边坡可靠度分析的高斯过程方法

苏国韶，肖义龙
(广西大学土木建筑工程学院，广西 南宁 530004)

摘 要：针对传统边坡可靠度分析方法的局限性，将高斯过程机器学习与重要抽样方法相结合，提出了边坡可靠度分析的高斯过程方法。利用极限平衡分析构造少量的学习样本，采用基于统计学习原理的高斯过程模型重构边坡隐式功能函数，实现边坡功能函数及其偏导数的显式表达，并构造合理的迭代方式，在计算过程中不断提升高斯过程模型对失效概率贡献较大区域的重构精度，进而应用重要抽样法计算边坡的失效概率与可靠指标。研究结果表明，该方法是可行的，具有较高的计算精度和效率。

关键词：边坡；可靠度；重要抽样方法；高斯过程；机器学习
中图分类号：TU47 **文献标识码**：A **文章编号**：1000－4548(2011)06－0916－05

作者简介：苏国韶(1973－)，男，广西南宁人，博士后，教授，主要从事土木水利工程防灾与结构安全等方面的教学与研究工作。E-mail: suguoshao@163.com。

Gaussian process method for slope reliability analysis

SU Guo-shao，XIAO Yi-long
(School of Civil Engineering and Architecture, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract: Considering the limitation of conventional methods, a new method for slope reliability analysis is proposed combined with the Gaussian process (GP) and importance sampling method (ISM). A small number of learning samples are built by the limit equilibrium method. The implicit performance function is reconstructed by the GP model based on statistical learning. Thus, the implicit performance and its derivatives in slope stability analysis are approximated by the GP model with explicit formulation. An iterative algorithm is presented to improve constantly the reconstructing precision at the important region, which contributes to the failure probability significantly. Then, the importance sampling method is employed to get reliability results of slope. The test results show that the proposed method is feasible and has high accuracy and efficiency.

Key words: slope; reliability; importance sampling method; Gaussian process; machine learning

0 引 言

边坡可靠度分析是边坡工程研究领域中的重要研究课题[1-2]。边坡可靠度分析中，功能函数常为非线性的隐式函数，给经典一次二阶矩法（FORM）带来了困难，而响应面方法(RSM)是解决此类问题比较理想的方法[3]。但是，响应面方法在处理高度非线性功能函数时，计算误差较大。直接蒙特卡罗方法（MCS）适用于求解隐式功能函数的可靠度问题且计算精度较高，但当结构失效概率小于 10^{-3} 以下量级时，计算效率较差且模拟工作量大，常采用重要抽样方法（ISM）来分析[4]。但是，当功能函数值计算代价较高时，重要抽样方法的计算工作量仍然巨大，导致其在诸多实际工程应用中受到了较大限制，而随机有限元法[5]也存在着同样的问题。近年来，一些学者将神经网络（ANN）[6-7]、支持向量机（SVM）[8]等机器学习方法引入边坡可靠度研究领域，取得了不少有价值的研究成果，但这些方法本身还存在一些不完善之处，如求解精度有待进一步提高、计算精度过度依赖预设学习样本及 ANN 的小样本问题推广能力欠佳等。

高斯过程[9]（Gaussian Process，GP）是近年来机器学习领域的研究热点，并在很多领域得到了成功的应用[10-11]。它有严格的统计学理论基础，对于处理高维数、小样本、非线性等复杂问题具有良好的适应性，而且还具有参数自适应获取和预测结果具有概率意义等优点。本文将高斯过程机器学习方法与重要抽样方法相结合，提出了边坡可靠度分析的高斯过程方法，为边坡可靠度分析提供一条新的途经。

1 高斯过程的基本原理

在机器学习领域中，GP是指在高斯随机过程与

基金项目：国家自然科学基金项目（50809017）；中国博士后科学基金面上及特别资助项目（20080440812，200902354）
收稿日期：2010－02－05

