-19

理论广泛应用奠定了基础。Sandhu 等最早提出用有限元法求解 Biot 方程<sup>[2]</sup>, 并基于变分原理得到 Biot 固结理论有限元方程。之后, Christian 等、Hwang 等分别用虚功原理和加权余量法进行了推导<sup>[3]</sup>。在国内, 沈珠江应用变分原理首先把 Biot 固结理论的有限单元法应用于固结分析<sup>[3]</sup>。随后, 殷宗泽、龚晓南、谢康和等分别采用不同的方法亦推导了 Biot 固结理论有限元方程, 并用以分析饱和软黏土地基和砂井地基固结问题<sup>[3-4]</sup>。进入 21 世纪后, Biot 固结理论研究仍在继续, 应用有限元法求解地基固结变形愈来愈广泛。

上述研究中, 考虑到土体复杂的力学特性, 研究者们把主要精力放在土骨架本构模型的研究上, 如应用邓肯-张模型、剑桥模型、莫尔-库仑模型、黏弹性模型和损伤模型等分析地基固结问题。严格来说, Biot 固结理论中的材料本构关系除了土骨架的有效应力-应变本构模型外, 还应考虑孔隙内流体的渗流模型。但后者渗流模型的研究相对而言较少, 已有研究中除考虑渗透系数随孔隙比变化外, 一般都直接使用 Darcy 定律。然而, 早在 1925 年 Terzaghi 就指出, 对于塑性大的黏性土渗流会偏离 Darcy 定律。此后, 有不少学者通过大量的渗透试验等发现<sup>[5-9]</sup>, 软黏土中的渗流并非都符合达西定律, 即属于非达西渗流。为此, 国内外学者相继开展了考虑非达西渗流的固结理论研究。Pascal 等首先开河地研究了考虑起始水力梯度  $i_0$  的一维固结问题, 并给出了差分解<sup>[10]</sup>; 刘慈群提出了该问题的近似解<sup>[11]</sup>。近年来, 刘忠玉等<sup>[12]</sup>、Xie 等<sup>[13]</sup>与李传勋等<sup>[14-16]</sup>发表了多篇相关论文, 标志着关于非达西渗流一维固结理论的研究进入了新阶段。

相对而言, 考虑非达西流的多维 Biot 固结问题和竖井地基固结问题研究较少。在国外, Hansbo 对非达西渗流固结问题进行了开创性和较为系统的工作, 他首次推导了考虑非达西渗流的竖井地基固结解析解, 并将其应用于工程实践<sup>[6, 17-19]</sup>。数值求解方面, Teh 等基于虚功原理推导了考虑非达西渗流的轴对称 Biot 固结有限元方程, 并分析了非达西渗流对固结计算的影响<sup>[20]</sup>。然而, 国内方面相关研究工作未见报道。为此, 本文拟在经典 Biot 固结理论基础上引入 Hansbo 非达西渗流定律, 应用加权残数法进行三维固结方程推导, 并通过自编程序进行分析。

## 1 控制方程

### 1.1 基本假设

本文控制方程推导过程中的基本假定, 除渗流模型采用 Hansbo 非达西渗流定律外, 其余假定同 Biot 固结理论, 如土体均质饱和、小变形、不计惯性力和

体力等。图 1 所示为 Hansbo 非达西渗流模型。该模型中渗流速度  $v$  与孔压梯度  $i$  之间存在如下关系:

$$\begin{cases} v = \kappa i^m & (i < i_l) \\ v = k(i - i_0) & (i \geq i_l) \end{cases} . \quad (1)$$

式中  $i_0$  为起始水力梯度;  $i_l$  为门槛水力梯度。当水力梯度  $i$  小于  $i_l$  时, 流速与梯度间为幂级数关系, 其渗透系数为  $k$ ; 当水力梯度  $i$  大于  $i_l$  时, 流速与梯度间为线性关系, 相应的渗透系数为  $k$ 。上式中, 当  $m=1$ ,  $i_0=0$  时, 式(1)退化为达西定律。

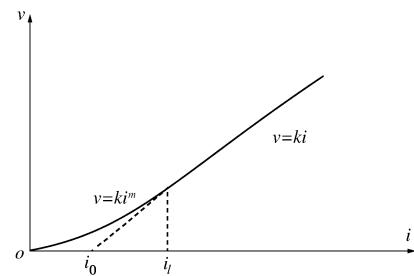


图 1 Hansbo 非达西渗流模型

Fig. 1 Hansbo's non-Darcian flow model

另外, 根据流速及其导数在门槛梯度处的连续条件, 可推导出:  $i_0 = i_l(m-1)/m$ ,  $\kappa = k/(mi_l^{m-1})$ 。进而有

$$\begin{cases} v = ki^m / (mi_l^{m-1}) & (i < i_l) \\ v = k\left(i - \frac{m-1}{m}i_l\right) & (i \geq i_l) \end{cases} , \quad (2)$$

