

梯度塑性理论的计算方法与应用

杜修力¹, 侯世伟¹, 路德春¹, 梁国平², 安超³

(1. 北京工业大学城市与工程安全减灾教育部重点实验室, 北京 100124; 2. 中国科学院数学与系统科学研究院飞箭软件有限公司, 北京 100098;
3. 北京大学地球与空间科学学院地球物理系, 北京 100871)

摘要: 基于有限元自动生成系统(FEPG), 开发使用梯度塑性理论的有限元程序, 用于解决应变软化后的网格依赖性问题。提出带阻尼因子的 $u-\lambda$ 算法, 联立求解位移方程和屈服面方程, 既可同时解得位移和塑性乘子, 又避免了广泛使用的应力返回算法中的应力拉回运算。在 D-P 准则中引入软化模量和材料内部特征长度, 使本构模型能够考虑软化和梯度效应。在软化问题求解上使用阻尼牛顿法, 算例结果表明, 带阻尼因子的 $u-\lambda$ 算法能够计算应变软化问题, 以有限元弱形式表达的梯度塑性理论, 使用一阶单元就能够得到合理的结果, 在一定网格范围能够得到稳定的应力应变曲线。

关键词: 梯度塑性理论; $u-\lambda$ 算法; 阻尼牛顿法; 应变软化; 网格依赖性

中图分类号: TU411 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2012)06-1094-08

作者简介: 杜修力(1962-), 男, 四川广安人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事水工抗震、抗爆等方面的研究。
E-mail: duxiuli@bjut.edu.cn。

Application of gradient plastic theory based on FEPG platform

DU Xiu-li¹, HOU Shi-wei¹, LU De-chun¹, LIANG Guo-ping², AN Chao³

(1. Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering of Ministry of Education, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China; 2. Beijing FEGEN Software Co., Ltd., Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100098, China; 3. School of Earth and Space Science, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Based on the FEPG platform, the finite element program using gradient plastic theory is developed to solve mesh dependence after strain softening. A $u-\lambda$ algorithm with damp factor is proposed, which can solve the equation of displacement and yield surface simultaneously. The algorithm can not only get displacement and plastic multiplier together, but also avoid the stress haul back calculation in stress return algorithm widely used in finite element solution procedures. The softening modulus and the internal character length are introduced into D-P yield function, and the constitutive model can consider strain softening and gradient effect. The damp Newton algorithm is used to calculate softening problems. The results of a case study show that the $u-\lambda$ algorithm with damp factor can be used to solve softening problems, the gradient plastic theory described by finite element weak form has no requirement of continuity, and appropriate outcome can be obtained by the first-order element, thus the mesh dependence of simulation is basically solved.

Key words: gradient plastic theory; $u-\lambda$ algorithm; damp Newton method; strain softening; mesh dependence

0 引言

岩土材料中的应变局部化现象一直是岩土工程学科的研究热点。岩土是不均匀材料, 随着塑性变形的发展, 变形模式会由均匀变形渐进发展成局限在有限宽度的带状区域内的非均匀变形, 即形成宏观剪切带。自然界中存在不同尺度的剪切带, 从岩石、土体中的微观剪切带到十几米、甚至几百公里长的巨型剪切带。

剪切带的研究主要从理论分析、试验研究和数值模拟三个方面进行。传统塑性理论没有包含材料内部长度参数, 难以预测剪切带的启动和形成后的特性。剪切带形成过程中应力应变关系表现出软化特性, 偏微分控制方程丧失椭圆型, 在传统有限元计算中则表现为剪切带的宽度和荷载位移曲线病态地依赖于网格的划分, 这种现象被称为网格敏感性或者网格依赖性。

克服有限元计算的网格依赖性, 主要使用有限元网格技术处理方法和改进本构模型方法。改进网格技术包括网格自适应技术^[1]、扩展有限元^[2]、无网格法^[3]等, 自适应网格技术没能考虑材料的力学特性, 只是从数值计算的角度来解决网格自锁问题, 不能完全克服网格敏感性问题。扩展有限元和无网格法是针对材料的强不连续问题如断裂等提出的, 作为有限元方法的扩展和补充, 在解决网格畸变问题上具有先天优势, 发展还不够成熟, 无网格法也存在计算量大、效率低等缺点, 许多无网格法的稳定性比较差, 缺乏严格的数学证明。

