

# 动态修正时距权重的不等时距灰色模型及应用

张东明<sup>1</sup>, 陈 江<sup>1</sup>, 何洪甫<sup>1</sup>, 张兴华<sup>2</sup>

(1. 重庆大学资源及环境科学学院, 重庆 400044; 2. 四川九寨沟县马脑壳金矿有限责任公司, 四川 阿坝州 623400)

**摘要:** 传统不等时距 GM(1,1) 模型预测结果往往会出现预测值的残差较大而且残差率的变化也大, 还需再建立残差模型加以修正。针对传统不等时距 GM(1,1) 模型的不足, 重新分配在数据累加和累减过程中时距的权重, 通过研究与验算确定最佳的时距权重, 建立了修正时距权重不等时距边坡位移的灰色预测模型, 并在数据累减还原过程中依据残差率的变化趋势动态修正时距权重, 使其预测结果与监测结果更为接近。该预测模型充分考虑了预测系统的时变性和灰色性, 降低了预测系统的整体预测误差, 提高了预测精度。实例分析表明: 该预测模型拟合精度较高, 预测结果正确可靠, 能够反映边坡位移的发展趋势, 对边坡位移的短、中期变化有较为理想的预测效果, 具有一定的理论价值和工程实践意义。

**关键词:** 位移预测; GM(1,1); 时距权重; 不等时距

**中图分类号:** TU457      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-4548(2012)06-1137-05

**作者简介:** 张东明(1973-), 男, 博士, 教授, 主要从事矿山岩石力学与安全工程方面的研究工作。E-mail: zhangdm@cqu.edu.cn。

## Unequal interval grey model based on dynamic correction of time-distance weight

ZHANG Dong-ming<sup>1</sup>, CHEN Jiang<sup>1</sup>, HE Hong-fu<sup>1</sup>, ZHANG Xing-hua<sup>2</sup>

(1. College of Resource and Environmental Sciences, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 2. Jiuzhaigou Manaoke Gold Co., Ltd., Jiuzhaigou County, Abazhou 623400, China)

**Abstract:** The predicted results of the traditional unequal interval GM (1,1) model always have greater residuals, and a large variety of residual rates, which needs to establish a residual error model to amend them. In view of this situation, a grey prediction model for slope displacement based on the correction of time-distance weight is established by redistributing the time-distance weight in the process of data accumulation or regression, and by determining the optimal time-distance weights after research and checking. During the data regression and reduction, time-distance weights are corrected dynamically based on the trends in the residual rate. The values of dynamic correction make predictions more close to the monitoring results. In the model, both time-varying and gray property are adequately considered to reduce the whole prediction error and improve the prediction accuracy. The case study shows that the fitting precision is high and the prediction is reliable. The proposed model, which is of a certain theoretical and practical significance, can be employed to predict effectively the tendency and results of slope displacement in the short term and middle term.

**Key words:** displacement prediction; GM(1,1); time-distance weight; unequal interval

## 0 引言

边坡位移的预测与控制是边坡工程中的一个关键问题, 也是目前亟待解决的一大技术难题。由于理论计算方法本身的局限性和工程地质条件的复杂性, 完全依靠理论方法很难准确地预测边坡位移, 因此根据边坡前期实测位移来预测后期位移以达到准确判断边坡稳定状况和预测失稳时间具有重要的意义。目前, 用于边坡位移预测的方法很多, 常用的有时间序列模型、灰色模型、神经网络模型、支持向量机以及由多

种方法联合的组合模型等。考虑到边坡工程是部分信息已知, 部分信息未知的复杂灰色系统, 因此国内外的很多学者采用灰色系统理论对边坡位移进行预测, 并取得了一定的效果<sup>[1]</sup>。

在灰色预测中, 应用最广泛的是邓聚龙教授提出的GM(1,1)模型<sup>[2-3]</sup>, 由于创建GM(1,1)模型时, 引入了

基金项目: 中央高校基本科研业务费资助项目(CDJZR10240019)

收稿日期: 2011-03-25

等时距概念, 因而建模序列必须满足等时距的要求。而在岩土工程领域, 往往存在不等时距的监测时序问题。基于此曾有学者从GM(1,1)模型建模的原理出发, 考虑在数据累加和累减过程中时距的权重, 直接采用不等时距序列建立不等时距GM(1,1)模型<sup>[4]</sup>。这一方法可取, 但在时距权重的分配上并不优化, 致使预测值的残差较大而且残差率的变化也大, 因而还需再建立残差模型加以修正<sup>[5]</sup>。本文在前人的基础上提出动态修正时距权重的不等时距灰色预测模型, 在一定程度上对其预测精度、时变性及适应性等方面进行了改进。通过对该预测模型与传统不等时距GM(1,1)模型计算结果的比较分析, 可以得出此方法的预测精度较传统不等时距GM(1,1)预测模型高, 适合中、短期边坡位移预测。

