

# 基于复数表达的随机渗流研究

宋会彬, 詹美礼, 盛金昌, 罗玉龙, 黄青富

(河海大学水利水电学院, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 以复数形式表示渗透系数, 将其变异值设置为复数的虚部。利用有限单元法, 通过求解复系数线性方程组计算随机渗流问题, 并编制相应程序, 计算结点水头和水头变异值。在应用蒙特卡罗法进行渗流计算时, 仅考虑帷幕渗透系数的变异, 并假设其服从均匀分布。选取水头均值与水头标准差为蒙特卡罗法渗流计算的统计特征值。从数值方面分析了基于复数表达的随机渗流计算所得的水头值及水头变异值与蒙特卡罗法计算的水头均值及标准差之间的关系, 验证了所用方法在模拟随机渗流场方面的正确性和可行性。为大型复杂问题的大变异性求解提供了方便快捷的计算方法。

**关键词:** 蒙特卡罗法; 复数; 渗流计算; 变异

中图分类号: TU46 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2012)11-2043-07

作者简介: 宋会彬(1985-), 女, 辽宁铁岭人, 博士研究生, 主要从事工程渗流及地下水研究。E-mail: shbsgf@163.com.

## Stochastic seepage based on complex expression

SONG Hui-bin, ZHAN Mei-li, SHENG Jin-chang, LUO Yu-long, HUANG Qing-fu

(College of Conservancy and Hydropower, Hohai University, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** The permeability coefficient here is expressed in form of complex variable, the imaginary part of which is the variation value. The node head value and its variation value are calculated by self-compiling program according to the solution of linear equations with complex coefficient based on the finite element method. The permeability coefficient of curtain is considered as random variable and to be in uniform distribution by using Monte Carlo stochastic finite element method to calculate the stochastic seepage filed. The head mean value and the head standard deviation are used to represent the statistical values of the calculated results obtained by the Monte Carlo stochastic finite element method. The calculated values of head value and the head variation are compared with the head mean value and the head standard deviation by numerical simulation. The results demonstrate that the seepage calculation with permeability coefficient expressed in complex variable is correct and feasible. This study provides a convenient method for solving large complex problem under large variability conditions.

**Key words:** Monte Carlo method; complex; seepage calculation; variation

## 0 引言

渗流问题是水利工程中最为常见的问题之一, 渗流对建筑物, 特别是土质建筑物及其他基会产许多不利的影响, 因此在水工建筑物设计和运行管理中, 要进行渗流计算。渗流计算主要是为获得关键部位的渗透梯度、渗流流速等。实际渗流场受到许多随机因素的制约和影响, 从而具有一定程度的不确定性。关于渗流场随机性的研究, 国内外已经有很多公认的研究成果。如Yeh等<sup>[1-2]</sup>最先对非饱和渗流的随机性进行了解析方面的研究。Tsao等<sup>[3]</sup>对深层土滑裂面上水头势的随机波动作了研究, 并由此得出了导水系数的隐式表达。Zhang等<sup>[4-6]</sup>对非饱和稳定渗流以及非稳定渗流的随机模型进行了系统的研究。Roy等<sup>[7]</sup>给出了饱和渗流的谱随机分析法。盛金昌等<sup>[8]</sup>基于等效连续介质

模型, 应用Taylor展开法分析裂隙岩体渗透性的随机性与裂隙基本几何参数随机性的关系, 然后用一阶Taylor展开随机有限元法分析裂隙岩体渗流场的随机性。Yang等<sup>[9]</sup>运用Karhunen Loeve 展开和摄动方法相结合的随机数值方法分析饱和-非饱和流问题。何翔等<sup>[10]</sup>采用精细积分法对Biot 方程进行时间离散, 提出了基于精细积分的岩体渗流-应力耦合瞬态渗流场分析的精细积分有限元法。李锦辉等<sup>[11]</sup>推导了三维稳定渗流的随机有限元列式, 并应用于随机渗流计算。王亚军等<sup>[12]</sup>采用Monte Carlo法研究了长江堤防在设置了防渗措施的复杂边界条件下的三维渗流场的随机