相比之下改进本构模型方法中的 Cosserat 连续体理论^[4]、梯度理论^[5-6]是从改进控制方程入手, 保持控制方程椭圆型, 能够同时考虑材料的力学特性, 是解决网格依赖性的一种合理可行的途径。梯度理论同经典塑性理论的主要区别是将软化参数的梯度引入材料的屈服函数, 从而使一点的屈服不再仅与该点的软化参数有关, 还受到相邻区域软化参数的影响。影响域的尺度将由所给定的材料内在特征长度决定。由于塑性区的大小总是一定的, 从而用不同的单元网格进行计算时, 将得到稳定的荷载位移关系曲线^[7]。梯度理论在数值实现方面的主要困难在于软化模式中塑性应变的二阶偏导数难以计算。宋二祥^[7]建议将该二阶偏导项用积分来代替, 便可以在求解边值问题的总体迭代过程中, 利用上次迭代所得结果来进行计算。De Borst 等^[8]基于 mises 屈服准则, 采用罚函数方法推导了只需满足 C⁰ 连续的混合元公式, 对一维和二维的边值问题进行了数值模拟, 使用三角形和四边形梯度塑性混合元等进行了应变局部化现象的模拟。李锡夔等^[9]提出了一个考虑有限应变和应用混合应变元的梯度弹塑性连续体有限元方法, 解析地导出了梯度塑性下一致性单元切线刚度矩阵和速率本构方程的一致性积分算法。Manzari 等^[10]将梯度塑性理论引入无网格法的环境, 进行了基本理论和公式的推导。Hashiguchi 等^[11]提出了能够描述应变速率的扩展梯度弹塑性本构方程, 用于预测剪切带宽度, 结果表明尽管应力应变依赖于材料参数, 剪切带的宽度由表征不均匀变形的梯度参数决定。朱以文等^[12]在 ABAQUS 中引入了一种八节点缩减积分的梯度塑性单元, 在边坡剪切带的计算中消除了经典有限元计算的网格依赖性问题, 可以得到正确的荷载位移曲线和稳定的剪切带宽度。Mroginiski

等^[13]将热力学与梯度理论结合进行饱和多孔材料变形和应变局部化的研究。根据当前的围压和饱和水平描述破坏模式的转化点, 推导了排水条件和不排水条件下不连续分叉的局部化的指标。

本文提出联立求解位移方程和屈服面方程的带阻尼因子的 $u-\lambda$ 算法, 可以同时解得位移和塑性乘子, 避免广泛使用的应力返回算法中应力拉回运算。在 D-P 模型中引入梯度塑性理论, 考虑应变软化和梯度效应, 在软化问题求解上使用阻尼牛顿法, 使椭圆方程保持正定性。基于有限元生成系统编制了梯度塑性理论有限元程序并进行算例分析。二维算例结果表明算法可行, 使用一阶单元就能够得到合理的结果。

1 基于阻尼牛顿法的梯度塑性理论

有限元程序自动生成系统(FEPG)是一个有限元语言的平台。采用了 3 项软件技术: 生成器技术; 组件化技术; 公式库技术。因其代码开放, 灵活性高, 故选择作为研究手段。

FEPG 由物理模型(即微分方程)和算法通过生成器技术产生数值计算程序。核心的问题就是将物理问题归结为微分方程表达式, 允许采用张量运算表达式, 可用公式库中微分算子构造微分方程表达式。首先由偏微分文件(PDE)生成单元计算程序; 然后由算法文件(NFE)调用单元计算程序, 生成组集线性代数方程组的程序, 这两部分程序是有限元计算解决问题的核心部分, 因此根据问题的方程表达式和算法通过 PDE 文件来给出物理模型是使用 FEPG 平台开发程序的主要工作^[14]。

1.1 阻尼牛顿法^[15]

数值求解非线性方程组

$$\psi(a) = P(a) - R = 0 \quad (1)$$

的一个最著名的方法是 Newton-Raphson 方法。它是一个最基本而且十分重要的方法, 目前使用的很多有效的迭代法都是其为基础而发展得到的。Newton 法虽然有收敛快和自校正等优点, 但是应用到实际计算中仍存在一些问题。例如, 在某些非线性问题(如理想塑性和软化塑性问题)的迭代过程中, Jacobi 矩阵 $K_T = \partial\psi/\partial a$ 可能是奇异的或者病态的。于是对 K_T 求逆会出现困难。为了克服这一点, 可以采用带参数的 Newton 法。需要引进一个正的阻尼因子 μ^n , 以使 $[K_T^n + \mu^n I]$ 成为非奇异的或者使它的病态性质减弱(这里 I 是 $N \times N$ 阶的单位矩阵)。这时在 Newton 法中用

$$a_{n+1} = a_n - (K_T^n + \mu^n I)^{-1} \psi(a^n) \quad (2)$$

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973 计划)项目
(2011CB013600); 教育部博士点基金项目(20101103110011); 国家高技术研究发展计划(863 计划)(2009AA044501)

收稿日期: 2011-04-15

代替 $a_{n+1} = a_n - (K_T^n)^{-1} \psi(a^n)$ 。式中, μ^n 的作用是改变了矩阵 K_T 的对角元素, 只要 μ^n 选得足够大就可使矩阵 $[K_T^n + \mu^n I]$ 具有对角优势, 从而消除了奇异性。

将阻尼牛顿法应用到弹塑性计算中, 进而提出带有阻尼因子的 $u-\lambda$ 算法, 阻尼因子能够强制保持控制方程的正定性, 解决应变软化求解的收敛困难问题。

1.2 $u-\lambda$ 算法

由弹塑性理论, 计算给定边界条件下的应力和位移分布时, 需要满足以下条件:

平衡方程为

$$L\sigma + F = 0 ; \quad (3)$$

应力矢量为

$$\sigma = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{xy}]^T ; \quad (4)$$

体积力 F 为

$$F = [F_x, F_y, F_z]^T ; \quad (5)$$

微分算子 L 为

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} ; \quad (6)$$

几何方程为

$$\varepsilon = L^T [u, v, w]^T . \quad (7)$$

其中, u, v, w 为坐标方向的位移, 应变矢量为

$$\varepsilon = [\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}]^T . \quad (8)$$