式(2)即为本文所采用的非达西流假定。 $i_l$  和  $m$  为基本控制参数, 其取值范围可参见后文。

### 1.2 平衡方程

取微元体进行分析, 如图 2 所示。当不考虑加速度影响时, 微元体平衡方程、本构方程和小应变情况下几何方程如下<sup>[3-4]</sup>:

$$\begin{cases} [\partial]^T \{\sigma\} = 0 ; \\ \{\sigma'\} = [D]\{\varepsilon\} ; \\ \{\varepsilon\} = -[\partial]\{f\} . \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $\{\sigma\} = [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}]^T$ ;  $\{\sigma'\} = [\sigma'_x \ \sigma'_y \ \sigma'_z \ \tau'_{xy} \ \tau'_{yz} \ \tau'_{zx}]^T$ ;  $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}]^T$ ;  $\{f\} = [u \ v \ w]^T$ ;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  分别为  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向上位移。微分算子  $[\partial]$  及弹性矩阵  $[D]$ :

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}^T ;$$

$$[D] = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & & & \\ d_2 & d_1 & d_2 & & & \\ d_2 & d_2 & d_1 & & & \\ & & & d_3 & & \\ & 0 & & & d_3 & \\ & & & & & d_3 \end{bmatrix};$$

$$d_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, d_2 = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, d_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

另外, 根据太沙基土体有效应力原理, 有

$$\{\sigma\} = \{\sigma'\} + \{M\} p \quad , \quad (4)$$

式中,  $\{M\} = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $p$  为单元体超静孔隙水压力。将几何方程代入本构方程, 然后代入式 (4), 可得

$$\{\sigma\} = -[D][\partial]\{f\} + \{M\} p \quad . \quad (5)$$

将式 (5) 代入平衡方程得

$$[\partial]^T [D][\partial]\{f\} - [\partial]^T \{M\} p = 0 \quad . \quad (6)$$

上式即为用位移和孔压表示的平衡方程矩阵式。

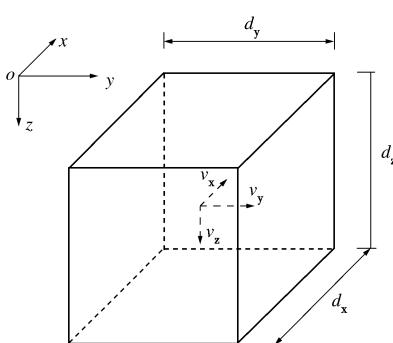


图 2 土体单元示意图

Fig. 2 Schematic diagram of soil unit

### 1.3 渗流连续方程

根据单位时间内从微元体流出的净水量与微元体体积变化相等, 可得

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (7)$$

式中,  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  分别为通过与  $x$ ,  $y$ ,  $z$  垂直面的渗流速度, 见图 2;  $\varepsilon_v$  为土体体积应变。式 (7) 的矩阵形式可写为

$$\{M\}^T [\partial] \{v\} = -\frac{\partial}{\partial t} (\{M\}^T \{\varepsilon\}) \quad . \quad (8)$$

式中,  $\{v\} = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ 。

根据 Hansbo 渗流模型, 对微元体各方向  $\Psi$  ( $\Psi = x, y, z$ ), 有

$$\begin{cases} v_\Psi = S_\Psi k_\Psi |i_\Psi|^{m-1} / (m i_l^{m-1}) & |i_\Psi| < i_l \\ v_\Psi = S_\Psi k_\Psi \left( |i_\Psi| - \frac{m-1}{m} i_l \right) & |i_\Psi| \geq i_l \end{cases} \quad . \quad (9)$$

式中 当孔压梯度方向与微元体各方向的正方向相同

时,  $S_\Psi$  为 +1; 反之, 当孔压梯度方向为负方向时,  $S_\Psi$  为 -1。

根据式 (9), 对渗流速度沿各方向求导, 并且  $\frac{\partial}{\partial \Psi} \left( S_\Psi \left| \frac{\partial p}{\partial \Psi} \right| \right) = \frac{\partial^2 p}{\partial \Psi^2}$  可得

$$\begin{cases} \frac{\partial v_\Psi}{\partial \Psi} = \frac{k_\Psi}{r_w^{m-1} i_l^{m-1}} \left| \frac{\partial p}{\partial \Psi} \right|^{m-1} \frac{\partial^2 p}{\partial \Psi^2} & |i_\Psi| < i_l \\ \frac{\partial v_\Psi}{\partial \Psi} = \frac{k_\Psi}{r_w} \frac{\partial^2 p}{\partial \Psi^2} & |i_\Psi| \geq i_l \end{cases} \quad . \quad (10)$$

另外, 效仿文献[20], 在进一步推导过程中用前一时刻的孔压情况计算当前孔压梯度变量(或渗流速度)。上述简化将对计算结果产生一定影响, 但由于前后相邻的两个时步孔压情况相差不大, 故误差不大。经上文假定后, 式 (10) 可表述为

$$\frac{\partial v_\Psi}{\partial \Psi} = H_\Psi \frac{k_\Psi}{r_w} \frac{\partial^2 p}{\partial \Psi^2} \quad , \quad (11)$$

其中,

$$H_\Psi = \begin{cases} \frac{1}{r_w^{m-1} i_l^{m-1}} \left| \frac{\partial p}{\partial \Psi} \right|^{m-1} & |i_\Psi| < i_l \\ 1 & |i_\Psi| \geq i_l \end{cases} \quad . \quad (12)$$