性。但是该法需要大量的随机抽样，计算量大，所以应用受到一定的限制。王媛等<sup>[13]</sup>推导了三维非稳定渗流的随机有限元列式，结合一阶Taylor级数展开随机有限元法，推导出渗流场中流量的均值和方差的计算公式。此方法在考虑渗透介质的不均匀性方面，渗透系数的变异系数最大值取到0.3，这与实际工程情况有一定差距。基于以上各方法的不足之处，本文从工程实际应用出发，考虑复杂问题的大变异性渗流计算问题，采用复数形式表达渗透系数，以其虚部表示变异，把以复数表达的渗透系数代入渗流方程即可得以复数表达的水头值，其虚部表示水头的变异值。分析比较了渗透系数设置不同变异值的情况下，复数表示渗透系数渗流计算得出的水头及其变异值与蒙特卡罗法计算所得水头均值和标准差的关系，并在数值方面进行了验证。虽然本文所用方法理论方面还不成熟但数值验证表明本方法计算量小，参数的变异范围大，在大型复杂问题的大变异性求解方面具有明显优势。

## 1 蒙特卡罗法

蒙特卡罗方法<sup>[14]</sup>也称为随机模拟方法，有时也称作随机抽样技术或统计试验方法，是一种具有独特风格的数值计算方法。它的基本思想是，为了求解一个问题，首先建立一个概率模型或随机过程，使它的参数等于问题的解。然后通过对模型或过程的观察或抽样试验来计算所求参数的统计特征，最后给出所求解的近似值，而解的精确度可用估计值的标准误差来表示。应用蒙特卡罗法进行随机渗流计算时，首先假定渗透系数具有一定的概率分布规律，根据选定的分布规律，进行随机抽样，然后进行渗流计算得出各渗透系数下的水头值，再对水头值进行数据统计，最终得出水头的均值与标准差。蒙特卡罗法计算简单，准确性高，是一种公认的较好的渗流模拟方法。因此本文将复数表示渗透系数渗流计算得出的水头及其变异值与蒙特卡罗法计算的水头均值及标准差比较，来验证本文所用方法的正确性和可行性。

用蒙特卡罗方法模拟某随机过程时，需要产生各种概率分布的随机变量。最简单、最基本、最重要的随机变量是在[0, 1]上均匀分布的随机变量。其它分布的随机数都可以在[0, 1]区间均匀分布随机数的基础上经变换得到。产生随机数的方法一般有物理方法、数学方法、随机数表3种，在计算机上主要应用数学方法。产生伪随机数的数学方法很多，如平方取中法、移位指令加法、同余法等等，对产生的随机数应进行一定的统计检验，最主要的检验是对伪随机数进行均匀性和独立性的检验。同余法是目前最通用的[0, 1]

随机数产生的方法。其定义为：2个整数  $a, b$  分别除以正整数  $m$  后的余数相等，称  $a, b$  关于  $m$  同余。本文计算中将土石坝模型的帷幕渗透系数假定为均匀分布，进行随机抽样。

均匀分布的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}, \quad (1)$$

累计概率函数为

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}. \quad (2)$$

显然其值域  $R$  为 [0, 1]，则均匀分布的随机变量可由 [0, 1] 间的伪随机数得到，即

$$x_u = a + (b - a)R. \quad (3)$$

## 2 以复数表示渗透系数的渗流计算

随机渗流场研究一般将渗透系数看作随机量，假设渗透系数具有一定的概率分布规律。在各种概率分布中均值与标准差是反映渗透系数分布的主要参数，而变异系数正是反映两者之间关系的无量纲数学量。变异系数在概率论与数理统计中有重要应用，其数学定义为：随机变量  $X$  的标准差与其数学期望的比值称为  $X$  的变异系数。变异系数反映了  $X$  对于平均值的“相对离差”。

本文提出将渗透系数以复数形式表示，表示方式如下：

$$k + \alpha k i. \quad (4)$$

式中 实部  $k$  为渗透系数的均值，是确定项，通过计算可求得稳定的渗流场； $\alpha$  为渗透系数的变异系数；虚部  $\alpha$  与  $k$  相乘后为渗透系数的变异值，即标准差，是变异项，表示渗透系数对均值的“绝对”离散程度，通过计算可求得脉动的渗流场。本文以式(4)表示复数形式的渗透系数，式(4)仅是一个简单的复数，不涉及复杂的复变函数等解析函数。

三维正交各向异性非均质稳定渗流定解问题的描述<sup>[15-16]</sup>为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_z \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0. \quad (5)$$

式中  $k_x, k_y, k_z$  均为正交各向异性渗透系数，以复数形式表示； $H$  为水头，也是简单的复数表示，并非解析函数，其实部表示水头均值，虚部表示水头变异值即标准差。对式(5)考虑两类边界条件：