弹塑性材料的本构关系基于屈服函数和流动法则以增量形式给出。假设一个迭代步开始时总应变、塑性应变、应力分别为 $\varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \sigma_n$, 一个迭代步过程中产生的总应变、塑性应变、应力增量分别为 $\Delta\varepsilon_n, \Delta\varepsilon_n^p, \Delta\sigma_n$, 一个迭代步完成后的总应变、塑性应变和应力分别为 $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^p, \sigma_{n+1}$, 满足:

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n, \\ \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\varepsilon_n^p, \\ \sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma_n. \end{cases} \quad (9)$$

那么由第 n 个迭代步结果求第 $n+1$ 个迭代步结果需要求解的方程组 (10) 包括平衡方程、屈服面方程和流动法则:

$$\begin{cases} L\sigma_{n+1} + F = 0, \\ f_{n+1} = 0, \\ \Delta\varepsilon_n^p = \Delta\lambda_n \frac{\partial f}{\partial \sigma}. \end{cases} \quad (10)$$

式中, f_{n+1} 为屈服函数, 未知量为 $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+1}^p, \lambda_{n+1}$ 。

可由第 n 个迭代步的结果 ε_n, σ_n 求出第 $n+1$ 个迭代步的结果 $\varepsilon_{n+1}, \sigma_{n+1}$ 。

将方程组 (10) 中平衡方程写成弱形式得

$$(\sigma_{n+1}, \delta\varepsilon) = (F, \delta u) , \quad (11)$$

其中的 $(,)$ 表示求内积。化为增量形式即得到

$$(\Delta\sigma_n, \delta\varepsilon) = (F, \delta u) - (\sigma_n, \delta\varepsilon) . \quad (12)$$

弹性刚度矩阵 D 为

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix},$$

则有

$$\Delta\sigma_n = D\Delta\varepsilon_n^e = D(\Delta\varepsilon_n - \Delta\varepsilon_n^p) . \quad (13)$$

假设屈服函数只是应力与内变量 κ 的函数, 即 $f = f(\sigma, \kappa)$, 由一致性条件得

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma + \frac{\partial f}{\partial \kappa} d\kappa . \quad (14)$$

对式 (14) 进行线性化得

$$f_{n+1} - f_n = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \Delta\sigma_n + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \Delta\kappa_n . \quad (15)$$

即

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \Delta\sigma_n + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \Delta\kappa_n + f_n \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D(\Delta\varepsilon_n - \Delta\varepsilon_n^p) + \frac{\partial f}{\partial \kappa} m\Delta\lambda_n + f_n . \end{aligned} \quad (16)$$

式中, 内变量可以是塑性功、塑性体应变、广义塑性剪应变, m 取值如下^[15]:

$$m = \begin{cases} \sigma^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} & (\kappa = w^p = \int \sigma^T d\varepsilon^p) \\ e^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} & (\kappa = \theta^p = \int e^T d\varepsilon^p) \\ \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)} & (\kappa = \bar{\varepsilon}^p = \int ((d\varepsilon^p)^T d\varepsilon^p)^{1/2}) \end{cases} , \quad (17)$$

式中, $e^T = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ 。

将式 (16) 代入 $f_{n+1} = 0$, 得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D(\Delta\varepsilon_n - \Delta\varepsilon_n^p) + \frac{\partial f}{\partial \kappa} m\Delta\lambda_n + f_n = 0 . \quad (18)$$

将式 (12)、(13)、(18) 带入 (10) 得

$$\begin{cases} \left(D(\Delta\epsilon_n - \Delta\epsilon_n^p), \delta\epsilon \right) = (F, \delta u) - (\sigma_n, \delta\epsilon), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D(\Delta\epsilon_n - \Delta\epsilon_n^p) + \frac{\partial f}{\partial \kappa} m \Delta\lambda_n + f_n = 0, \\ \Delta\epsilon_n^p = \Delta\lambda_n \frac{\partial f}{\partial \sigma}. \end{cases} \quad (19)$$

将式(19)中的流动法则代入式(17)、(18)中, 得到

$$\begin{cases} \left(D\left(\Delta\epsilon_n - \Delta\lambda_n \frac{\partial f}{\partial \sigma}\right), \delta\epsilon \right) = (F, \delta u) - (\sigma_n, \delta\epsilon), \\ \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} m \right) \Delta\lambda_n = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta\epsilon_n + f_n. \end{cases} \quad (20)$$

其中屈服函数方程可以整理为

$$\Delta\lambda_n = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta\epsilon_n + f_n}{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} m}. \quad (21)$$

为了求解方程, 在式(19)中采用阻尼牛顿法, 使控制方程的矩阵满足正定性要求, 设阻尼因子为 α , 则得到

$$\Delta\lambda_n = \frac{1}{A} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta\epsilon_n + f_n \right). \quad (22)$$

其中

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} m + \alpha. \quad (23)$$

α 的取值如下, 分别考虑软化和硬化情况:

$$\alpha = \begin{cases} 3.5 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial f}{\partial \sigma} & \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa} m \leq \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right), \\ -2 \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial f}{\partial \sigma} & \left(\frac{\partial f}{\partial \kappa} m > \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right). \end{cases} \quad (24)$$