将式 (11) 代入渗流连续方程 (7), 可得

$$H_x \frac{k_x}{r_w} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + H_y \frac{k_y}{r_w} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + H_z \frac{k_z}{r_w} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (13a)$$

或写成

$$\{M\}^T [\partial] [H] [\partial]^T \{M\} p - \frac{\partial}{\partial t} \{M\}^T [\partial] \{f\} = 0 \quad . \quad (13b)$$

式中  $H_x$ ,  $H_y$  和  $H_z$  计算式见式 (12); 渗流控制矩阵

$$[H] = \begin{bmatrix} H_x & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{bmatrix}; \text{ 渗流系数矩阵为 } [k] =$$

$$\frac{1}{\gamma_w} \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}.$$

### 1.4 边界条件

静力 Biot 固结问题的边界条件可概况为 4 类, 即位移边界、应力边界、孔压(或流势)边界和流速(或流量)边界<sup>[3-4]</sup>。前两类边界条件同一般力学问题, 不再赘述; 孔压边界条件通常是指排水面上超静孔压为零; 流速边界则为完全不透水面上流速为零。另外, 对于图 2 所示的微元体, 假设任意边界面  $S$  上, 法向流速为  $v_n$ , 则流速边界条件可表示为

$$\bar{l}v_x + \bar{m}v_y + \bar{n}v_z = v_n \quad , \quad (14)$$

式中,  $\bar{l}$ ,  $\bar{m}$  和  $\bar{n}$  分别表示边界面  $S$  与  $x$ ,  $y$  和  $z$  轴正向夹角的方向余弦。

## 2 有限元方程推导与实现

上述控制方程建立后, 可通过变分法、虚功法或加权残数法等来建立有限元求解方程。下文将基于伽辽金加权残数法进行推导。对于本文考虑非达西渗流的 Biot 固结问题, 首先要选择合适的位移与孔压模式。

### 2.1 位移与孔压模式选取

对于三维 Biot 固结问题, 可采用空间 8 结点等参单元进行离散。单元示意图如图 3, 图中  $2a$ ,  $2b$  和  $2c$  分别代表微元体  $x$ ,  $y$  和  $z$  方向尺寸。其单元位移函数和孔压函数如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} = \sum_{i=1}^8 N_i u_i, \\ \tilde{v} = \sum_{i=1}^8 N_i v_i, \\ \tilde{w} = \sum_{i=1}^8 N_i w_i, \\ \tilde{p} = \sum_{i=1}^8 N_i p_i. \end{array} \right. \quad (15)$$

式中  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{p}$  为单元内任一点位移和孔压的近似值;  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$ ,  $p_i$  为单元结点位移和孔压;  $N_i$  为空间八结点单元形函数, 其表达式为

$$N_i = \frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i) \quad (i=1,2,\dots,8). \quad (16)$$

式中  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  为局部坐标系;  $\xi_i$ ,  $\eta_i$ ,  $\zeta_i$  为结点局部坐标。式(15)写成矩阵形式如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{f\} \approx \{\tilde{f}\} = \{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}^T = [N] \{\delta\}^e, \\ p \approx \tilde{p} = [\bar{N}] \{p\}^e. \end{array} \right. \quad (17)$$

式中  $\{\delta\}^e = [\delta_1^T, \delta_2^T, \dots, \delta_8^T]^T$ ;  $\delta_i = [u_i, v_i, w_i]^T$ ;  $i=1, 2, \dots, 8$ ;  $\{p\}^e = [p_1, p_2, \dots, p_8]^T$ ;  $[N] = [N_1 I, N_2 I, \dots, N_8 I]$ ,  $I$  为三阶单元矩阵;  $[\bar{N}] = [N_1, N_2, \dots, N_8]$ 。

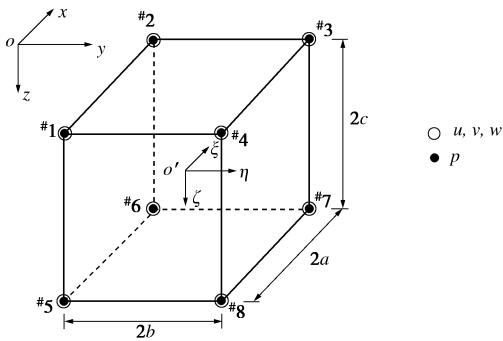


图 3 空间八结点单元

Fig. 3 Spatial eight-node element

### 2.2 平衡方程的离散

根据加权残数法, 平衡方程(6)在单元内部残数

$$R_{lf}^e = [\partial]^T [D][\partial] \{\tilde{f}\} - [\partial]^T \{M\} \tilde{p} \quad , \quad (18)$$

以空间八结点单元形函数  $N_i$  作为权函数, 可得消除单元内部残差的方程:

$$\iiint_{V^e} N_i R_{lf}^e dV = 0 \quad (i=1,2,\dots,8) \quad . \quad (19)$$

对方程(19)在各结点全部展开, 并结合应力边界条件, 整理后可得离散后增量形式的平衡方程<sup>[4]</sup>:

$$[K_e] \{\Delta\delta\}^e + [K_c] \{\Delta p\}^e = \{\Delta R_f\}^e \quad . \quad (20)$$