(1) 水头边界条件为

$$H(x, y, z)|_{\Gamma_1} = f_1(x, y, z); \quad (6)$$

(2) 流量边界条件为

$$\begin{aligned} k_x \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) + k_z \frac{\partial H}{\partial z} \cos(n, z) |_{\Gamma_2} \\ = f_2(x, y, z) \quad . \end{aligned} \quad (7)$$

本文在以下讨论与数值验证中, 仅考虑渗透系数的变异。对于水头和流量边界条件认为是确定性条件, 不存在变异, 虽也均以复数形式表示, 但是其虚部项为零。

根据渗流的连续性方程, 利用变分原理可得三维渗流有限元计算的基本格式为

$$[M]^e p^e = F^e \quad . \quad (8)$$

式中  $p^e$  为复数, 实部表示结点水压力值, 虚部为结点水压力变异值;  $[M]^e$  为单元渗透矩阵, 其中各渗透系数均用复数表示, 形式如式 (4), 计算如下:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int_{\Omega^e} N_{i,l} K_{lm} N_{j,m} d\Omega \quad (i, j = 1, 2, \dots, 8; l, m = 1, 2, 3), \quad (9) \\ F_j &= - \int_{\Omega^e} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x} k_{xz} + \frac{\partial N_j}{\partial y} k_{yz} + \frac{\partial N_j}{\partial z} k_{zz} \right) p d\Omega + \int_S N_j \bar{q} ds, \end{aligned}$$

式中,  $N_i$  为空间八结点等参单元的形函数。

最后由单元渗透矩阵形成整体渗透矩阵, 可得

$$[M]p = F \quad , \quad (11)$$

式中各量均用复数表示。

目前对自由面问题的求解技术基本上已比较成熟, 本文计算采用初流量法进行求解。初流量法实际上是引用非线性力学分析中初应力法的思想, 将非线性问题转化为一系列线性问题进行求解的做法, 初流量法解决了变网格法中单元畸形的问题。

首先将达西定律改写为

$$v_i = -k_{ij} h_{,j} + q_i^0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad , \quad (12)$$

式中为张量指标记法,  $v_i$  为流速,  $k_{ij}$  为渗透张量,  $q_i^0$  为初流量值, 各量均为对应复数的实部。

由于干区无渗流(不考虑非饱和渗流的作用), 实际的  $v_i$  为

$$v_i = -k_{ij}^0 h_{,j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad . \quad (13)$$

式中 对于湿区,  $k_{ij}^0 = k_{ij}$ ; 对于干区,  $k_{ij}^0 = 0$ 。湿区和干区的渗透张量为复数形式渗透系数的实部。这样, 初流量值就为

$$q_i^0 = (-k_{ij}^0 + k_{ij}) h_{,j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad . \quad (14)$$

将式 (14) 代入渗流连续性方程, 可得

$$(-k_{ij} h_{,j} + q_i^0)_{,i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad . \quad (15)$$

对整个区域进行有限元离散, 根据伽辽金法不难得到下列有限元方程:

$$[M] \cdot h = Q + Q_0 \quad . \quad (16)$$

式中  $[M]$ ,  $Q$  为一般的总体传导矩阵和等效结点流量;  $Q_0$  为由初流量引起的等效结点流量, 式中各量也

为复数,  $Q_0$  高斯积分公式为

$$Q_0 = \sum_e \left( \sum_{i=1}^8 [B(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)]^T ([k] - [k^0]) [B(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)] |J_i| h^e \right), \quad (17)$$

式中,  $[B]$  是单元几何矩阵;  $h^e$  为单元结点水头列阵, 用复数表示。

渗出边界是自由面的延续, 在该边界上应恒满足其边界上的结点水头势等于其位置势, 此处结点水头势为结点水头的实部, 即

$$\bar{H} = Z_T \quad . \quad (18)$$

由于渗出边界是自由面(浸润面)的延续, 因此, 渗出边界范围亦是未知的, 有待计算求解, 同样存在迭代求解的问题。计算分析的自由面是通过压力水头  $p/\gamma = 0$  的条件插值求得的。然而, 对于渗出边界来说, 其上各点恒满足  $p/\gamma = 0$ 。故此, 渗出边界范围是无法通过插值求得。正因为如此, 渗出边界条件既带有第一类边界条件的属性, 但渗出边界范围又不是已知确定的。同样, 本文在处理时, 仍从其物理特征出发, 即实际渗出结点的充要条件是在渗出边界上的结点必须有水流出溢。从而, 计算分析中, 对于真实渗出边界结点的确认条件为

$$\begin{cases} |\bar{H}_i - Z_i| < \varepsilon, \\ Q_i < 0, \end{cases} \quad (19)$$