## 1 动态修正时距权重的不等时距灰色模型

### 1.1 动态修正时距权重的不等时距 GM(1,1) 建模

假设原始不等时距序列为

$$X^{(0)} = (X^{(0)}(t_1), X^{(0)}(t_2), \dots, X^{(0)}(t_n)) , \quad (1)$$

其中时距  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \neq \text{const}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ 。

传统不等时距 GM(1,1) 模型原始数据的一次累加式为

$$\begin{cases} X^{(1)}(t_k) = X^{(0)}(t_k) & k=1, \\ X^{(1)}(t_k) = X^{(1)}(t_{k-1}) + X^{(0)}(t_k)\Delta t_k & (k=2, 3, \dots, n). \end{cases} \quad (2)$$

通过研究与验算, 发现将时距  $\Delta t_k$  的权全赋予在  $X^{(0)}(t_k)$  上, 这不一定合理。因为时距  $\Delta t_k$  是  $X^{(0)}(t_{k-1})$  与  $X^{(0)}(t_k)$  之间的时间间隔, 时距权宜部分赋予在上  $X^{(0)}(t_{k-1})$  上、 $3/4$  赋予在  $X^{(0)}(t_k)$  上的预测结果最佳<sup>[6-7]</sup>。

据此, 修正后原始数据的一次累加式为

$$\begin{cases} X^{(1)}(t_k) = X^{(0)}(t_k) & (k=1), \\ X^{(1)}(t_k) = X^{(1)}(t_{k-1}) + \frac{1}{4}X^{(0)}(t_{k-1})\Delta t_k + \frac{3}{4}X^{(0)}(t_k)\Delta t_k & (k=2, 3, \dots, n). \end{cases} \quad (3)$$

于是, 通过式(3)对原不等时距序列进行一次累加生成求解累加生成序列  $X^{(1)}$ :

$$X^{(1)} = (X^{(1)}(t_1), X^{(1)}(t_2), \dots, X^{(1)}(t_n)) . \quad (4)$$

然后据  $X^{(1)}$  可建立如下形式的微分方程:

$$\frac{dX^{(1)}}{dt} + aX^{(1)} = u , \quad (5)$$

便可得到不等时距序列微分方程的时间响应式:

$$\hat{X}^{(1)}(t_k) = (X^{(1)}(t_1) - \frac{u}{a})e^{-a(t_k-t_1)} + \frac{u}{a} . \quad (6)$$

由于对某一具体的数据序列来说  $X^{(1)}(t_1)$  和参数

$a$ ,  $u$  都是定值, 因此令  $p = X^{(1)}(t_1) - \frac{u}{a}$ ,  $\frac{u}{a} = X^{(1)}(t_1) - p$ , 则式(6)变为

$$\hat{X}^{(1)}(t_k) = p(e^{-a(t_k-t_1)} - 1) + X^{(1)}(t_1) . \quad (7)$$

原不等时距序列在一次累加时进行了加权, 所以在一次累减时要进行相应还原, 先按传统不等时距 GM(1,1) 模型中  $\hat{X}^{(0)}(t_k) = \frac{\hat{X}^{(1)}(t_k) - \hat{X}^{(1)}(t_{k-1})}{\Delta t_k}$  式计算预测值, 再进行后验差检验。

残差率为

$$\varepsilon(t_k) = \frac{X^{(0)}(t_k) - \hat{X}^{(0)}(t_k)}{X^{(0)}(t_k)} . \quad (8)$$

则残差率序列为  $\varepsilon = (\varepsilon(t_1), \varepsilon(t_2), \dots, \varepsilon(t_n))$ , 同时统计出正负残差率的个数。

设有正残差率有  $m$  个, 负残差率有  $f$  个, 其中  $m+f \leq n$ 。正残差率均值为

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon(t_k) + |\varepsilon(t_k)|}{2} ; \quad (9)$$

负残差率均值为

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^f \frac{\varepsilon(t_k) - |\varepsilon(t_k)|}{2} . \quad (10)$$