式中  $\{\Delta R_f\}^e = \iint_{S^e} [N]^T \{\Delta F\}^e dS$ ;  $\{\Delta F\}^e = \{\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z\}^T$ ;  $[K_e] = \iiint_{V^e} [B]^T [D][B] dV$ ;  $[K_c] = \iiint_{V^e} [B]^T \{M\} [\bar{N}] dV$ 。另外,  $[B] = -[\partial][B_1, B_2, \dots, B_8]$ , 而  $[B_i]$  为  $6 \times 3$  阶矩阵, 且有  $[B_i] = -[\partial]N_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 8$ 。

### 2.3 连续方程的离散

根据加权残数法, 连续方程(13a)、(13b)在单元内部残数为

$$R_{lq}^e = \frac{\partial}{\partial t} \{M\}^T [\partial] \{\tilde{f}\} - \{M\}^T [\partial][H][k][\partial]^T \{M\} \tilde{p} \quad . \quad (21)$$

以空间八结点单元形函数  $N_i$  作为权函数, 可得消除单元内部残差的方程:

$$\iiint_{V^e} N_i \left( \frac{\partial}{\partial t} \{M\}^T [\partial] \{\tilde{f}\} - \{M\}^T [\partial][H][k][\partial]^T \{M\} \tilde{p} \right) dV = 0. \quad (22)$$

对方程(22)中左边第 1 项, 有

$$\iiint_{V^e} N_i \left( \frac{\partial}{\partial t} \{M\}^T [\partial] \{\tilde{f}\} \right) dV = \iiint_{V^e} N_i \{M\}^T [\partial][N] \{\dot{\delta}\} dV, \quad (23a)$$

将式(22)中左边第 2 项展开, 根据式(14), 并利用分步积分法, 可得

$$\begin{aligned} & -\iiint_{V^e} N_i \left( \{M\}^T [\partial][H][k][\partial]^T \{M\} \tilde{p} \right) dV \\ & = \iint_{S^e} N_i v_n dS + \iiint_{V^e} \{\nabla\}^T N_i [H][k] \{\nabla\} [\bar{N}] \{p\}^e dV, \end{aligned} \quad (23b)$$

式中,  $\{\nabla\} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T$ 。结合式(22)、(23a)、(23b)可得

$$\begin{aligned} & \iint_{S^e} N_i v_n dS + \iiint_{V^e} \{\nabla\}^T N_i [H][k] \{\nabla\} [\bar{N}] \{p\}^e dV \\ & \{p\}^e dV = -\iint_{S^e} N_i v_n dS, \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad . \end{aligned} \quad (24)$$

方程(24)对任一结点均成立, 将其在 8 个结点上全部展开, 可得 8 个方程, 写成矩阵形式为

$$[K_c]^T \{\dot{\delta}\}^e - [\bar{K}_s] \{p\}^e = \{R_q\}^e \quad . \quad (25)$$

式中  $\{\dot{\delta}\}^e = \partial\{\dot{\delta}\}^e / \partial t$ ;  $[\bar{K}_s] = \iiint_{V^e} [B_s]^T [H] [k] [B_s] dV$ ,

其中  $[B_s] = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}^T [N_1, N_2, \dots, N_8]$ ,  $\{R_q\}^e =$

$\iint_{S^e} [\bar{N}]^T v_n dS$ ,  $\{R_q\}^e$  为单元等效结点流量列阵。对于

不排水边界, 有  $v_n=0$ , 则  $\{R_q\}^e=0$ 。将连续方程 (25) 两边关于  $t$  从  $t_j$  到  $t_{j+1}$  积分 (下标分别表示第  $j$ 、 $j+1$  时刻), 即

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} [K_c]^T \{\dot{\delta}\}^e dt - \int_{t_j}^{t_{j+1}} [\bar{K}_s] \{p\}^e dt = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \{R_q\}^e dt, \quad (26a)$$

且利用近似式

$$\begin{cases} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \{p\}^e dt = \Delta t (\{p\}_n^e + \theta \{\Delta p\}^e), \\ \int_{t_j}^{t_{j+1}} \{R_q\}^e dt = \Delta t \{R_q\}_n^e, \end{cases} \quad (26b)$$

可得

$$[K_c]^T \{\Delta \delta\}^e - \theta \Delta t [\bar{K}_s] \{\Delta p\}^e = \{\Delta \bar{R}_p\}^e. \quad (27)$$

其中,  $\{\Delta \bar{R}_p\}^e$  为等效结点流量增量列阵, 计算式如下:

$$\{\Delta \bar{R}_p\}^e = \Delta t \left[ \{R_q\}_j^e + [\bar{K}_s] \{p\}_j^e \right]. \quad (28)$$

式 (20)、(27) 即为离散后考虑非达西渗流的 Biot 固结理论有限元方程。

## 2.4 计算思路与程序编制

上文推导过程表明, 基于非达西流与达西流的 Biot 固结有限元求解方程不同之处是在计算渗流矩阵  $[\bar{K}_s]$  时多出一项渗流控制矩阵  $[H]$ 。根据式 (1)、(2)、(13), 当取合适的参数时, 非达西流退化为达西流, 矩阵  $[H]$  退化为单元矩阵, 相应的渗流矩阵退化为达西流情况。由此, 上述计算过程可完全等同达西流情况, 仅在计算渗流矩阵时, 需要通过前一时刻的孔压情况确定当前渗流控制矩阵。其具体求解思路如下。