式中, 水头势和流量均为结点水头势和流量的实部, 定义结点流量以流入渗流域为正, 反之为负。

在满足式 (19) 条件下的可能渗出边界结点(静水位以上所有临空面上的结点均视之为可能渗出边界结点)才视之为真实渗出结点, 以第一类边界条件视之, 则

$$\bar{H}_i = Z_i \quad . \quad (20)$$

且式 (19) 中的等效结点流量计算关系式为

$$Q_i = \sum_e \iiint_{\Omega_e} \left[ k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial z} \right] dx dy dz, \quad (21)$$

式中,  $N_i$  为  $i$  结点的形函数,  $\sum_e$  表示对与  $i$  渗出结点有关的单元求和。

在迭代过程中, 真实渗出结点总数是变化的, 当迭代至收敛于稳定解, 才是不变的。初始求解, 可将全体可能渗出点视作真实渗出点, 进行迭代求解。

通过以上求解, 最终可得结点水头值及水头变异值, 以复数形式表示为

$$\bar{H} + \tilde{H}_1 \quad , \quad (22)$$

式中,  $\bar{H}$  为结点水头值,  $\tilde{H}$  为水头的变异值。水头变异值表示由于渗透系数波动引起的水头值偏移量, 因此, 可认为水头也具有一定的波动性。水头的变异值

也是另外一种意义上的标准差，因此计算所得的水头变异值均取绝对值。

本文以复数表示渗透系数，代入渗流计算方程，通过求解复系数线性方程组计算出水头值及水头值变异值，将此计算结果分别与蒙特卡罗法计算的水头均值与标准差比较，得出两者之间的关系。这种关系在理论上还没有得到论证，所以本文仅从数值方面进行验证，以此得出复数表示渗透系数的渗流计算方法的正确性和可行性。

### 3 数值验证

取一透水地基上的土石坝坝段进行计算，尺寸如图 1 所示。土石坝上游水位高程为 52 m，下游水位高程为 28 m，帷幕深 8 m，计算坝段宽 20 m。各介质的渗透系数如表 1 所示。

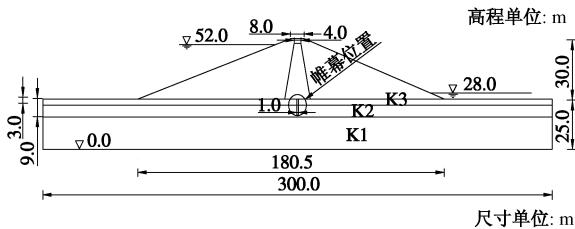


图 1 土石坝断面图

Fig. 1 Section of earth-rock dam

表 1 介质渗透系数统计量

Table 1 Statistics of permeability coefficients

介质类型	$x$ 向渗透系数	$y$ 向渗透系数	$z$ 向渗透系数
K1	$5.0 \times 10^{-5}$	$5.0 \times 10^{-5}$	$5.0 \times 10^{-5}$
K2	$5.0 \times 10^{-5}$	$5.0 \times 10^{-5}$	$5.0 \times 10^{-5}$
K3	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-3}$
坝体	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$1.2 \times 10^{-3}$
心墙	$1.0 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-6}$
帷幕	$1.0 \times 10^{-7}$	$1.0 \times 10^{-7}$	$1.0 \times 10^{-7}$

本算例假设介质 3 个方向的渗透系数均相同，且只考虑帷幕渗透系数单独变异。应用蒙特卡罗法计算时，设帷幕的渗透系数均匀分布，变幅范围为  $[1.0 \times 10^{-8}, 1.0 \times 10^{-6}]$ ，随机抽取 25 组，每组 1000 个渗透系数，渗透系数的变异系数为每组抽样数据的标准差与对应均值的比值，本文抽样数据的变异系数变化范围为  $[0.45, 0.73]$ 。应用自编程序计算时，帷幕渗透系数的实部为每组抽样数据的均值。