Bayes学习理论基础上发展起来的一种机器学习方法[9]。从统计学的角度来看，GP是这样的一个随机过程：其任意有限变量集合的分布都是高斯分布，它的全部统计特征完全由均值 $m(t)$ 和协方差函数$k(t, t')$来确定：

$$f(t) \sim \mathrm{GP}(m(t), k(t, t')) \quad 。 \tag{1}$$

假设观察目标值 y 被噪声腐蚀，它与真实输出值 t 相差 e：

$$y = t + e \quad 。 \tag{2}$$

式中　e 为独立的随机变量，符合高斯分布，均值为0，方差为 s_{n}^2，即

$$e \sim N\left(0, s_{\mathrm{n}}^2\right) \quad 。 \tag{3}$$

观察目标值y的先验分布为：

$$y \sim N\left(0, K + s_{\mathrm{n}}^2 I\right) \quad 。 \tag{4}$$

式中　$K=K(X, X)$为 $m\times m$ 阶对称正定的协方差矩阵，矩阵中的任一项 K_{ij} 度量了 x_i 和 $x_j(i, j=1, 2, \cdots, m)$ 的相关性。m 个训练样本输出 y 和 1 个测试样本输出 y^*所形成的联合高斯先验分布为

$$\begin{bmatrix} y \\ y^* \end{bmatrix} \sim N(0, \begin{bmatrix} K(X, X) + s_{\mathrm{n}}^2 I & K(X, x^*) \\ K(X, x^*)^{\mathrm{T}} & k(x^*, x^*) \end{bmatrix}) \quad 。 \tag{5}$$

式中　$k(X, x^*)$是测试点 x^*与训练集的所有输入点 X 的 $m\times 1$ 阶协方差矩阵，可简写为 $k(x^*)$，$k(x^*, x^*)$是测试点 x^*自身的协方差。常用的协方差函数为

$$k_y(x_{\mathrm{p}}, x_{\mathrm{q}}) = s_{\mathrm{f}}^2 \exp\left(-\frac{1}{2l^2}\left|x_{\mathrm{p}} - x_{\mathrm{q}}\right|^2\right) + s_{\mathrm{n}}^2 d_{\mathrm{pq}}, \tag{6}$$

式中最优超参数 l，s_{f}，s_{n} 可通过极大似然法自适应获得，即建立学习样本条件概率的对数似然函数后，对超参数求偏导，再采用共轭梯度等优化方法搜索出超参数的最优解。对数似然函数的形式为

$$L = \ln p(y \mid X) = -\frac{1}{2} y^{\mathrm{T}} (K + s_{\mathrm{n}}^2 I)^{-1} y - \frac{1}{2} \ln\left|K + s_{\mathrm{n}}^2 I\right| - \frac{n}{2} \ln 2\pi \quad 。 \tag{7}$$

根据贝叶斯原理在训练集的基础上预测出与 x^*对应的最可能的输出值。采用贝叶斯原理的目的是利用观察到的真实数据不断更新概率预测分布，即给定新的输入 x^*、训练集的输入值 x 和观察目标值 y 的条件下，推断出 y^*的最大可能的预测后验分布 $P(y^*|x^*, X, y)$，预测后验分布为

$$y^* \sim N(\bar{y}(x^*), s^2(x^*)) \quad 。 \tag{8}$$

y^*的均值为

$$\bar{y}(x^*) = k^{\mathrm{T}}(x^*)(K + s_{\mathrm{n}}^2 I)^{-1} y \quad , \tag{9}$$

式中，$k(x^*)= K(X, x^*)$为 $m\times 1$ 阶协方差矩阵。设 $a = \left(K + s_{\mathrm{n}}^2 I\right)^{-1} y$，式（9）可改写为

$$\bar{y}(x^*) = \sum_{j=1}^{m} a\, k\left(x_j, x^*\right) \quad 。 \tag{10}$$

2　边坡可靠度分析的高斯过程方法

2.1　重要抽样方法

重要抽样方法的基本思想是通过改变随机抽样的中心，使样本点有较多机会落入失效域，增加结构功能函数$Z<0$的机会[10]。设结构功能函数为$Z=g(X)$，随机变量X的联合概率密度函数为$f_X(x)$，则结构失效概率为

$$p_{\mathrm{f}} = \int_{-\infty}^{+\infty} I[g_X(x)] f_X(x) \mathrm{d}x \quad , \tag{11}$$