将式(22)代入式(20)中的平衡方程得

$$\begin{aligned} (D\Delta\epsilon_n, \delta\epsilon) - \left(\frac{1}{A} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta\epsilon_n, \delta\epsilon \right) D \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ = \left(\frac{f_n}{A}, \delta\epsilon \right) D \frac{\partial f}{\partial \sigma} + (F, \delta u) - (\sigma_n, \delta\epsilon), \end{aligned} \quad (25)$$

求解式(25)即可得到位移。

对于弹塑性模型, 如果在增量过程中发生了屈服, 那么更新后的应力状态点应该落在硬化后的屈服面上, 而屈服面的大小和增量过程中发生的塑性应变大小相关, 塑性应变大小又要按流动法则确定, 一个正确的程序应保证这些都是协调的。常用的应力积分算法是应力返回算法, 即先是弹性预测, 然后对弹性预测的应力进行拉回屈服面的修正。而式(25)中右端存在上步屈服函数的值, 允许计算残差的存在, 当前一次迭代值落在屈服面时为零, 因 $f_n = 0$, 但当 $f_n \neq 0$

时, 上述方程可自动校正, 回到屈服面, 避免了拉回计算。

如果将式(20)中屈服函数写成关于塑性乘子的弱形式:

$$\begin{aligned} (f_n, \delta\lambda) + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta\epsilon_n, \delta\lambda \right) \\ = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} m \right) \Delta\lambda_n, \delta\lambda. \end{aligned} \quad (26)$$

参照(23)使用阻尼牛顿算法, 将其与平衡方程弱形式联立得到

$$\begin{cases} (D\Delta\epsilon_n, \delta\epsilon) - \left(D \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta\lambda_n, \delta\epsilon \right) = (F, \delta u) - (\sigma_n, \delta\epsilon) \\ (A\Delta\lambda_n, \delta\lambda) - \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta\epsilon_n, \delta\lambda \right) = (f_n, \delta\lambda). \end{cases} \quad (27)$$

当给定边界条件, 求解联立方程组(27), 结果同时满足位移方程和屈服面方程, 即迭代求解出的应力一定在硬化屈服面上。这种算法引入阻尼因子, 适用于软化问题求解, 可以同时求得塑性乘子和位移, 并避免应力的拉回运算, 称为带阻尼因子的联立求解 $u-\lambda$ 算法。

程序中使用增量的全量形式处理, 将对应的平衡方程和屈服函数方程写成全量形式:

$$\begin{cases} (D\epsilon_{n+1}, \delta\epsilon) - \left(D \frac{\partial f}{\partial \sigma} \lambda_{n+1}, \delta\epsilon \right) \\ = (D\epsilon_n, \delta\epsilon) - \left(D \frac{\partial f}{\partial \sigma} \lambda_n, \delta\epsilon \right) + (F, \delta u) - (\sigma_n, \delta\epsilon), \\ (A\lambda_{n+1}, \delta\lambda) - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} D\epsilon_{n+1}, \delta\lambda \right) \\ = (A\lambda_n, \delta\lambda) - \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} D\epsilon_n, \delta\lambda \right) + (f_n, \delta\lambda). \end{cases} \quad (28)$$

1.3 $u-\lambda$ 算法的梯度塑性理论应用

梯度塑性理论是解决网格依赖性的一种可行方法, 因梯度项的存在使其数值求解存在一定难度, 如位移和塑性乘子的联立求解和对单元连续性的要求。将位移和塑性乘子同时进行有限元离散时, 由于存在梯度项, 塑性乘子要满足 C^1 阶的连续性要求, 因此对插值函数有选择, 需要使用高阶单元或者混合单元。本文使用等效积分弱形式, 算法对单元连续性没有高阶要求, 采用常规4节点单元计算。下面在联立求解 $u-\lambda$ 算法框架内引入梯度塑性理论。

岩土工程中D-P屈服准则应用广泛, 屈服函数可以写为

$$f = q - p \tan \beta - d = 0, \quad (29)$$

其中, $p = -I_1/3$, $q = \sqrt{3J_2}$, d 和 β 是 D-P 准则中屈服线在 $p-q$ 平面上的截距和倾角, 与黏聚力和内摩擦角有关。假定 d 发生软化, 引入软化模量和梯度项。梯度项的引入使得求解必须使用联立求解方式。梯度塑性理论下的 D-P 屈服面可表示为

$$f(\sigma, k) = q - p \tan \beta - (d + \bar{h}k + \bar{h}l^2 \nabla^2 k), \quad (30)$$

其中, 梯度塑性理论中应变软化效应主要由 $\bar{h}k$ 项体现, $\bar{h}l^2 \nabla^2 k$ 项则给出了软化在梯度上的限制, \bar{h} 为软化模量、 l 为材料的内部特征参数, k 为硬化参数, 对于相关流动法则, 与塑性乘子的关系如下:

$$dk = \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial \sigma} t \delta \lambda)^2} / \bar{h} \neq \eta. \quad (31)$$