在局部坐标系下(见图 3), 当单元各结点孔压  $p_i^j$  已知 ( $j$  表当前时刻), 则下一时刻孔压梯度  $i^{j+1}$  可近似按下式计算:

$$\begin{aligned} i_x^{j+1} &= \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial p^j}{\partial x} = \frac{(p_1^j + p_4^j + p_5^j + p_8^j) - (p_2^j + p_3^j + p_6^j + p_7^j)}{8\gamma_w a}, \\ i_y^{j+1} &= \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial p^j}{\partial y} = \frac{(p_1^j + p_2^j + p_5^j + p_6^j) - (p_3^j + p_4^j + p_7^j + p_8^j)}{8\gamma_w b}, \\ i_z^{j+1} &= \frac{1}{\gamma_w} \frac{\partial p^j}{\partial z} = \frac{(p_1^j + p_2^j + p_3^j + p_4^j) - (p_5^j + p_6^j + p_7^j + p_8^j)}{8\gamma_w c}. \end{aligned} \quad (29)$$

当各方向的孔压梯度确定后, 即可按式 (12) 确定  $H_x$ 、 $H_y$  和  $H_z$ , 进而获得下一时刻渗流控制矩阵  $[H]$ 。另外, 考虑到初始时刻地基中孔压梯度变化最大, 可

近似认为此时渗流均符合达西渗流情况, 故设置矩阵  $[H]$  初始值为单位矩阵<sup>[20]</sup>。

本文在谢康和 PDSS (平面变形、空间渗流) 程序和 SDSS (空间变形、空间渗流)<sup>[4]</sup> 程序基础上, 嵌入非达西渗流模块, 实现了可考虑非达西渗流的 Biot 固结理论求解。该程序可用于天然地基和竖井地基的考虑达西与非达西渗流分析。下文将以 Hansbo 竖井解析理论进行对比来验证本文数值解法的可靠性。

## 3 验证与分析

### 3.1 算例及计算工况

本文采用 Hird 等和 Teh 等用过的单井地基算例进行分析<sup>[20]</sup>。其基本尺寸如下: 单井圆柱体影响域直径  $D_e=3$  m, 涂抹区直径  $d_s=0.2$  m, 竖井直径  $d_w=0.1$  m。本文根据面积等效原则将其转换为长方体影响域<sup>[7]</sup>。等效后的单井地基及相应尺寸  $B_e$ 、 $b_s$  和  $b_w$  如图 4 所示 (两者之间转换系数为 0.886)。竖井处理深度  $H=5$  m。网格划分方面, 平面内网格划分数为  $17 \times 17$ , 深度方向网格数为 11, 八结点块体单元总数为 3179。边界条件包括位移边界和排水边界: 其中位移边界为顶部自由, 底部及四周滑动; 排水边界为顶部、底部和四周均不透水, 仅地基表面竖井口透水。排水边界按上述方法处理的目的是为了与 Hansbo 竖井解析理论相对照。

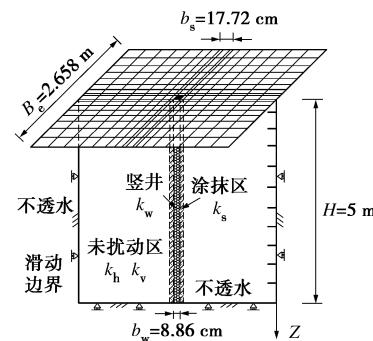


图 4 算例示意图

Fig. 4 Calculation example

另外, 为了能与解析解进行对比, 材料参数亦进行了简化。一方面, 不考虑井与井周土体力学性质差异, 均设为线弹性的各向同性力学体, 力学参数为弹性模量  $E$  和泊松比  $\nu$ ; 另一方面, 考虑到解析解是在一维压缩情况下获得, 故设泊松比  $\nu=0$ 。渗透性方面, 竖井( $k_w$ )、涂抹区( $k_s$ )、未扰动区竖向( $k_v$ )与水平向( $k_h$ )的渗透线性段渗透系数取<sup>[17]</sup>:  $k_h/k_v=4$ ,  $k_h/k_s=4$  和  $k_w/k_h=10^4$ 。非达西渗流控制参数  $m$  和  $i_l$  取值方面, Hansbo 和 Dubin 等均认为  $m=1.5$  能与实测结果吻合<sup>[18]</sup>, Teh 等在分析中取  $1.2 \sim 1.5$ <sup>[20]</sup>; 关于  $i_l$  取值, Hansbo 的建议值为  $4 \sim 10$ , Dubin 等的建议值为  $8 \sim 35$ , 本文

取 5, 10 和 20。基于以上研究成果, 本文给出表 1 所示 6 种计算工况。

表 1 计算工况与参数取值

Table 1 Calculation conditions and parameters

计算工况	工况 1	工况 2	工况 3	工况 4	工况 5	工况 6
$m$	1.2	1.2	1.2	1.5	1.5	1.5
$i_l$	5	10	20	5	10	20