#### 3.1 随机渗流场的复数表达数值论证

将复数表示渗透系数渗流计算得出的结点水头值和水头变异值分别与蒙特卡罗法计算的对应结点的水头均值和水头标准差进行比较（以下将复数表示渗透系数渗流计算得出的结点水头值和水头变异值简称为

水头值和水头变异值）。比较结果如下分析。

图 2 为截取剖面上浸润线以下所有结点在变异系数为 0.4617 时，结点水头值与水头均值之间的拟合曲线。通过计算可知，水头值与水头均值呈线性关系，数值上基本相等。

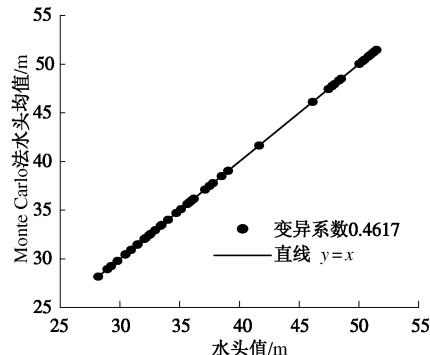


图 2 变异系数为 0.4617 时水头与水头均值比较

Fig. 2 Comparison between head and head mean value under variation coefficient of 0.4617

水头变异值与水头标准差之间的关系如图 3 所示（此图为截取的计算剖面的局部放大图，变异系数为 0.4617）。由图 3 可知，在帷幕周围及浸润线渗出点附近水头变异值与水头标准差基本相等；在帷幕下游侧两者之间有一定差距，但基本呈线性关系。

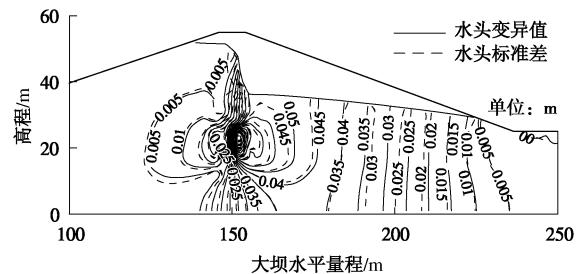


图 3 变异系数为 0.4617 时水头变异值与水头标准差比较

Fig. 3 Comparison between of head variation value and head standard deviation under variation coefficient of 0.4617

图 4 为截取剖面上浸润线以下所有结点在变异系数为 0.4617 时，水头变异值与水头标准差之间的拟合曲线。由图 4 可知，截取剖面上的结点两者之间都呈线性关系，拟合直线的斜率基本在 0.87 左右。

综合分析图 3、4，帷幕上下游不同部位结点的水头变异值与水头标准差的拟合直线斜率略有不同。通过比较截取剖面所有结点在不同变异系数下的水头变异值与水头标准差，得出水头变异值与水头标准差的拟合直线斜率变幅范围为  $[0.8, 1.09]$ 。总体上帷幕上游侧的结点水头变异值小于水头标准差；帷幕下游侧的结点水头变异值大于水头标准差；距离帷幕较远的上下游侧，两者基本相等。这说明帷幕周围的结点，

由于受到帷幕渗透系数变异的影响, 其求得的水头变异值与水头标准差之间的大小关系并不完全一致。具体由于何种原因产生此种现象, 在日后的进一步研究中需要重点讨论, 在此不再说明。

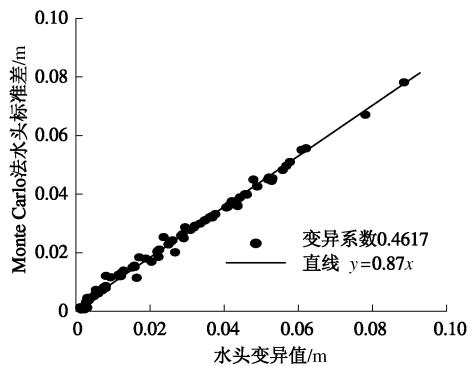


图 4 变异系数为 0.4617 时水头变异值与水头标准差比较

Fig. 4 Comparison between head variation value and head standard deviation under variation coefficient of 0.4617

由以上分析可知, 应用复数表示渗透系数渗流计算的结点水头值与蒙特卡罗法计算的结点水头均值基本相等, 水头变异值通过线性变换可求出水头标准差。因此, 本文所用方法模拟的渗流场与蒙特卡罗法模拟的渗流场相近, 证明了复数表示渗透系数渗流计算方法的正确性和可行性。