在数据累减还原过程中, 依据残差率的变化趋势动态修正时距权重, 得修正化后的预测式为

$$\begin{cases} \hat{X}^{(0)}(t_k) = \frac{\hat{X}^{(1)}(t_k) - \hat{X}^{(1)}(t_{k-1})}{\Delta t_k(1 - \bar{\varepsilon}_1)} & (\varepsilon(t_k) > 0), \\ \hat{X}^{(0)}(t_k) = \frac{\hat{X}^{(1)}(t_k) - \hat{X}^{(1)}(t_{k-1})}{\Delta t_k(1 - \bar{\varepsilon}_2)} & (\varepsilon(t_k) < 0), \\ \hat{X}^{(0)}(t_k) = \frac{\hat{X}^{(1)}(t_k) - \hat{X}^{(1)}(t_{k-1})}{\Delta t_k} & (\varepsilon(t_k) = 0). \end{cases} \quad (11)$$

当  $k=1$  时,  $\hat{X}^{(0)}(t_1) = \frac{\hat{X}^{(1)}(t_1)}{\Delta t_1}$ ; 当  $k>n$  时, 式(11)

中  $\varepsilon(t_k)$  变为  $\varepsilon(t_n)$ 。

### 1.2 灰参数求解

对于所有的累加生成数据与预测值之间应存在下述关系<sup>[8]</sup>:

$$\begin{cases} X^{(1)}(t_2) = \hat{X}^{(1)}(t_2) = p(e^{-a(t_2-t_1)} - 1) + X^{(1)}(t_1), \\ X^{(1)}(t_3) = \hat{X}^{(1)}(t_3) = p(e^{-a(t_3-t_1)} - 1) + X^{(1)}(t_1), \\ \vdots \\ X^{(1)}(t_n) = \hat{X}^{(1)}(t_n) = p(e^{-a(t_n-t_1)} - 1) + X^{(1)}(t_1). \end{cases} \quad (12)$$

对式(10)进行求解后得

$$a_{ij} = \frac{1}{t_j - t_i} \ln \left( \frac{t_j - t_1}{t_i - t_1} \cdot \frac{X^{(1)}(t_i) - X^{(1)}(t_1)}{X^{(1)}(t_j) - X^{(1)}(t_1)} \right) . \quad (13)$$

因为方程组(7)共有  $n-1$  个方程, 于是对任意两个方程联立求解总共可求得  $C_{n-1}^2$  个  $a_{ij}$ , 取其平均值

可得最终的  $a$  值:

$$\hat{a} = \bar{a} = \frac{1}{C_{n-1}^2} \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \quad (14)$$

接下来对  $p$  进行求解, 将式(12)求得的平均值  $\hat{a}$  分别代入式(10)求出  $n-1$  个方程相应的  $p$ , 取其平均值后得

$$\hat{p} = \bar{p} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n p_i \quad (15)$$

将所求得的  $\hat{p}$  和  $\hat{a}$  值代入式(7)中, 便可得到不等时距下的灰色 GM(1,1) 模型:

$$\hat{X}^{(1)}(t_k) = \hat{p}(e^{-\hat{a}(t_k-t_1)} - 1) + X^{(1)}(t_1) \quad (16)$$

经优化后一次累减还原的初值数据的预测值  $\hat{X}^{(0)}(t_k)$ :

$$\begin{cases} \hat{X}^{(0)}(t_k) = \frac{\hat{p}(e^{-\hat{a}\Delta t_k} - 1)e^{-\hat{a}(t_{k-1}-t_1)}}{\Delta t_k(1-\bar{\varepsilon}_1)} & (\varepsilon(t_k) > 0), \\ \hat{X}^{(0)}(t_k) = \frac{\hat{p}(e^{-\hat{a}\Delta t_k} - 1)e^{-\hat{a}(t_{k-1}-t_1)}}{\Delta t_k(1-\bar{\varepsilon}_2)} & (\varepsilon(t_k) < 0), \\ \hat{X}^{(0)}(t_k) = \frac{\hat{p}(e^{-\hat{a}\Delta t_k} - 1)e^{-\hat{a}(t_{k-1}-t_1)}}{\Delta t_k} & (\varepsilon(t_k) = 0). \end{cases} \quad (17)$$

当  $k=1$  时,  $\hat{X}^{(0)}(t_k) = \frac{\hat{p}(e^{-\hat{a}\Delta t_k} - 1)e^{-\hat{a}(t_{k-1}-t_1)}}{\Delta t_k}$ ; 当