式中　$I(x)$为x的示性函数，当$x<0$时取1，否则取0。

假设重要抽样概率密度函数为 $p_{\mathrm{V}}(v)$，式（11）可改写为

$$p_{\mathrm{f}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I[g_X(v)] f_X(v)}{p_{\mathrm{V}}(v)} p_{\mathrm{V}}(v) \mathrm{d}v \quad 。 \tag{12}$$

若用 $p_{\mathrm{V}}(v)$ 对V抽样，得到$v_k(v_{k1}, v_{k2}, \cdots, v_{kn})^{\mathrm{T}}$ $(k=1, 2, \cdots, N)$，当各变量x_i相互独立时，则p_{f}的无偏估计为

$$\hat{p}_{\mathrm{f}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} I\left[g\left(v_k\right)\right] \prod_{i=1}^{n} \frac{f_{Xi}(v_{ki})}{p_{\mathrm{V}_i}(v_{ki})} \quad 。 \tag{13}$$

由于验算点附近失效区域对失效概率的贡献可能最大，可将抽样中心点取在采用FORM法计算得到的验算点。$p_{\mathrm{V}}(v)$ 取正态分布的概率密度函数

$$p_{\mathrm{V}i}(v) = \frac{1}{s_{\mathrm{V}i}} j\left(\frac{v - m_{\mathrm{V}_i}}{s_{\mathrm{V}i}}\right) \quad i=1, 2, \cdots, n \quad 。 \tag{14}$$

V的均值和标准差可取为 $\mu_{\mathrm{V}}= x^*$，$\sigma_{\mathrm{V}}=\sigma_X$，其中$x^*$为验算点。

2.2　可靠指标与失效概率的高斯过程表达式

假设边坡的极限状态方程为

$$Z = g\left(x\right) = K - 1 = F(x) - 1 = 0 \quad , \tag{15}$$

其中，K为边坡安全系数；x表示影响边坡稳定性的随机变量，其均值为μ_x，标准差为σ_x，如果x中含有非正态分布变量时，可进行当量正态化处理[4]，将其转换为正态分布变量；$F(x)$表示x与K之间的非线性隐含关系。利用GP模型逼近该功能函数时，有

$$g(x) \approx \bar{y}(x) = \sum_{j=1}^{m} a\, k(x_j, x) \quad 。 \tag{16}$$

设 n 维验算点 $x^*=(x^*_1, x^*_2, \cdots, x^*_n)$，在点 x^* 处将功能函数按泰勒级数展开保留至一次项，可得

$$Z_{\mathrm{Q}} = \bar{y}(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{y}(x^*)}{\partial x_i}\left(x_i - x_i^*\right) \quad 。 \tag{17}$$

边坡可靠指标为

$$b = \frac{m_{Z_{\mathrm{Q}}}}{s_{Z_{\mathrm{Q}}}} = \frac{\bar{y}(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \bar{y}(x^*)}{\partial x_i}\left(m_{x_i} - x_i^*\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial \bar{y}(x^*)}{\partial x_i}\right]^2 s_{x_i}^2}} \quad 。 \tag{18}$$

验算点坐标可表达为

$$x_i^* = m_{x_i} + b s_{x_i} \cos q_{x_i} \quad i=1，2，\cdots，n \quad ，(19)$$

式中 $\cos q_{x_i} = -\dfrac{\partial \bar{y}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i} s_{x_i} \Bigg/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\dfrac{\partial \bar{y}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_i}\right]^2 s_{x_i}^2}$ 。