参考式(14)~(16), 带有软化项和梯度项的屈服函数可线性化为

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \Delta \sigma_n + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \Delta \kappa_n - \bar{h} \eta \Delta \lambda_n - \bar{h} l^2 \eta \nabla^2 \Delta \lambda_n \\ &= f_n + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D(\Delta \varepsilon_n - \Delta \varepsilon_n^p) + \frac{\partial f}{\partial \kappa} m \Delta \lambda_n - \\ &\quad \bar{h} \eta \Delta \lambda_n - \bar{h} l^2 \eta \nabla^2 \Delta \lambda_n. \end{aligned} \quad (32)$$

将流动法则代入平衡方程和屈服面方程中, 消去 $\Delta \varepsilon_n^p$ 得到

$$\begin{cases} \left(D \left(\Delta \varepsilon_n - \Delta \lambda_n \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right), \delta \varepsilon \right) \\ = (F, \delta u) - (\sigma_n, \delta \varepsilon), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \left(\Delta \varepsilon_n - \Delta \lambda_n \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial f}{\partial \kappa} m \Delta \lambda_n - \\ \bar{h} \eta \Delta \lambda_n - \bar{h} l^2 \eta \nabla^2 \Delta \lambda_n + f_n = 0. \end{cases} \quad (33)$$

式(33)中的屈服函数方程整理可以得到

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} m + \bar{h} \eta \right) \Delta \lambda_n \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta \varepsilon_n - \bar{h} l^2 \eta \nabla^2 \Delta \lambda_n + f_n. \end{aligned} \quad (34)$$

对屈服函数式(34)使用阻尼牛顿方法, 引入阻尼因子 α , 得到

$$A \Delta \lambda_n = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta \varepsilon_n - \bar{h} l^2 \eta \nabla^2 \Delta \lambda_n + f_n \right), \quad (35)$$

式中,

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{\partial f}{\partial \kappa} m + \bar{h} \eta + \alpha. \quad (36)$$

阻尼因子 α 的取值见式(24), 其中系数可以针对不同的问题适当调整, 本文经过对存在理论解问题的计算, 阻尼因子分别取为 3.5 和 2.0。

将屈服函数(35)写成塑性乘子的弱形式

$$\begin{aligned} &(A \Delta \lambda_n, \delta \lambda) + (\bar{h} l^2 \eta \nabla^2 \Delta \lambda_n, \delta \lambda) - \\ &\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta \varepsilon_n, \delta \lambda \right) = (f_n, \delta \lambda), \end{aligned} \quad (37)$$

进一步使用分部积分得到

$$\begin{aligned} &(A \Delta \lambda_n, \delta \lambda) - (\bar{h} l^2 \eta \nabla \Delta \lambda_n, \nabla \delta \lambda) - \\ &\left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta \varepsilon_n, \delta \lambda \right) = (f_n, \delta \lambda). \end{aligned} \quad (38)$$

联立平衡方程和屈服面方程得到

$$\begin{cases} (D \Delta \varepsilon_n, \delta \varepsilon) - \left(D \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta \lambda_n, \delta \varepsilon \right) \\ = (F, \delta u) - (\sigma_n, \delta \varepsilon), \\ (A \Delta \lambda_n, \delta \lambda) - (\bar{h} l^2 \eta \nabla \Delta \lambda_n, \nabla \delta \lambda) \\ - \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta \varepsilon_n, \delta \lambda \right) = (f_n, \delta \lambda). \end{cases} \quad (39)$$

其中, 屈服面方程同样存在右端项, 即使前一次迭代残值不等于零, 得出的解仍满足屈服面方程, 避免了拉回运算。但是屈服函数方程右端项 $(f_n, \delta \lambda)$ 由于梯度项的存使其在屈服函数中直接求解不便, 依据式(30), 写成弱形式表示式为

$$(f_n, \delta \lambda) = (q - p \tan \beta - d, \delta \lambda) - (\bar{h} \eta \lambda_n, \delta \lambda) - (\bar{h} l^2 \eta \nabla^2 \lambda_n, \delta \lambda). \quad (40)$$

分部积分得到

$$(f_n, \delta \lambda) = (q - p \tan \beta - d, \delta \lambda) - (\bar{h} \eta \lambda_n, \delta \lambda) + (\bar{h} l^2 \eta \nabla \lambda_n, \nabla \delta \lambda). \quad (41)$$

与经典 D-P 屈服函数 f_n^{dp} 相比, 式(14)可以写成 $(f_n, \delta \lambda) = (f_n^{dp}, \delta \lambda) - (\bar{h} \eta \lambda_n, \delta \lambda) + (\bar{h} l^2 \eta \nabla \lambda_n, \nabla \delta \lambda)$ 。(42)

这样将屈服函数 f_n 的求解分为两部分, 软化项和梯度项直接放到方程组中求解。得到将平衡方程和屈服函数方程的联立方程组式(43), 即梯度塑性理论的联立求解公式。式(43)的矩阵形式推导过程详见附录。

$$\begin{cases} (D \Delta \varepsilon_n, \delta \varepsilon) - \left(D \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta \lambda_n, \delta \varepsilon \right) \\ = (F, \delta u) - (\sigma_n, \delta \varepsilon), \\ (A \Delta \lambda_n, \delta \lambda) - (\bar{h} l^2 \eta \nabla \Delta \lambda_n, \nabla \delta \lambda) - \\ \left(\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T D \Delta \varepsilon_n, \delta \lambda \right) = (f_n^{dp}, \delta \lambda) - \\ (\bar{h} \eta \Delta \lambda_n, \delta \lambda) + (\bar{h} l^2 \eta \nabla \Delta \lambda_n, \nabla \delta \lambda). \end{cases} \quad (43)$$