$k > n$  时, 式(17)中  $\varepsilon(t_k)$  变为  $\varepsilon(t_n)$ 。

### 1.3 灰预测检验

要对灰色预测模型精度进行检验, 主要是进行后验差检验<sup>[9-10]</sup>, 检验指标有后验算方差比值  $C$  和小误差概率  $P$ :

$$C = \frac{S_2}{S_1}, \quad (18)$$

$$P = P \left\{ \left| \varepsilon(t_k) - \overline{\varepsilon(t_k)} \right| \leq 0.6S_1 \right\}^c. \quad (19)$$

式中  $S_1$  为原始序列标准差;  $S_2$  为绝对误差标准差;  $\varepsilon(t_k)$  为模型残差;  $\overline{\varepsilon(t_k)}$  为模型残差均值。

模型的精度由  $C$  和  $P$  共同刻画, 一般情况将模型精度分为 4 级, 如表 1 所示。

表 1 模型精度分级表<sup>[11]</sup>

Table 1 Accuracy of model grading

精度等级	$P$	$C$
1 级 (好)	$0.95 \leq P$	$C \leq 0.35$
2 级 (合格)	$0.80 \leq P < 0.95$	$0.35 < C \leq 0.5$
3 级 (勉强)	$0.70 \leq P < 0.80$	$0.5 < C \leq 0.65$
4 级 (不合格)	$P < 0.70$	$0.65 < C$

## 2 工程实例分析

### 2.1 工程概括

现以马脑壳矿区露天开采边坡为例。该边坡属于多台阶强风化岩质边坡, 岩层为反倾角。边坡每台阶

设计高度为 10 m, 宽度为 8 m。目前, 边坡总高度约 300 m, 长约 500 m。为及时掌握边坡的稳定性状况, 对矿区部分边坡进行了现场监测。这里以矿区某一勘探线为例说明, 其布置剖面图如图 1 所示, 其上布置了 18 个监测点。

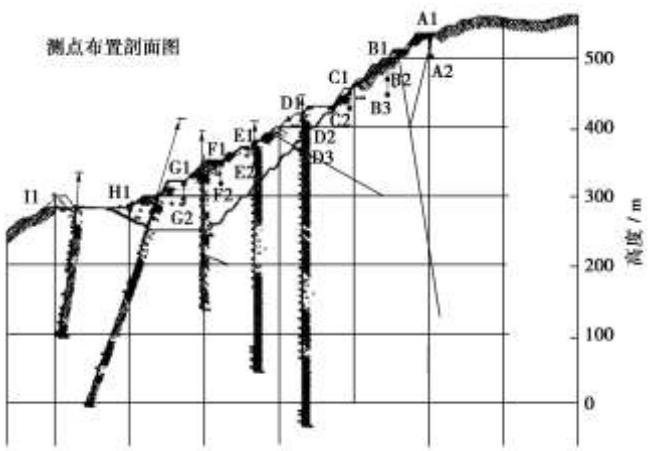


图 1 监测点布置剖面图

Fig. 1 Profile layout of monitoring points

选取 B2 测点 2009 年 3 月 1 日到 2009 年 4 月 30 日之间的监测数据 (见表 2) 进行位移预测, 验证动态修正时距权重的不等时距灰色优化模型在露天矿边坡变形预测应用的可行性。

表 2 B2 测点位移监测数据

Table 2 Monitoring data of displacement at measuring point B2

监测时间	累计时间 间隔/d	时距/d	累计水平 位移/mm
2009-03-01	0	0	4.35
2009-03-03	2	2	5.84
2009-03-05	4	2	6.21
2009-03-08	7	3	7.25
2009-03-11	10	3	9.93
2009-03-15	14	4	12.60
2009-03-20	19	5	14.22
2009-03-24	23	4	16.87
2009-03-31	30	7	17.52
2009-04-07	37	7	23.92
2009-04-15	45	8	27.83
2009-04-30	60	30	35.42

### 2.2 实例分析

首先, 取前 9 期数据组成原始序列, 以此建立传统不等时距 GM(1,1) 模型并对后 3 次的监测结果进行预测, 结果如表 3 所示。

如表 3 所示, 利用传统不等时距 GM(1,1) 模型对离散程度较高原始位移监测数据序列进行预测, 预测值与实测值偏差较大, 预测精度较低。为提高预测精度, 建立残差 GM(1,1) 模型进行修正, 结果如表 4 所