根据式（6）、（16），$\bar{y}(x^*)$ 的偏导数表达式为

$$\frac{\partial \bar{y}(x^*)}{\partial x_i} = \sum_j^m a \frac{\partial k(x_j, x^*)}{\partial x_i}$$

$$= \sum_j^m a \frac{x_i^* - x_{ij}}{l_i^2} s_f^2 \exp\left(-\frac{1}{2l^2}\left|x_j - x^*\right|^2\right) 。(20)$$

将式（20）分别代入式（18）、（19），即可得到可靠指标 β 与验算点 $\boldsymbol{x}^*$ 的高斯过程表达式。

将式（16）代入式（13），N 次抽样的 p_f 的无偏估计可改写为如下高斯过程表达式：

$$\hat{p}_f = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} I\left[\sum_{j=1}^{m} a_j k\left(x_j, v_k\right)\right] \prod_{i=1}^{n} \frac{f_{X_i}\left(v_{ki}\right)}{P_{V_i}\left(v_{ki}\right)} 。 \quad (21)$$

对应的可靠指标为

$$\beta_I = -\Phi^{-1}\left(p_f\right) 。 \quad (22)$$

式中 $\phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数。

2.3 方法的实现步骤

当边坡的功能函数较复杂或为隐式时，可利用极限平衡分析或数值方法等手段获得边坡的多组输入及其响应，以此作为高斯过程的学习样本，采用学习后的高斯过程模型逼近边坡的功能函数，就可以十分方便地利用显式的高斯过程功能函数对各个随机变量求一阶偏导数并根据 FORM 法获得验算点，进而采用重要抽样法计算失效概率。具体步骤如下：

（1）假定初始验算点 $\boldsymbol{x}^*=(x_1，x_2，\cdots，x_n)$，一般取均值点。

（2）构造初始学习样本。通过边坡稳定性分析程序计算功能函数值 $g(x_1，x_2，\cdots，x_n)$ 与 $g(x_1，x_2，\cdots，x_i \pm f\sigma_i，\cdots，x_n)$，得到 $2n+1$ 个学习样本集。f 一般取 0.5~2。

（3）利用 GP 对学习样本集进行学习，根据式（16）构建 GP 模型以逼近真实的隐式功能函数。

（4）根据式（18）计算当前第 k 迭代步的可靠指标 $\beta^{(k)}$，根据式（19）获得新的验算点 $\boldsymbol{x}^*$。

（5）为在迭代过程中不断提升 GP 在对失效概率贡献大区域（验算点的附近区域）的重构精度，并尽可能减小边坡分析次数，将当前第 k 迭代步的新验算点 $\boldsymbol{x}^*$ 及其对应的 GP 预测值添入原样本集，使学习样本总数增加至 $2n+1+k$ 个。

（6）收敛条件为 $|\beta^{(k)}-\beta^{(k-1)}|<\varepsilon$（文中取 10^{-3}）。如果收敛条件不满足，返回步骤（3），进行迭代计算。否则，转下步。

（7）以上述计算得到的验算点为抽样中心，随机生成 N 个的随机变量，重要抽样模拟时采用高斯过程模型替代边坡分析程序进行功能函数值的计算，避免大量的边坡分析工作以提高计算效率。

（8）由式（21）计算失效概率 p_f，并由式（22）推求出对应的可靠指标 β_I。

3 算例研究

采用 3 个算例验证本文方法的可行性。其中算例 1 为一具有显式高次非线性功能函数的可靠度问题，求解时预设功能函数是“隐式”的，用来考查本文方法求解高次非线性隐式功能函数可靠度问题的可行性；算例 2 与算例 3 为边坡可靠度分析的典型算例。

3.1 算例 1

某结构的高次非线性功能函数为 $g\left(x\right)=1/40x_1^4+2x_2^2+x_3+3$，各随机变量均服从标准正态分布。

构造的初始学习样本见表 1（f=0.5，2），采用 GP 模型进行学习，对应的功能函数真值与 GP 模型预测值（表 1）非常接近。这时可利用学习成功的 GP 模型建立显式的功能函数，然后进行迭代求解，计算程序经过 2 步迭代后收敛，此时学习样本增至 15 个，GP 模型的超参数对数值为 $\ln\theta$=ln(3.479，2.190，5.162，4.772，-4.577)，对应的 α 值见表 2，验算点为 x^*=(0.00，0.01，-3.00)，然后以此验算点为抽样中心进行 10^6 次重要抽样，失效概率计算结果见表 3。