梯度塑性有限元将塑性乘子作为一个未知量与位移一起求解, 依据 Kuhn-Tucker 条件

$$f(\sigma, \kappa) d \lambda = 0, \quad d \lambda \geq 0, \quad f(\sigma, \kappa) \leq 0, \quad (44)$$

当前应力点位于屈服面内部时, $f(\sigma, \kappa) < 0$, 则 $d\lambda = 0$; 当前应力点位于屈服面上时, $f(\sigma, \kappa) = 0$, $d\lambda$ 依据式(43)求解。

将式(43)的全量形式在偏微分方程 PDE 文件和算法程序 NFE 文件中实现并给定边界条件, 即梯度塑性有限元方法。

2 算例

将梯度塑性理论的有限元程序用于土样压缩计算, 选取平面应变试验条件, 试样尺寸为 $50 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$, 使用 4 节点单元, 每个节点有竖向位移、水平位移和塑性乘子 3 个自由度。施加初始固结压力 100 kPa, 进行应变控制加载。试样的上下端部是位移边界条件, 顶部加载过程中各点竖向应变始终相等, 约束水平位移; 左右两侧是力的边界条件, 试样底部固定, 如图 1 所示。

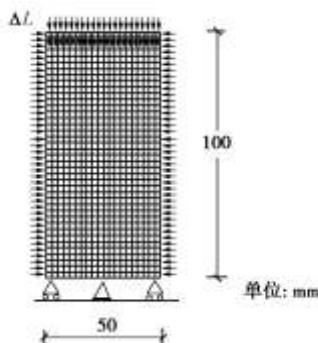


图 1 有限元几何模型

Fig. 1 Geometric model of finite elements

基于 D-P 模型的参数, 弹性模量为 10 MPa, 泊松比 0.4, 有效密度为 1500 kg/m^3 , β 为 45° , d 为 70 kPa, 阻尼参数取为 3.5 和 2.0, 使用 $1.0e-5$ 误差控制, 竖向压缩 5 mm。

不考虑梯度项时, 网格划分 $20 \times 40 = 800$ 个单元, 不同软化模量, 即 \bar{h} 分别为 -10, -70, -100, -200, -300 kPa 时的应力应变曲线如图 2 所示, σ_a 和 ε_a 分别是轴向应力、应变, 计算结果说明算法能够计算应变软化。

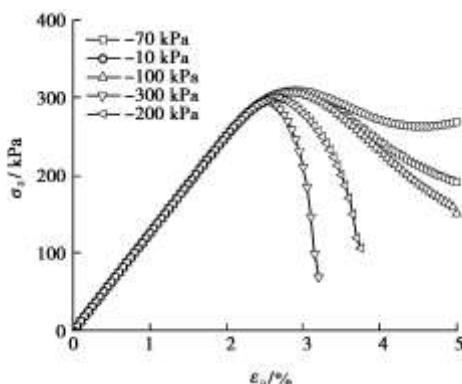
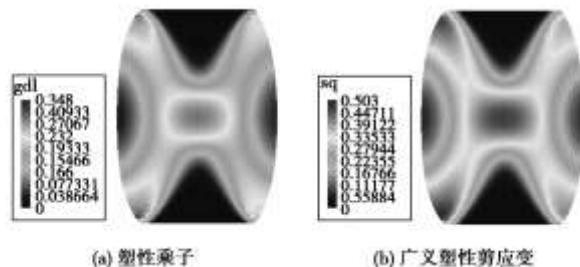


图 2 不同软化模量的应力应变曲线

Fig. 2 Stress-strain curves of different softening moduli

其中软化模量为 -100 kPa 时的塑性乘子与广义塑性剪应变云图如图 3 所示, 试样受到端部约束的影响呈鼓胀破坏形式, 形成了明显的交叉型应变集中区域, 即剪切带。

材料内在特征长度是根据问题的性质、要求来确定, 可取 0.1 m, 或者 $1.3D_{50}$ 等^[12], 当软化模量取 -100 kPa, 内部特征参数 0.001 m, 划分不同单元进行分析, 分别为 $10 \times 20 = 200$ 、 $15 \times 30 = 450$ 、 $20 \times 40 = 800$ 的网格划分, 得到的应力应变曲线如图 4 所示, 竖向应变在 3% 左右达到峰值, 不同网格得到的峰值应力相同, 过峰值后应变 4% 之前的应力应变曲线一致, 说明没有因网格不同产生应力的分叉, 应变超过 4% 后, 不同网格产生差异, 最大是 25 kPa。