### 3.2 变异系数取值范围讨论

以往的渗流计算中, 在考虑渗透介质的不均匀性方面, 渗透系数的变异系数最大值取到 0.3<sup>[13]</sup>。本文计算时随机抽取 25 组, 每组 1000 个数据, 随机数据的变异系数变化范围为 [0.45, 0.73]。

图 5 为截取的计算剖面的局部放大图, 图中数值表示不同变异系数下计算的水头变异值。由此可看出, 渗透系数的变异值越大, 对水头值的影响范围越大, 并且影响幅度也在增大。受帷幕渗透系数变异影响最大的部位是帷幕周围及其下游侧, 因此, 帷幕渗透介质均匀与否直接影响下游的渗流场分布。对于上下游距离帷幕较远的部位, 受渗透系数变异的影响较小, 可忽略不计。

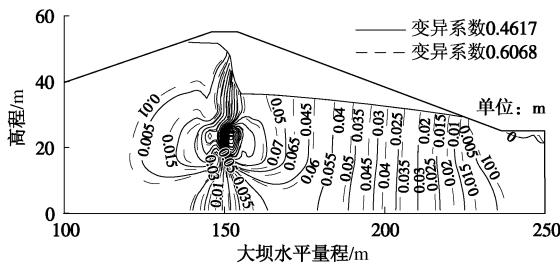


图 5 变异系数为 0.4617 和 0.6068 时水头变异值分布图

Fig. 5 Distribution of head variation value under variation coefficient of 0.4617 and 0.6068

选取剖面不同部位的点, 分析在不同变异系数下

水头值及水头变异值与水头均值及水头标准差之间的关系。选取帷幕位于 K3 地层中的上游侧#489 结点与下游侧#495 结点分别进行比较。计算网格划分时, 将帷幕单元在水平向均分为 5 份, #489 结点和#495 结点是帷幕上层单元的底部结点, 具体位置见图 1, 6。

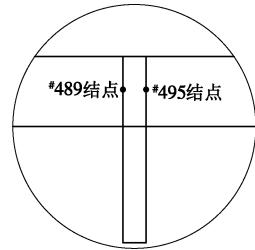
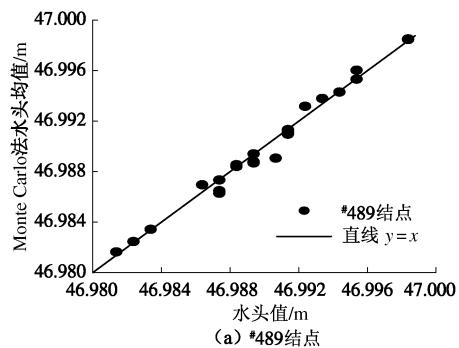


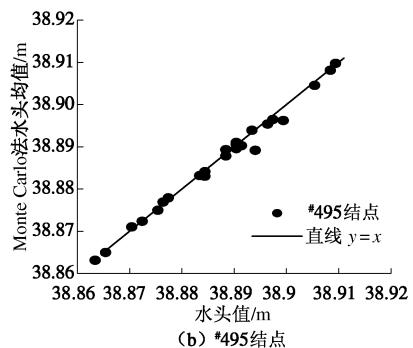
图 6 结点位置详图

Fig. 6 Map of node location

图 7 和图 8 分别为不同变异系数下#489 结点和#495 结点, 水头值与水头均值及水头变异值与水头标准差的拟合曲线。由于随机抽样时, 各组数据的均值不完全相同, 稍有差异, 使得变异系数与变异值大小分布规律不完全一致。图 7, 8 中各点的分布规律与渗透系数的变异值关系密切, 各点按照渗透系数变异值的由小到大依次由下至上分布。



(a) #489结点



(b) #495结点

图 7 #489 结点与#495 结点的水头与水头均值比较

Fig. 7 Comparison between head and head mean value at node No. 489 and node No. 495