表 1 算例 1 的初始学习样本

Table 1 Initial learning samples of Example 1

序号	x_1	x_2	x_3	g	GP 预测值
1	-0.5	0	0	3.002	3.016
2	0	-0.5	0	3.500	3.503
3	0	0	-0.5	2.500	2.491
4	0.5	0	0	3.002	3.016
5	0	0.5	0	3.500	3.503
6	0	0	0.5	3.500	3.492
7	-2	0	0	3.400	3.399
8	0	-2	0	11.000	11.000
9	0	0	-2	1.000	0.995
10	2	0	0	3.400	3.399
11	0	2	0	11.000	11.000
12	0	0	2	5.000	4.997
13	0	0	0	3.000	2.991

表 2 GP 模型的 α 值

Table 2 Values of $\boldsymbol{\alpha}$ for GP model

序号	α	序号	α
1	-140.4461	9	49.7455
2	-25.7808	10	11.0629
3	83.9214	11	1.8951
4	-141.5734	12	25.3123
5	-25.8018	13	86.4642
6	80.2094	14	-8.2794
7	10.7811	15	-9.3808
8	1.8951		

表 3 算例 1 的计算结果对比

Table 3 Comparison of results for Example 1

方法	MCS	FORM	RSM	GP
$p_f/(10^{-4})$	3.44	13.50	13.50	3.448
p_f 相对误差/%	0	292.44	292.44	0.23

结果表明，以直接 MCS 法模拟 10^8 次的结果为相对精确解时，本文方法的失效概率 p_f 的相对误差仅为 0.23%，结果令人满意。从表 3 中还可看出，由于功能函数的高度非线性，FORM 法与 RSM 法（f=2）的失效概率相对误差均高达 292.44 %，无法获得令人满意的结果。故该算例从数学实验的角度验证了本文方法对于求解高度非线性隐式功能函数可靠度问题的可行性，能克服 FORM 法、RSM 法等传统方法求解此类问题时计算精度不高的局限性。

3.2　算例 2

有一均质边坡（见图 1），设土的重度 γ、黏聚力 c 和内摩擦角 φ 是相互独立的正态变量，均值 μ_c=15 kPa，μ_φ=18°，μ_γ=20 kN·m^{-3}，变异系数均为 0.05。采用本文方法进行可靠性分析时，功能函数设为 $g=K-1=F(c, \varphi, \gamma)-1$。

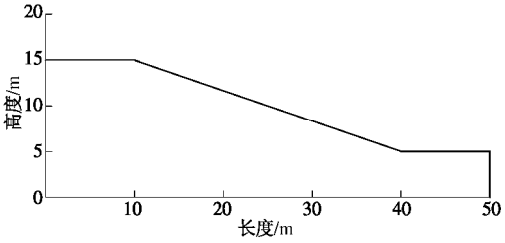

图 1 算例 2 的边坡剖面图

Fig. 1 Geometry of slope for Example 2

采用 Bishop 法程序构造的 7 个初始学习样本（f=2）见表 4，采用 GP 模型进行学习，并利用学习后的 GP 模型对另外 10 个随机生成的测试样本进行边坡安全系数预测，预测结果见图 2，预测值与程序计算值相当吻合。此时可利用学习成功的 GP 模型建立显式的功能函数，然后进行迭代求解，迭代 3 步收敛后即可进行 10^5 次重要抽样模拟，可靠指标 β_I 的计算结果见表 5。

表 4 算例 2 的初始学习样本

Table 4 Initial learning samples of Example 2

样本序号	c/kPa	φ/(°)	γ/(kN·m^{-3})	K-1
1	13.5	18	20	0.851
2	16.5	18	20	0.981
3	15	16.2	20	0.782
4	15	19.8	20	1.053
5	15	18	18	0.988
6	15	18	22	0.857

