

基于线性接触模型的颗粒材料细 - 宏观弹性常数 相关关系研究

徐小敏, 凌道盛*, 陈云敏, 黄 博

(浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室, 浙江 杭州 310058)

摘 要: 细观参数的正确选取是离散元模拟成功的关键, 然而, 目前细观参数的选取具有一定的人为性和不确定性, 导致分析结果的不可比性。利用颗粒材料单元体宏观力学参数和颗粒细观参数间的相关性, 通过室内三轴试验的 PFC^{3D} 模拟和结果的回归分析, 基于线性接触模型建立了颗粒材料初始杨氏模量、初始泊松比等宏观弹性常数与颗粒法向刚度、颗粒刚度比等细观弹性常数间的经验公式。研究表明: 对于线性接触模型, 颗粒材料的初始杨氏模量和剪切模量约与围压的 1/10 次方成正比, 并约与颗粒粒径的 0.9 次方成反比。初始泊松比则约与颗粒刚度比的 1/14 次方成正比, 而与颗粒粒径几乎无关。常见砂土的颗粒刚度比为 2.0~20.7。

关键词: 线性接触模型; 细观弹性常数; 宏观弹性常数; 颗粒刚度比; 颗粒粒径; 相关关系

中图分类号: TU441; O347.7

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 4548(2010)07 - 0991 - 08

作者简介: 徐小敏(1982 -), 男, 浙江江山人, 博士研究生, 主要从事颗粒材料多尺度研究。E-mail: xuxiaomin19820212@126.com。

Correlation of microscopic and macroscopic elastic constants of granular materials based on linear contact model

XU Xiao-min, LING Dao-sheng, CHEN Yun-min, HUANG Bo

(Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering of Ministry of Education, Zhejiang University, Hangzhou 310058, China)

Abstract: For the discrete element method (DEM), the key to a successful simulation lies in proper micro-parameters. However, the current way to select micro-parameters is often subjective and unreliable, resulting in incomparability among different simulations. Based on the linear contact model, a set of empirical formulas are presented to describe the correlation between macroscopic elastic constants of granular materials and microscopic elastic constants of particles by simulating tri-axial tests with PFC^{3D} and through regression analysis of numerical results. The macroscopic elastic constants include the initial Young's modulus and the initial Poisson's ratio, and the microscopic elastic constants include the normal stiffness, stiffness ratio of particle, etc. It is found that the initial Young's modulus and the shear modulus are approximately proportional to one tenth power of the confining pressure, and inversely proportional to nine tenths power of the particle size. The initial Poisson's ratio is approximately proportional to one fourteenth power of the stiffness ratio of the particle for the linear contact model, and almost independent of the particle size. It is also found that the rational stiffness ratio of the particle ranges from 2.0 to 20.7 for the common sand.

Key words: linear contact model; microscopic elastic constant; macroscopic elastic constant; stiffness ratio of particle; particle size; correlation

0 引 言

1979 年, Cundall 等^[1]提出了基于圆盘的颗粒离散单元法, 用于颗粒介质力学行为的研究。20 世纪 90 年代以来, 颗粒离散单元法及其应用在国内外得到迅猛发展, 各种商用软件相继出现, 美国 ITASCA 公司开发的 PFC^{2D/3D} 软件是其中的杰出代表。目前颗粒离散

基金项目: 国家自然科学基金项目(50778163, 50708095); 国家“973”重点基础研究课题(2007CB714200); 地震行业专项基金项目(200808022)

收稿日期: 2009 - 03 - 27

*通讯作者

元法已广泛应用于采矿、岩土等诸多领域^[2], 成为研究颗粒材料 (granular material) 的重要工具。

颗粒离散单元法利用牛顿第二定律和力-位移法则确定颗粒的运动和接触面上的力, 其核心是颗粒接触特性, 即接触本构。接触本构由表征刚度、阻尼和摩擦等特性的细观模型和参数描述。研究表明, 细观参数决定着颗粒材料的宏观响应, 只有在细观参数正确选取的前提下, 离散元模拟才能获得成功^[2-6]。

然而, 描述接触本构的细观参数通常是未知的, 亦很难通过试验的方法直接确定, 不同文献选用的细观参数往往也差异迥然^[1-10]。因此, 细观参数确定方法的研究已成为离散元应用研究的关键之一。就常用的线性接触模型而言, 目前针对其细观参数的研究主要可分成两类。