(a) 塑性乘子 (b) 广义塑性剪应变

图 3 塑性乘子和等效塑性应变云图

Fig. 3 Nephograms of plastic multiplier and generalized plastic strain

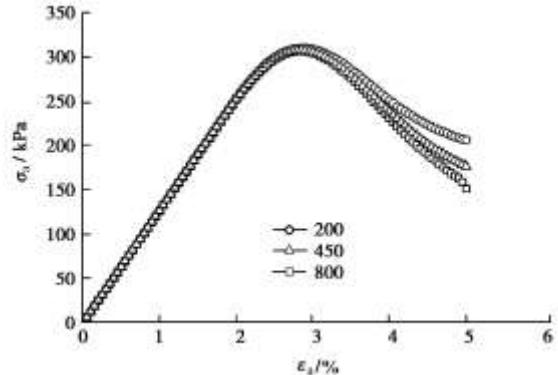


图 4 不同网格划分的应力应变曲线

Fig. 4 Stress-strain curves of different meshes

对于 $15 \times 30 = 450$ 个网格的情况, d 为 40 kPa, 软化模量 -60 kPa, 其他参数不变, 改变梯度项系数 0.001, 0.01, 0.1 m, 得到的应力应变曲线如图 5 所示, 不同内部特征长度对试样的峰值影响不大, 对峰值后的下降过程有影响, 随着内部特征参数减小, 梯度项引起的差异减小。

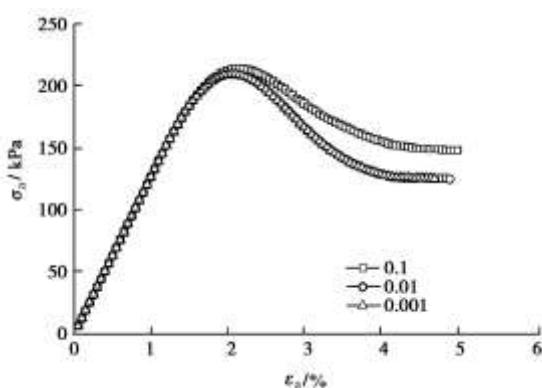


图 5 不同梯度项系数的应力应变曲线

Fig. 5 Stress-strain curves of different gradient coefficients

验证不同内部特征长度情况, 梯度理论的计算情况, 当梯度项系数 0.1 m, 其他参数同上, 不同网格划分情况的应力应变曲线如图 6 所示, 网格分别为 $10 \times 20=200$, $15 \times 30=450$, $20 \times 40=800$, $25 \times 50=1250$, $30 \times 60=1800$ 。对于网格为 200, 450, 800 的情况见图 6(a) 与图 4 相比, 因 d 值和软化模量绝对值降低, 应力峰值降低, 且峰值后下降段平缓; 不同网格应力应变曲线比较接近, 在最后的最大差异是 28 kPa。继续细化网格到 1250, 1800 的情况见图 6(b), 峰值稍有差异, 网格数为 800 与 1800 的最大差值是 14 kPa, 应力应变曲线的峰值后软化段基本一致。与文献[12]相比, 在网格差别较大的情况下能得到更为稳定的应力应变曲线。

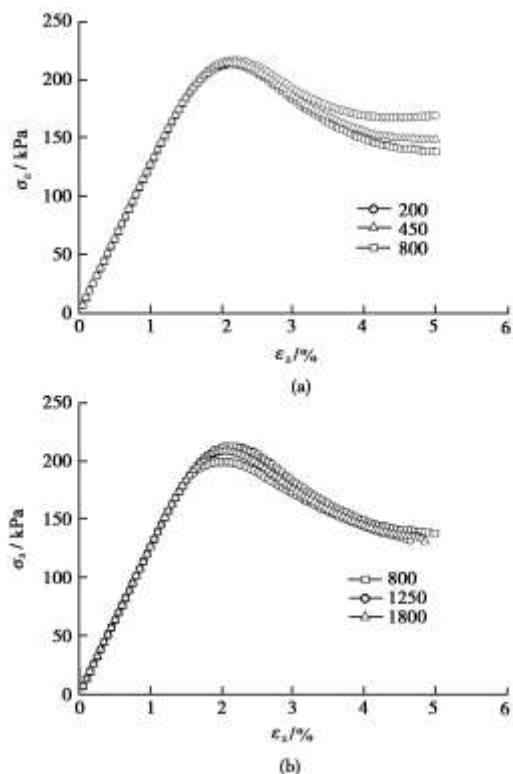


图 6 不同网格划分的应力应变曲线

Fig. 6 Stress-strain curves of different meshes

3 结语

本文基于有限元自动生成系统编制了使用梯度塑性理论的有限元程序。提出带阻尼因子的 $u-\lambda$ 算法, 联立求解位移方程和屈服面方程, 同时得到位移和塑性乘子, 并避免了应力返回算法中的应力拉回运算; 在软化问题求解上使用阻尼牛顿法。二维算例结果表明, 使用一阶单元就能够得到合理稳定的应力应变曲线关系。

参考文献:

- [1] ZIENKIEWICZ O C, HUANG M S, PASTOR M. Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1995, **19**(2): 127 - 148.
- [2] BELYTSCHKO T, BLACK T. Elastic crack growth in finite element with minimal remeshing[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, **45**(5): 601 - 620.
- [3] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element-free Galerkin method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, **37**(2): 229 - 256.
- [4] DE BORST R, SLUYLIS L J. Localization in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1991, **90**(1): 805 - 827.
- [5] FLECK N A, HUTCHINSON J W. Strain gradient plasticity[J]. Advances in Applied Mechanics, 1997, **33**: 295 - 361.
- [6] MUHLHAUS H B, AIFANTIS E C. A variational principle for gradient plasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 1991, **28**(7): 845 - 857.
- [7] 宋二祥. 软化材料有限元分析的一种非局部方法[J]. 工程力学, 1995, **12**(4): 93 - 101. (SONG Er-xiang. A nonlocal approach for finite element analysis of softening material[J]. 1995, **12**(4): 93 - 101. (in Chinese))
- [8] DE BORST R, PAMIN J. Some novel developments in finite element procedures for gradient-dependent plasticity[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, **39**(14): 2477 - 2505.
- [9] 李锡夔, CESCOTTO S. 梯度塑性的有限元分析及应变局部化模拟[J]. 力学学报, 1996, **28**(5): 575 - 584. (LI Xin-kui, CESCOTTO S. Finite element analysis for gradient plasticity and modeling of strain localization[J]. Acta Mechanica Sinica, 1996, **28**(5): 575 - 584. (in Chinese))
- [10] MANZARI M T, REGUEIRO R A. Gradient plasticity

- modeling of geomaterials in a meshfree environment. Part I: Theory and variational formulation[J]. Mechanics Research Communications, 2005, 32(5): 536 - 546.
- [11] HASHIGUCHI K, TSUTSUMI S. Gradient plasticity with the tangential-subloading surface model and the prediction of shear-band thickness of granular materials[J]. International Journal of Plasticity, 2007, 23(5): 767 - 797.
- [12] 朱以文, 徐 眇, 蔡元奇, 等. 边坡稳定的剪切带计算[J]. 计算力学学报, 2007, 24(4): 441 - 446. (ZHU Yi-wen, XU Han, CAI Yuan-qi, et al. Calculation of shear band for slope stability[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, 24(4): 441 - 446. (in Chinese))
- [13] MROGINSKI J L, ETSE G, VRECH S M. A thermodynamical gradient theory for deformation and strain localization of porous media[J]. International Journal of Plasticity, 2011, 27(4): 620 - 634.
- [14] 梁国平. 有限元语言[M]. 北京: 科学出版社, 2009. (LIANG Guo-ping. Finite element language[M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese))
- [15] 殷有泉. 非线性有限元基础[M]. 北京: 北京大学出版社, 2007. (YIN You-quan. Non-linear finite element[M]. Beijing: Peking University Press, 2007. (in Chinese))

附录: 算法矩阵形式推导过程

为了求解屈服函数的偏导数, 引入对称矩阵 P , δ , 令

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A})$$

$$\delta = (1/3, 1/3, 1/3, 0, 0, 0)^T。$$

用应力表示 p , q , 屈服函数可以写为

$$f(\sigma, k) = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma^T P \sigma + \tan \beta \delta^T \sigma} - \left(d + \bar{h}k + \bar{h}l^2 \nabla^2 k \right)_0. \quad (\text{B})$$

应力偏导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \tan \beta \delta^T + \frac{3P\sigma}{2\sqrt{\frac{3}{2}\sigma^T P \sigma}}。 \quad (\text{C})$$

为了对塑性乘子使用 C^0 阶连续插值函数, 引入向量 $\phi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$, 其中 $\varphi_x = \frac{\partial \lambda}{\partial x}$, $\varphi_y = \frac{\partial \lambda}{\partial y}$, $\varphi_z = \frac{\partial \lambda}{\partial z}$ 。

塑性乘子的梯度为 $\nabla \lambda = \phi$, 则 $\nabla^2 \lambda = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}$ 。

将位移 u 和塑性乘子 λ 作为独立的变量进行离散, 设 a 和 Λ 为单元节点位移和塑性乘子列向量, 插值函数分别为 N 和 q , 则单元内任意点位移和塑性乘子通过节点插值 $u = Na$, $\Delta \lambda = q^T \Delta \Lambda$ 则 $\varepsilon = LNa = Ba$, $\nabla^2(\Delta \lambda) = \nabla^2 q^T \Delta \Lambda = p^T \Delta \Lambda$ 。

将屈服函数和平衡方程写成矩阵形式对于相关法则

$$\begin{vmatrix} K_{aa} & K_{a\lambda} & 0 \\ K_{\lambda a} & K_{\lambda\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & K_{\varphi\varphi} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{\lambda\lambda}^c & K_{\lambda\varphi}^c \\ 0 & K_{\lambda\varphi}^{cT} & K_{\varphi\varphi}^c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} da \\ d\Lambda \\ d\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_e + f_a \\ f_\lambda \\ 0 \end{vmatrix}。 \quad (\text{D})$$

其中, $K_{\varphi\varphi} = \int_V (-\bar{h}l^2 N^T N) dV$, $K_{\lambda\lambda} = \int_V \left(\bar{h} \eta l^2 q \nabla^T N dV + D \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) qq^T dV$, $K_{\lambda\varphi} = \int_V \bar{h} \eta l^2 q \nabla^T N dV$, $K_{\lambda\varphi}^c = \int_V q q^T dV$, $K_{\varphi\varphi}^c = \int_V N^T N dV$, $K_{\lambda\varphi}^{cT} = \int_V -q N dV$ 。