从表 5 中可见，以直接 MCS 法模拟 10^6 次的结果为相对精确解时，本文方法的计算精度与 Rosenbleuth 法[8]的一致，可靠指标相对误差均为 0.18%，明显优于 SVM 法[8]的结果。此外，本文方法的边坡分析次数较少，计算耗时仅约为直接 MCS 法的 1/177（计算机配置为 CPU@1.83 GHz，内存 504 MB，下同）。

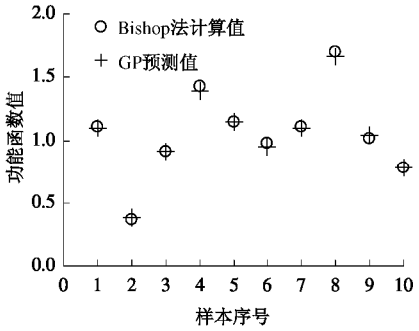

图 2 边坡安全系数计算值与预测值比较

Fig. 2 Comparison between safety factors calculated by Bishop's method and predicted by GP

表 5 算例 2 的计算结果比较

Table 5 Comparison of results for Example 2

方法	MCS	Rosenbleuth[8]	SVM [8]	GP
β	11.10	11.12	10.74	11.08
相对误差(%)	0	0.18	3.24	0.18
边坡分析次数	10^6	—	10	7
计算耗时/s	265	—	—	1.5

3.3　算例 3

有一非均质边坡[2]（见图 3），已知土坡坡度比为 1∶2，高度 H=10 m，土坡包含三土层，土的重度 γ=19.5 kN·m^{-3}，设黏聚力 c，内摩擦角 φ 是相互独立的正态分布变量，统计特征如表 6 所示，功能函数设为 $g=K-1=F(c, \varphi)-1$。

边坡安全系数 K 分别采用 Bishop 法和 Spencer 法进行计算，分别构造的 11 个初始样本见表 7。程序迭代 4 步收敛后即可进行 10^5 次重要抽样模拟，计算结果见表 8。

从表 8 可知，以直接 MCS 法模拟 10^6 次的结果为相对精确解时，本文方法的可靠指标相对误差为 0.17%（Bishop 法）、0.23%（Spencer 法），结果令人满意，明显优于 SVM 法的结果[11]。此外，本文方法的边坡分析次数较少，计算耗时仅约为直接 MCS 法的 1/180，进一步验证了本文方法对于求解边坡可靠度问题的可行性和实用性。

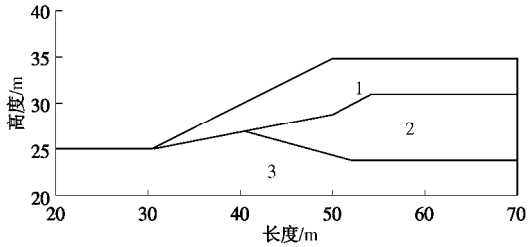

图 3 算例 3 的边坡剖面图

Fig. 3 Geometry of slope of Example 3

表 6 算例 3 的随机变量统计特征

Table 6 Properties of stochastic variables of Example 3

土层号	c /kPa		φ/(°)	
	均值	标准差	均值	标准差
1	0	0	38	4
2	5.3	0.7	23	3
3	7.2	0.2	20	3

表 7 算例 3 的初始学习样本

Table 7 Initial learning samples of Example 3

样本号	φ_1 /(°)	φ_2 /(°)	c_2 /kPa	φ_3 /(°)	c_3 /kPa	K-1	
						Bishop	Spencer
1	38	23	5.3	20	7.2	0.414	0.386
2	46	23	5.3	20	7.2	0.482	0.466
3	30	23	5.3	20	7.2	0.158	0.157
4	38	29	5.3	20	7.2	0.474	0.440
5	38	17	5.3	20	7.2	0.324	0.324
6	38	23	6.7	20	7.2	0.423	0.395
7	38	23	3.9	20	7.2	0.405	0.377
8	38	23	5.3	26	7.2	0.567	0.566
9	38	23	5.3	14	7.2	0.179	0.154
10	38	23	5.3	20	7.6	0.426	0.397
11	38	23	5.3	20	6.8	0.404	0.375