渗透系数  $k_h/k_s=4.0$ ,  $k_h/k_v=4.0$ ,  $k_w/k_h=10^4$ ,  $k_h=10^{-8}$  m/s;  
数和力  $E=10.0$  MPa,  $\nu=0.0$ ; 地基顶部瞬时作用荷载  
学参数  $q_0=100$  kPa

### 3.2 解析理论

在验证本文数值方法计算结果可靠性的同时, 还将进行达西渗流与非达西渗流对比分析。下文给出 Hansbo 关于达西与非达西渗流解析解<sup>[18]</sup>。对于 Darcy 渗流情况, 根据 Hansbo (1981) 坚井解析理论, 地基深度  $z$  处竖井径向渗流平均固结度公式为

$$\bar{U}_h = 1 - \exp\left(-\frac{8c_h t}{\mu D_e^2}\right) \quad (30)$$

式中  $c_h = \frac{k_h}{m_v \gamma_w}$ ;  $m_v = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$ ;  $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ ;  $\mu_1 = \frac{D_e^2}{D_e^2 - d_w^2} \left[ \ln\left(\frac{D_e}{d_s}\right) + \frac{k_h}{k_s} \ln\left(\frac{d_s}{d_w}\right) - \frac{3}{4} \right]$ ;  $\mu_2 = \frac{\pi k_h}{q_w} z (2H - z) \left(1 - \frac{d_w^2}{D_e^2}\right)$ ;  $\mu_3 = \frac{d_s^2}{D_e^2 - d_w^2} \left(1 - \frac{d_s^2}{4D_e^2}\right) + \frac{k_h}{k_s} \frac{d_w^2}{D_e^2 - d_w^2} \left(\frac{d_s^4 - d_w^4}{4D_e^2 d_w^2} - \frac{d_s^2}{d_w^2} + 1\right)$ ;  $q_w = k_w \frac{\pi d_w^2}{4}$ 。

对于非达西渗流情况, 根据 Hansbo 理论<sup>[17-19]</sup>, 相应的固结度计算公式为

$$\bar{U}_h = 1 - \left[ 1 + \frac{\lambda t}{\alpha D_e^2} \left( \frac{\Delta \bar{u}_0}{D_e \gamma_w} \right)^{m-1} \right]^{1/(1-m)} \quad (31)$$

式中  $\lambda = \frac{\kappa_h}{\gamma_w m_v}$ ;  $\alpha = \frac{m^{2m} \beta^m}{4(m-1)^{m+1}}$ ;  $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4$ ;

$$\beta_1 = \frac{1}{3m-1} - \frac{m-1}{m(3m-1)(5m-1)} - \frac{(m-1)^2}{2m^2(5m-1)(7m-1)};$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\kappa_h}{\kappa_s} - 1 \right) \left( \frac{D_e}{d_s} \right)^{(1/m-1)} - \frac{\kappa_h}{\kappa_s} \left( \frac{D_e}{d_w} \right)^{(1/m-1)} \right]; \frac{\kappa_h}{\kappa_s} = \frac{k_h}{k_s};$$

$$\beta_3 = \left( \frac{1}{2m} - \frac{1}{3m-1} \right) \left[ \left( \frac{\kappa_h}{\kappa_s} - 1 \right) \left( \frac{D_e}{d_s} \right)^{(1/m-3)} - \frac{\kappa_h}{\kappa_s} \left( \frac{D_e}{d_w} \right)^{(1/m-3)} \right];$$

$$\beta_4 = \frac{\kappa_h}{2q_w} \pi z (2l - z) \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left( \frac{D_e}{d_w} \right)^{(1/m-1)} \left(1 - \frac{d_w^2}{D_e^2}\right)^{1/m};$$

$$\kappa_h = \frac{k_h}{mi_l^{m-1}}; t \text{ 为时间}; \Delta \bar{u}_0 \text{ 为初始孔压}, \text{ 对于瞬时加}$$