通过计算可知, 变异系数在小于 0.73 的情况下, 水头值与水头均值之间的相对误差在 2% 以内; 在帷幕周围及下游渗出点处, 水头变异值与水头标准差之

间的拟合直线的斜率在 1.0 左右。由此可见, 复数表示渗透系数渗流计算方法可以很好地模拟渗流场的不确定性。

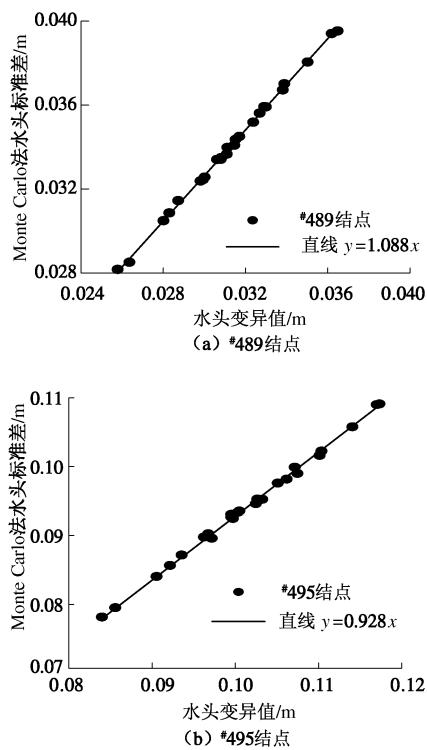


图 8 结点 489 与结点 495 的水头变异值与水头标准差比较

Fig. 8 Comparison between head variation value and head standard deviation at node No. 489 and node No. 495

### 3.3 计算效率分析

本文算例中, 在相同的计算精度和变异系数下, 应用蒙特卡罗法计算与应用复数表示渗透系数法计算所需的迭代次数与计算时间对比如表 2 所示(仅选取 8 个变异系数进行比较)。

表 2 计算效率对比

Table 2 Comparison of computing efficiency

蒙特卡罗法		复数表示渗透系数法		
变异系数	迭代次数	计算时间/s	变异系数	迭代次数
0.4617	8000	38823	0.4617	8
0.5140	7984	30996	0.5140	8
0.5534	7996	31042	0.5534	8
0.5748	7983	30992	0.5748	8
0.5990	7979	30976	0.5990	8
0.6194	7894	30646	0.6194	8
0.6726	7685	29835	0.6726	8
0.7260	7998	31050	0.7260	8

本文计算所用模型较为简单, 计算结点与单元都很少, 但由表 2 仍可看出, 复数表示渗透系数法比蒙特卡罗法在迭代次数与计算时间上要少很多。这是由于蒙特卡罗法一方面需要抽取大量的随机数据, 再对抽样数据分别进行计算; 另一方面, 对计算结果仍要进行数据统计。复数表示渗透系数渗流计算法仅需输

入复数形式渗透系数, 即可得到水头及水头变异值, 大大缩短了计算时间, 提高了计算效率, 这种优势在大型模型计算中将更为突出。因此, 复数表示渗透系数渗流计算法是一种高效率的渗流计算方法。

## 4 结 论

本文以复数形式表示渗透系数, 将渗透系数变异值设置为虚部, 应用自编程序计算水头及水头变异值, 计算结果以复数形式表示。通过与蒙特卡罗法计算的水头均值和标准差比较, 从数值方面论证了本文所用方法的正确可行性以及本方法在计算大变异性问题方面的优点, 得到以下 3 点结论。

(1) 不同变异系数下复数表示渗透系数渗流计算法计算的水头值与蒙特卡罗法计算的水头均值相对误差在 2% 以内; 水头变异值与蒙特卡罗法计算的水头标准差之间呈线性关系, 拟合直线斜率变幅范围为 [0.8, 1.09]。这说明本文所用方法的计算结果与蒙特卡罗法的计算结果相近, 因而复数表示渗透系数渗流计算法可以很好地模拟渗流场的不确定性, 证明了此方法正确可行。

(2) 以往的随机渗流计算方法所取的渗透系数变异范围较小, 均在 0.3 以内, 这与实际工程复杂的渗流场情况差别较大。本文所用复数表示渗透系数渗流计算法在变异系数小于 0.73 时, 通过简单的线性计算便可准确的得出水头均值与水头标准差, 且计算量小。所以复数表示渗透系数渗流计算法为解决大型复杂问题的大变异性求解提供了方便快捷的计算方法。

(3) 本文以复数形式表示的渗透系数, 计算结果与蒙特卡罗法计算结果之间的关系仅在数值上得到了验证, 理论上的证明是下一步研究的主要工作。最后, 本文得出的结论仅考虑了帷幕渗透系数的变异, 当在复杂地基中, 地层本身渗透系数也存在差异, 考虑多个渗透系数变异也是下一步研究的重要方向。