(1) 一类是根据颗粒的物理力学参数确定细观刚度参数。Mindlin^[11]假设两弹性体为椭圆接触得到颗粒切向刚度与法向刚度的比值为 2/3~1.0。王泳嘉等^[12]根据两弹性球受集中力作用, 邢纪波等^[13]根据应力波在离散单元中的传播条件分别得到了各自的接触法向和切向刚度的表达式。Renzo 等^[9]则基于材料力学特性研究建议了初始切向刚度与法向刚度的比值。由于颗粒材料细观结构的复杂性, 上述研究成果间的差异较大。

(2) 另一类则是根据颗粒材料的宏观物理力学性质确定细观参数。Hentz 等^[14]在利用离散元研究混凝土时, 基于最小二乘法得到了由宏观弹性常数表征的接触刚度。张振南等^[15]采用虚内键理论研究得到的法向键和切向键的刚度系数表达式也值得借鉴。目前, 通常的做法是通过标定过程 (calibration process) 确定细观参数, 即在数值模拟室内试验过程中, 通过不断调整, 找到一组细观参数, 使数值试样的宏观力学响应充分逼近室内试验结果^[2-3, 6-7, 10]。这一方法虽然适用性较强, 但每次分析都需要反复试算, 耗费大量时间。

颗粒材料是由大量颗粒组成的, 因此, 颗粒材料的宏观特性必然取决于颗粒的细观特性, 即材料宏观参数与颗粒细观参数间必然存在一定的相关关系。

本文采用 PFC^{3D} 模拟室内三轴排水试验, 通过对大量分析结果的总结, 建立了基于线性接触模型的颗粒材料细观弹性常数和宏观弹性常数间的经验表达式。当然, 本文将土粒简化为弹性颗粒, 与真实的砂土仍有差距。

1 线性接触模型及其细观参数

由于具有简单直观等优点, 线性接触模型已得到

广泛应用^[1-10]。为了方便起见, 下文简要介绍线性接触模型、滑移模型及其细观参数。

1.1 线性接触模型^[2]

在离散元法中, 当两颗粒接触时 (见图 1), 接触力与相对位移可表示为

$$\left. \begin{aligned} F_i^n &= K^n U^n n_i, \\ \Delta F_i^s &= -k^s \Delta U_i^s \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, F_i^n 为法向接触力, K^n 为法向接触刚度, U^n 为法向相对位移, n_i 为单位法向矢量, ΔF_i^s 为切向接触力增量, k^s 为切向接触刚度, ΔU_i^s 为切向位移增量。

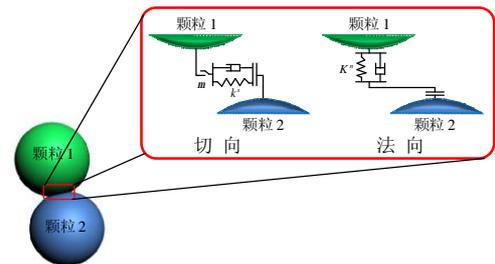


图 1 两颗粒间法向、切向接触模型

Fig. 1 Model of normal and shear contact forces at interface between two particles

在线性接触模型中, 假设相互接触的两颗粒为串联, 则接触刚度与颗粒刚度间的关系可表示为

$$k^x = \frac{k_x^{[1]} k_x^{[2]}}{k_x^{[1]} + k_x^{[2]}}, \quad (2)$$

式中, $\mathbf{x} = \{\mathbf{n}, \mathbf{s}\}$ 分别代表切向和法向, k^x 为接触刚度, $k_x^{[1]}$, $k_x^{[2]}$ 分别为颗粒 1 和 2 在各自相应方向上的刚度。可见, 对于线性接触模型, 当 $k_x^{[1]} = k_x^{[2]}$ 时, 颗粒刚度比 h (即 $\frac{k_n}{k_s}$) 等于接触刚度比 $\frac{K^n}{k^s}$ 。

1.2 滑移模型^[2]

滑移是相互接触颗粒的一种固有特性。该滑移模型没有法向抗拉强度, 当切向接触力 F_i^s 超过最大允许切向力 F_{\max}^s 时, 颗粒发生滑移。其中

$$F_{\max}^s = m |F_i^n|, \quad (3)$$

式中, m 为颗粒摩擦系数, F_i^n 为法向接触力。

1.3 细观参数确定方法

文献[2]根据弹性梁在纯轴向荷载和纯切向荷载作用下的分析, 得到了颗粒法向和切向刚度为

$$\left. \begin{aligned} k_n &= 4R E_c, \\ k_s &= \frac{1}{h} k_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中, E_c 为颗粒接触模量, $R = \frac{R^{[1]} + R^{[2]}}{2}$ 。