示。

表 3 传统不等时距 GM(1,1)模型预测结果

Table 3 Predicted results of traditional unequal interval GM (1,1) model

监测时间	传统不等时距 GM(1,1)模型预测				
	实测 /mm	预测 /mm	残差 /mm	残差率 /%	模型参数
2009-03-01	4.35	4.35	0.00	0.00	
2009-03-03	5.84	6.96	-1.12	-19.18	
2009-03-05	6.21	7.41	-1.20	-19.32	
2009-03-08	7.25	8.02	-0.77	-10.62	
2009-03-11	9.93	8.81	1.12	11.28	
2009-03-15	12.60	9.84	2.76	21.90	$a=-0.03147$ $P=0.89$
2009-03-20	14.22	11.34	2.88	20.25	$p=214.28$ $C=0.24$
2009-03-24	16.87	13.07	3.80	22.53	
2009-03-31	17.52	15.56	1.96	11.19	
2009-04-07	23.92	19.37	4.55	19.02	
2009-04-15	27.83	22.13	5.70	20.48	
2009-04-30	35.42	28.79	6.63	18.72	

表 4 一次残差 GM(1,1)模型修正结果

Table 4 Corrected results of one-time residual error GM(1,1) model

监测时间	一次残差 GM(1,1)模型修正				
	实测 /mm	预测 /mm	残差 /mm	残差率 /%	模型参数
2009-03-01	4.35	4.35	0.00	0.00	
2009-03-03	5.84	6.42	-0.58	-9.93	
2009-03-05	6.21	7.11	-0.90	-14.49	
2009-03-08	7.25	8.02	-0.77	-10.62	
2009-03-11	9.93	9.18	0.75	7.55	
2009-03-15	12.60	10.63	1.97	15.63	$a=-0.00121$ $P=1.00$
2009-03-20	14.22	12.68	1.54	10.83	$p=82099.72$ $C=0.13$
2009-03-24	16.87	14.97	1.90	11.26	
2009-03-31	17.52	18.14	-0.62	-3.54	
2009-04-07	23.92	22.82	1.10	4.60	
2009-04-15	27.83	26.08	1.75	6.29	
2009-04-30	35.42	33.70	1.72	4.86	

由表 4 可见, 通过建立残差 GM(1,1)模型进行修正, 模型的小误差概率  $P$  提高 12.36%、方差比值  $C$  降低 45.83%, 但预测值的残差率的变化仍较大。利用动态修正时距权重不等时距 GM(1,1)模型进行预测, 有效地解决了残差偏大问题, 预测结果如表 5 所示。

由表 5 可以很明显地看出, 动态修正时距权重预测模型与传统模型预测结果比较, 小误差概率  $P$  提高 12.36%、方差比值  $C$  降低 58.33%, 后 3 期预测值的残差率均值减少 18.23%; 与一次残差模型修正后结果比较, 小误差概率  $P$  不变、方差比值  $C$  降低 23.08%, 后 3 期预测值的残差率均值减少 4.08%。

从图 2 可以看出, 改进后模型的预测值接近真实的变形情况, 且变形趋势与观测值更为接近。

表 5 动态修正时距权重不等时距 GM(1,1)模型预测结果

Table 5 Predicted results of unequal interval GM(1,1) model based on dynamic correction of time-distance weight

监测时间	修正后不等时距 GM(1,1)模型预测				
	实测 /mm	预测 /mm	残差 /mm	残差率 /%	模型参数
2009-03-01	4.35	4.35	0.00	0.00	
2009-03-03	5.84	5.97	-1.12	-2.23	
2009-03-05	6.21	6.37	-1.20	-2.58	
2009-03-08	7.25	6.91	-0.77	4.69	
2009-03-11	9.93	10.59	1.12	-6.65	
2009-03-15	12.60	11.86	2.76	5.87	$a=-0.03236$ $P=1.00$
2009-03-20	14.22	13.73	2.88	3.45	$p=197.78$ $C=0.10$
2009-03-24	16.87	15.88	3.80	5.87	
2009-03-31	17.52	19.00	1.96	-8.45	
2009-04-07	23.92	23.82	0.10	0.42	
2009-04-15	27.83	27.33	0.50	1.80	
2009-04-30	35.42	35.88	-0.46	-1.30	