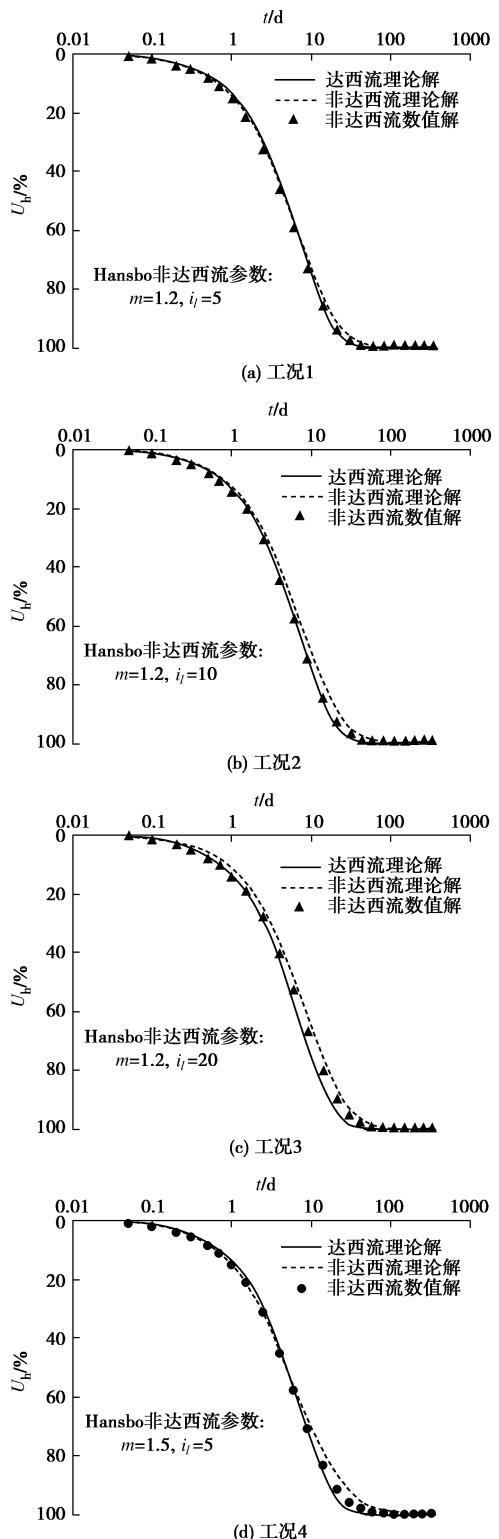
载,  $\Delta \bar{u}_0 = q_0$ 。

### 3.3 结果对比与分析

6 种计算工况下, 达西流理论解、非达西流理论解和本文非达西流有限元求解结果对比如图 5 所示。图中, 平均固结度  $U_h$  指地基总体水平向平均固结度。

对于解析理论, 有

$$U_h = \frac{1}{H} \int_0^H \bar{U}_h dz \quad (32)$$



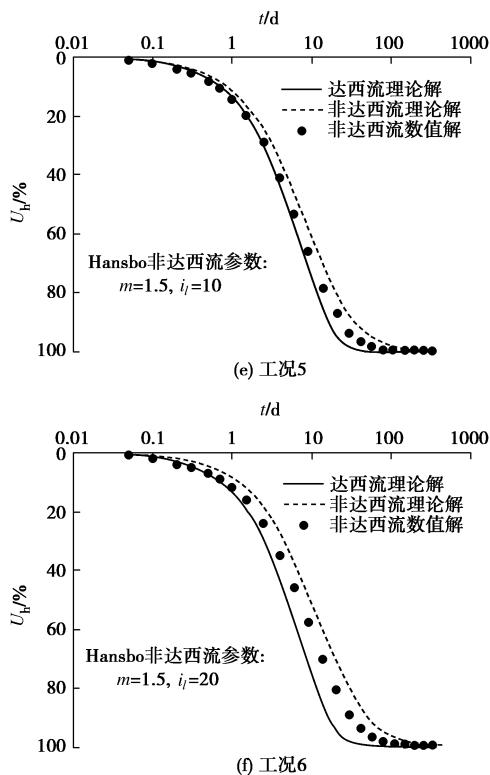


图 5 不同工况下数值方法与解析理论对比

Fig. 5 Results of numerical methods and analytical solutions under different conditions

对于本文有限元求解, 平均固结度  $U_h$  为各结点孔压均值与外荷载  $q_0$  的比值, 即

$$U_h = \frac{1 - \left( \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} p_i \frac{V_i}{\bar{V}_e} \right)}{q_0}, \quad (33)$$

式中, 单元平均体积  $\bar{V}_e = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} V_i$ ,  $V_i$  为单元体积,  $N_e$  为单元数。

工况 1~工况 6 的非达西渗流解析理论与数值方法最大误差分别为 2.62%, 4.94%, 5.14%, 4.53%, 8.08%, 9.74%。

分析图 5 及不同工况下非达西流有限元法与解析法最大误差对比, 可以得出如下关于考虑非达西渗流计算相关的结论: ①分别对比工况 1~工况 3 和工况 4~工况 6 的误差情况可知, 当  $m$  一定时, 随着  $i_l$  增大, 有限元解法与解析解法误差增大; ②分别对比工况 1 与 4、工况 2 与工况 5 和工况 3 与工况 6 的误差情况可知, 当  $i_l$  一定时, 随着  $m$  增大, 有限元解法与解析解法误差增大; ③6 种计算工况下两种方法的最大误差均不超过 10%。

另外, 由图 5 还可知, 有限元法计算结果介于达西渗流与非达西渗流计算结果之间; 考虑非达西渗流对固结度计算结果有较明显的影响, 这种影响随着参数  $m$  或  $i_l$  的增大而增大; 6 种工况中, 达西渗流与非

达西渗流计算结果最大误差达到 20%。

值得一提的是, Hansbo 非达西渗流理论为近似解<sup>[18]</sup>。例如, 固结度公式 (31) 中的参数  $i_l$  与竖井间距和初始孔压等均相关, 其与数值方法中一般的孔压梯度并非完全一致<sup>[20]</sup>。上述近似性是本文方法与理论解存在误差的原因之一。另外, 本文数值方法中利用当前时刻孔压确定下一时刻孔压梯度的做法亦是误差源。