诸多文献直接采用式 (4) 进行参数取值, 并取

$h=1.0$ ^[1-2, 6-8], 也有文献取 $h>1.0$ ^[3-6, 9-10], 但多为人
为给定, 未给出明确的取值依据。

Mindlin^[1, 11]根据两弹性体为椭圆接触时的受力状
态, 指出颗粒刚度比 h 为 $1.0\sim 1.5$ (见图 2)。

王泳嘉等^[12]根据两弹性球受集中力作用, 得出法
向接触刚度, 建议颗粒刚度比 h 的取值范围为 $1\sim 10$ 。

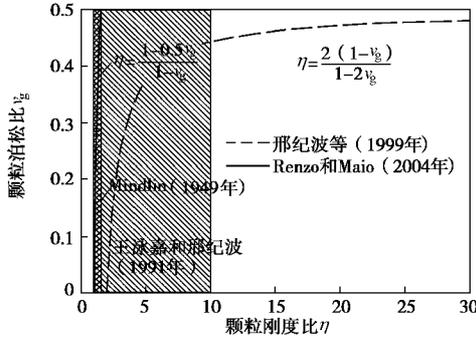


图 2 颗粒刚度比 h 随颗粒泊松比 v_g 的变化规律

Fig. 2 Variation of stiffness ratio h with Poisson's ratio v_g

邢纪波等^[13]根据应力纵波和剪切波在离散单元
中的传播条件, 得到了法向和切向接触刚度分别为

$$\left. \begin{aligned} K^n &= \frac{\pi^2 m^{[1]} m^{[2]} E_g (1 - v_g)}{l_{\min}^2 (m^{[1]} + m^{[2]}) r (1 + v_g) (1 - 2v_g)}, \\ k^s &= \frac{\pi^2 m^{[1]} m^{[2]} G_g}{l_{\min}^2 (m^{[1]} + m^{[2]}) r} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中, $m^{[1]}, m^{[2]}$ 分别为颗粒 1 和 2 的质量, r 为颗粒
密度, E_g, v_g 为颗粒的弹性模量和泊松比, G_g 为颗粒
的剪切模量, l_{\min} 为颗粒系统中最小颗粒的直径。当
两颗粒性质相同时, 由式 (5) 可得

$$h = 1 + 1/(1 - 2v_g) \quad (6)$$

由式 (6) 可知, 当颗粒泊松比 v_g 为 $0\sim 0.45$ 时,
其对应的颗粒刚度比 h 范围为 $2\sim 11$ 。随着 v_g 逼近
 0.5 , h 则趋于无穷大 (见图 2)。

Renzo 等^[9]则基于材料的力学特性给出了颗粒法
向刚度与初始切向刚度的比值 h ,

$$h = \frac{k_n}{k_{t0}} = \frac{\frac{1 - 0.5v_g^{[1]}}{G_g^{[1]}} + \frac{1 - 0.5v_g^{[2]}}{G_g^{[2]}}}{\frac{1 - v_g^{[1]}}{G_g^{[1]}} + \frac{1 - v_g^{[2]}}{G_g^{[2]}}}, \quad (7)$$

式中, $v_g^{[1]}, v_g^{[2]}$ 分别为颗粒 1 和 2 的泊松比, $G_g^{[1]}, G_g^{[2]}$
分别为颗粒 1 和 2 的剪切模量。当两颗粒的材料性质
相同时, 式 (7) 退化为

$$h = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1 - v_g} \right) \quad (8)$$

显然, 当颗粒泊松比 v_g 为 $0\sim 0.5$ 时, 颗粒刚度比

满足 $1.0 < h < 1.5$ (如图 2)。从图 2 可以看出, 上述各
研究结果间差异较大。

Hentz 等^[14]在利用离散元法研究混凝土时, 基于
最小二乘法提出:

$$h = \frac{1 + v}{1 - a_k v}, \quad (9)$$

式中, v 为颗粒材料的泊松比, $a_k = 2.65$, 如图 3 所示。

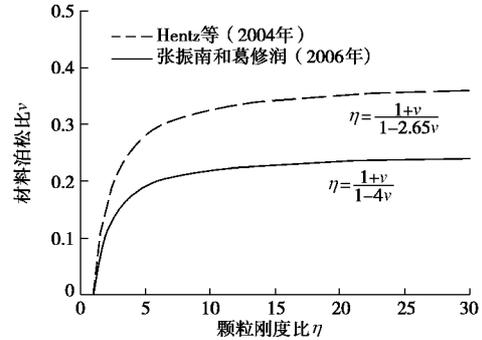


图 3 颗粒刚度比 η 随材料泊松比 v 的变化规律

Fig. 3 Variation of stiffness ratio of particle η with Poisson's ratio v

张振南等^[15]在虚内键理论研究中, 推导了法向和
切向连接键的刚度系数分别为

$$\left. \begin{aligned} K^n &= \frac{3E}{4\pi(1 - 2v)}, \\ k^s &= \frac{3(1 - 4v)E}{4\pi(1 + v)(1 - 2v)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中, E 和 v 分别为材料的杨氏模量和泊松比。从而
可得法向键与切向键刚度系数的比值为