表 8 算例 3 的计算结果比较

Table 8 Comparison of results for Example 3

方法	MCS		SVM[13]		GP	
	Bishop	Spencer	Bishop	Spencer	Bishop	Spencer
β	3.711	3.478	3.4293	3.0481	3.7047	3.4859
相对误差/%	0	0	7.59	12.59	0.17	0.23
边坡分析次数	10^6	10^6	19	19	11	11
计算耗时/s	378	379	—	—	2.1	2.1

4 结 语

本文将高斯过程机器学习方法与重要抽样方法相结合，在边坡稳定性极限平衡分析的基础上，提出了一种边坡可靠度分析的高斯过程方法。研究结果表明，本文方法是可行的，适用于求解边坡的可靠度问题，与传统方法相比较，具有计算精度高、计算效率高、参数自适应化且易于与各种边坡分析软件相结合等优点，为解决复杂边坡特别是具有高度非线性隐式功能函数或计算代价较高的边坡可靠度问题提供了一条新的途径，对其他工程结构的可靠度分析也具有一定的借鉴意义。

参考文献：

[1] 祝玉学. 边坡可靠性分析[M]. 北京: 冶金工业出版社, 1993. (ZHU Yu-xue. Slope reliability analysis[M]. Beijing: Metallurgical Industry Press, 1993. (in Chinese))

[2] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析——原理·方法·程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003. (CHEN Zu-yu. Soil slope stability analysis—theory, methods and programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2003. (in Chinese))

[3] 苏永华, 赵明华, 蒋德松, 等. 响应面方法在边坡稳定可靠度分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, **25**(7): 1417 – 1424. (SU Yong-hua, ZHAO Min-hua, JIANG De-song, etal. Application of response surface method to reliability analysis of slope stability[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, **25**(7): 1417 – 1424. (in Chinese))

[4] 赵国藩. 工程结构可靠性理论与应用[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1996. (Zhao Guo-fan. Reliability theory and its applications for engineering structures[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1996. (in Chinese))

[5] 刘 宁. 可靠度随机有限元法及其工程应用[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2001. (LIU Ning. Stochastic finite element method of reliability and its application to engineering[M]. Beijing: Chinese Water Power Press, 2001. (in Chinese))

[6] PENG Huai-sheng, DENG Jian, GU De-sheng. Earth slope reliability analysis under seismic loadings using neural network[J]. Journal of Central South University of Technology, 2005, **12**(5): 606 – 610.

[7] 邓 建, 朱合华. 基于神经网络的岩土工程结构随机有限元分析[J]. 同济大学学报, 2002, **30**(3): 269 – 272. (DENG Jian, ZHU He-hua. Finite element Monte-Carlo method using neural networks for geotechnical reliability analysis[J]. Journal of Tongji University, 2002, **30**(3)：269 – 272. (in Chinese))

[8] 赵洪波. 基于支持向量机的边坡可靠性分析[J]. 岩土工程学报, 2007, **29**(6): 820 – 823. (ZHAO Hong-bo. Reliability analysis of slope based on support vector machine[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, **29**(6): 820 – 823. (in Chinese))

[9] SEEGER M. Gaussian processes for machine learning[J]. International Journal of Neural System, 2004, **14**(2): 69 – 106.

[10] 张 明. 结构可靠度分析 – 方法与程序[M]. 北京: 科学出版社, 2009. (ZHANG Ming. Structure reliability analysis: methods and procedures[M]. Beijing: Science Press, 2001. (in Chinese))

[11] ZHAO Hong-bo. Slope reliability analysis using a support vector machine[J]. Computers and Geotechnics, 2008, **35**(3): 459 – 467.