## 4 结 论

通过引用 Hansbo 非达西渗流模型, 建立了考虑非达西渗流的 Biot 固结理论控制方程。然后, 基于加权残数法推导了有限元求解表达式, 并自编了相应的程序进行分析。通过与考虑达西、非达西渗流的竖井解析理论进行对比, 验证了本文数值方法的可靠性, 并获得以下 3 点结论。

(1) 随着非达西渗流控制参数  $m$  和  $i_l$  增大, 本文有限元解法与解析理论的误差随之增大。

(2) 6 种计算工况下, 本文数值法与解析理论最大误差在 10% 以内。

(3) 考虑非达西渗流对固结度计算结果有较显著的影响, 建议实际工程分析中, 通过引入考虑非达西渗流固结理论来获得更可靠的预测结果。

## 参 考 文 献:

- [1] BIOT M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. J Appl Physics, 1941(12): 155–164.
- [2] SANDHU R S, WILSON E L. Finite element analysis of seepage in elastic media[J]. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 1969, 95: 641–652.
- [3] 朱百里, 沈珠江. 计算土力学[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990. (ZHU Bai-li, SHEN Zhu-jiang. Computational soil mechanics[M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1990. (in Chinese))
- [4] 谢康和, 周 健. 岩土工程有限元分析理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2002. (XIE Kang-he, ZHOU Jian. Theory and application of the finite element method in geotechnical engineering[M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese))
- [5] HANSBO S. Consolidation of clay, with special reference to vertical sand drains[J]. Swedish Geotechnical Institute, 1960, 18: 45–50.
- [6] HANSBO S. Deviation from Darcy's law observed in one-dimensional consolidation[J]. Géotechnique, 2003, 53(6): 601–605.
- [7] MILLER R J, LOW P F. Threshold gradient for water flow in

- clay system[J]. Proceedings of Soil Science Society of American, 1963, **27**(6): 605 - 609.
- [8] DUBIN B, MOULIN G. Influence of a critical gradient on the consolidation of clays[C]// Consolidation of Soils: Testing and Evaluation (STP 892), ASTM, 1985: 354 - 377.
- [9] SWARTZENDRUBER D. Modification of Darcy's law for the flow of water in soils[J]. Soil Science, 1962, **93**: 22 - 29.
- [10] PASCAL F, PASCAL H, MURRAY D W. Consolidation with threshold gradients[J]. International Journal for Numerical and Analytical Method in Geomechanics, 1981, **5**: 247 - 261.
- [11] 刘慈群. 有起始比降固结问题的近似解[J]. 岩土工程学报, 1982, **4**(3): 107 - 109. (LIU Ci-qun. The approximate solution of consolidation problem with threshold gradients[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1982, **4**(3): 107 - 109. (in Chinese))
- [12] 刘忠玉, 孙丽云, 乐金朝, 等. 基于非 Darcy 渗流的饱和黏土一维固结理论[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, **28**(5): 973 - 979. (LIU Zhong-yu, SUN Li-yun, YUE Jin-chao, et al. One-dimensional consolidation theory of saturated clay based on non-Darcy flow[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, **28**(5): 973 - 979. (in Chinese))
- [13] XIE Kang-he, WANG Kun, WANG Yu-lin, et al. Analytical solution for one-dimensional consolidation of clayey soils with a threshold gradient[J]. Computers and Geotechnics, 2010, **37**(4): 487 - 493.
- [14] 李传勋, 谢康和, 王坤, 等. 基于指数形式渗流定律的软土一维固结分析[J]. 土木工程学报, 2011, **44**(8): 111 - 118. (LI Chuan-xun, XIE Kang-he, WANG Kun, et al. One-dimensional consolidation analysis considering exponential flow law for soft clays[J]. China Civil Engineering Journal, 2011, **44**(8): 111 - 118. (in Chinese))
- [15] 李传勋, 谢康和, 卢萌盟, 等. 基于非牛顿指数描述的非达西渗流一维固结分析[J]. 岩土力学, 2011, **32**(1): 281 - 287. (LI Chuan-xun, XIE Kang-he, LU Meng-meng, et al. Analysis of one-dimensional consolidation with non-Darcy flow described by non-Newtonian index[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(1): 281 - 287. (in Chinese))
- [16] 李传勋, 谢康和, 卢萌盟, 等. 变荷载下基于指数形式渗流的一维固结分析[J]. 岩土力学, 2011, **32**(2): 553 - 559. (LI Chuan-xun, XIE Kang-he, LU Meng-meng, et al. One-dimensional consolidation analysis considering exponential flow law and time-depending loading[J]. Rock and Soil Mechanics, 2011, **32**(2): 553 - 559. (in Chinese))
- [17] HANSBO S. Aspects of vertical drain design: Darcian or non-Darcian flow[J]. Géotechnique, 1997, **47**: 983 - 992.
- [18] HANSBO S. Consolidation equation valid for both Darcian and non-Darcian flow[J]. Géotechnique, 2001, **51**(1): 51 - 54.
- [19] HANSBO S. Deviation from Darcy's law observed in one-dimensional consolidation[J]. Géotechnique, 2003, **53**(6): 601 - 605.
- [20] TEH Cee Ing, NIE Xiao-yan. Coupled consolidation theory with non-Darcian flow[J]. Computers and Geotechnics, 2002, **29**: 169 - 209.