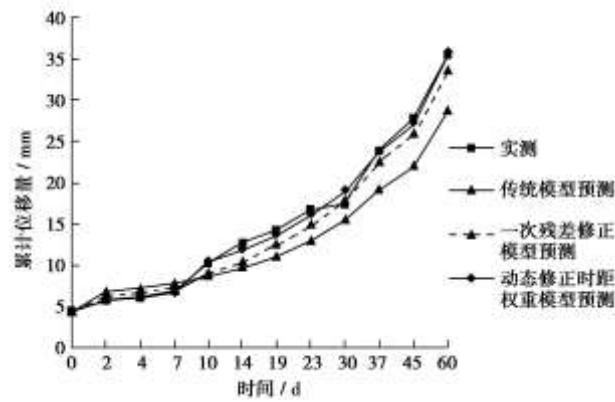


图 2 B2 测点位移实测值与模型预测值比较图

Fig. 2 Comparison of displacements at measuring point B2 between measured and predicted values

### 3 结 论

(1) 传统不等时距模型对边坡位移进行预测, 预测值与实测值偏差较大, 预测精度较低。在建立残差模型进行修正后, 模型的精度得到了提高, 但预测值的残差率的变化仍较大。建立的动态修正时距权重的不等时距预测模型, 有效地解决了残差偏大这一问题。

(2) 通过动态修正数据累加和累减过程中时距权重, 模型预测精度得到明显的提高, 预测值更为接近真实的变形情况。改进后模型的残差率起伏变小, 且变形趋势与观测值更为接近。

(3) 动态修正时距权重的不等时距灰色预测模型, 依据残差率的变化趋势实时地修正时距权重。可

以突出系统最新的变化趋势, 对预测精度的提高也具有较好的作用, 对边坡稳定性研究具有广泛的应用价值。

### 参考文献:

- [1] 马文涛. 基于灰色最小二乘支持向量机的边坡位移预测[J]. 岩土力学, 2010, 31(5): 1670 - 1674. (MA Wen-tao. Forecasting slope displacements based on grey least square support vector machines[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(5): 1670 - 1674. (in Chinese))
- [2] WU Cheng-mau, WEN Jet-chau, CHANG Kou-chiang. Evaluation of the gray model GM(1,1) applied to soil particle distribution[J]. Soil Science Society of America Journal, 2009, 73(6): 1775 - 1785.
- [3] 蒋刚, 林鲁生, 刘祖德, 等. 边坡变形的灰色预测模型[J]. 岩土力学, 2000, 21(3): 243 - 346. (JIANG Gang, LIN Lu-sheng, LIU Zu-de, et al. Prediction grey model for slope displacement[J]. Rock and Soil Mechanics, 2000, 21(3): 243 - 346. (in Chinese))
- [4] 王在泉. 边坡动态稳定预测预报及工程应用研究[J]. 岩石力学与工程学报, 1998, 17(2): 117 - 122. (WANG Zai-quan. Prediction of dynamic stability and its application in a slope project[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering , 1998, 17(2): 117 - 122. (in Chinese))
- [5] 许江, 季惠英, 唐晓军. 不等时距灰色模型的边坡位移预测及软件化[J]. 重庆大学学报, 2008, 31(5): 563 - 567. (XU Jiang, JI Hui-ying, TANG Xiao-jun. Predication and calculational software for slope displacement of unequal interval gray model[J]. Journal of Chongqing University, 2008, 31(5): 563 - 567. (in Chinese))
- [6] 蒋忠信. 泥石流沟谷演化的不等时距灰色预测[J]. 地理研究, 1994, 13(3): 53 - 59. (JIANG Zhong-xin. An unequal interval gray forecast to the development of debris flow valley[J]. Geographical Research, 1994, 13(3): 53 - 59. (in Chinese))
- [7] CHIANG W L. Dynamic slope stability analysis by grey prediction[J]. Kao Yuan J (Taiwan), 1996, 5(2): 253 - 259.
- [8] 李克刚, 许江, 黄国耀. 基于不等时距GM(1,1)模型预测边坡失稳变形[J]. 地下空间与工程学报, 2006, 2(6): 988 - 992. (LI Ke-gang, XU Jiang, HUANG Guo-yao. Prediction for slope displacement based on unequal interval GM (1,1) model[J]. Chinese Journal of Underground Space and Engineering, 2006, 2(6): 988 - 992. (in Chinese))
- [9] DENG J L. Introduction to grey system[J]. Grey Syst, 1989, 1: 1 - 24.
- [10] 邓聚龙. 灰色预测与决策[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1988: 86 - 128. (DENG Ju-long. Grey prediction and decision[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1988: 86 - 128. (in Chinese))
- [11] 邓聚龙. 灰色系统基本方法[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2005: 130 - 138. (DENG Ju-long. The primary methods of grey system theory and decision[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2005: 130 - 138. (in Chinese))