## 参考文献:

- [1] YEH T C, GELHAR L W, GUTJAHR A L. Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogeneous soils: 1. Statistically isotropic media[J]. Water Resources Research, 1985, 21(4): 447–456.
- [2] YEH T C, GELHAR L W, GUTJAHR A L. Stochastic analysis of unsaturated flow in heterogeneous soils: 2. Statistically anisotropic media with variable  $\alpha$  [J]. Water Resources Research, 1985, 21(4): 457–464.
- [3] TSAO M, WANG M K, CHEN M C, et al. A case study of the pore water pressure fluctuation on the slip surface using

- horizontal borehole works on drainage well[J]. *Engineering Geology*, 2005, **78**(3/4): 105 – 118.
- [4] ZHANG D X, WAALLSTORM T C, WINTER C L. Stochastic analysis of steady state unsaturated flow in heterogeneous media: comparison of the Brooks-Corey and Gardner-Russo models[J]. *Water Resources Research*, 1998, **34**(6): 1437 – 1449.
- [5] ZHANG D X. Nonstationary stochastic analysis of transient unsaturated flow in randomly heterogeneous media[J]. *Water Resources Research*, 1999, **35**(4): 1127 – 1141.
- [6] ZHANG D X, LU Z M. An efficient higher-order perturbation approach for flow in randomly heterogeneous porous media via Karhunen-Loeve decomposition[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, **194**(2): 773 – 794.
- [7] ROY R V, GRILLI S T. Probabilistic analysis of flow in random porous media by stochastic boundary elements[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1997, **19**(3): 239 – 255.
- [8] 盛金昌, 速宝玉, 魏保义. 基于 Taylor 级数展开随机有限元法的裂隙岩体随机渗流分析[J]. *岩土工程学报*, 2001, **23**(4): 485 – 488. (SHENG Jin-chang, SU Bao-yu, WEI Bao-ji. Stochastic seepage analysis of joint rock masses by usage of Taylor series stochastic finite element method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2001, **23**(4): 485 – 488. (in Chinese))
- [9] YANG J Z, ZHANG D X, LU Z M. Stochastic analysis of saturated-unsaturated flow in heterogeneous media by combining Karhunen-Loeve expansion and perturbation method[J]. *Journal of Hydrology*, 2004, **294**(1–3): 18 – 38.
- [10] 何翔, 冯夏庭, 张东晓. 岩体渗流 - 应力耦合有限元计算的精细积分方法[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, **25**(10): 2003 – 2007. (HE Xiang, FENG Xia-ting, ZHANG Dong-xiao. Precision integration algorithm for simulation of coupled process of seepage field and stress field in rock mass[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, **25**(10): 2003 – 2007. (in Chinese))
- [11] 李锦辉, 王媛, 胡强. 三维稳定渗流的随机变分原理及有限元法[J]. *工程力学*, 2006, **23**(6): 21 – 24. (LI Jin-hui, WANG Yuan, HU Qiang. The variational principle and finite element method in 3D steady seepage[J]. *Engineering Mechanics*, 2006, **23**(6): 21 – 24. (in Chinese))
- [12] 王亚军, 张我华, 陈合龙. 长江堤防三维随机渗流场研究 [J]. *岩石力学与工程学报*, 2007, **26**(9): 1824 – 1831. (WANG Ya-jun, ZHANG Wo-hua, CHEN He-long. Three-dimensional random seepage field analysis for main embankment of Yangtze River[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2007, **26**(9): 1824 – 1831. (in Chinese))
- [13] 王媛, 王飞, 倪小东. 基于非稳定渗流随机有限元的隧道涌水量预测[J]. *岩石力学与工程学报*, 2009, **28**(10): 1986 – 1994. (WANG Yuan, WANG Fei, NI Xiao-dong. Prediction of water inflow in tunnel based on stochastic finite element of unsteady seepage[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2009, **28**(10): 1986 – 1994. (in Chinese))
- [14] 徐钟济. 蒙特卡罗方法[M]. 上海: 上海科学技术出版, 1985. (XU Zhong-ji. Monte Carlo method[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Publishing House, 1985. (in Chinese))
- [15] MOORE M S. Stochastic field from stochastic mechanics[J]. *Journal of Mathematics and Physics*, 1980, **21**(8): 2104 – 2106.
- [16] 毛昶熙. 渗流计算分析与控制[M]. 北京: 水利电力出版社, 1988. (MAO Chang-xi. Seepage calculation and control[M]. Beijing: Water Resources and Electric Power Press, 1988. (in Chinese))