$$h = \frac{1 + v}{1 - 4v} \quad (11)$$

由式 (11) 可知, 材料泊松比应小于 0.25 , 如图
3 所示。注意到, 砂土的泊松比 v 通常为 $0.15\sim 0.35$ ^[16],
其结果对砂土研究并不完全适用。

由此可见, 目前针对线性接触模型细观参数的研
究, 不论是从颗粒自身的物理力学性质出发, 还是设
法通过颗粒材料的宏观响应获得, 都尚未能有切实可
行的细观参数确定方法。基于上文的分析, 下文将由
颗粒材料的宏观响应出发, 寻找确定细观参数的实用
方法。

2 宏观弹性常数

对于线性接触模型, 有两个独立的细观参数, 即
法向刚度 k_n 和切向刚度 k_s , 描述其弹性变形。因此,
如果不考虑颗粒接触和应力历史引起的各向异性, 在
宏观上也必然存在两个相互独立的弹性常数, 以描述
颗粒材料的弹性变形。

图4给出的是PFC^{3D}模拟三轴试验得到的典型的应力-应变关系曲线(基本参数见表1)。

数值模拟过程中,先随机生成试样,再等向固结至围压 s_3 ,然后逐渐增加轴向应力 s_1 。由此可见,等向固结完成时(即图4中的原点位置),可以认为颗粒材料处于各向同性状态,此时,其弹性变形可以由两个独立常数,即初始杨氏模量 E_0 和初始泊松比 ν_0 确定。

由图4的局部放大图可以看出,当轴向应变远小于峰值应力对应的轴向应变 e_{1m} 时,轴向应力增量和轴向应变几乎成线性关系。为确保初始杨氏模量 E_0 和初始泊松比 ν_0 计算值的稳定性,取1% e_{1m} 范围内的应力-应变曲线拟合确定,见图4。

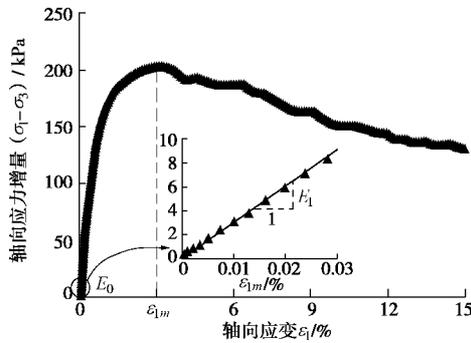


图4 典型的应力-应变曲线

Fig. 4 Representative stress-strain curves in PFC^{3D} simulation

为进一步验证上述确定方法的可行性,图5给出了不同颗粒刚度比 h 条件下摩擦功 E_f 随轴向应变 e_1 的变化曲线,图6则给出了不同颗粒摩擦系数 m 对无量纲初始杨氏模量 $\frac{E_0}{E_c}$ 和初始泊松比 ν_0 的影响。

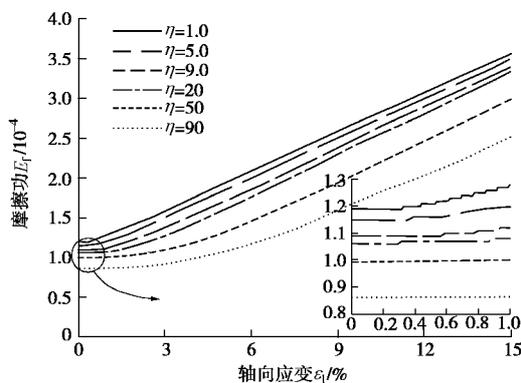


图5 摩擦功 E_f 随轴向应变 e_1 的变化曲线

Fig. 5 Variation of frictional work E_f with axial strain e_1

从图5局部放大图可看出,轴向应变在1% e_{1m} 范围内,摩擦功 E_f 变化细微,说明颗粒间基本未发生相对滑动。可近似认为,当轴向应变在1%的 e_{1m} 范围内时,颗粒材料体仍处于弹性状态。

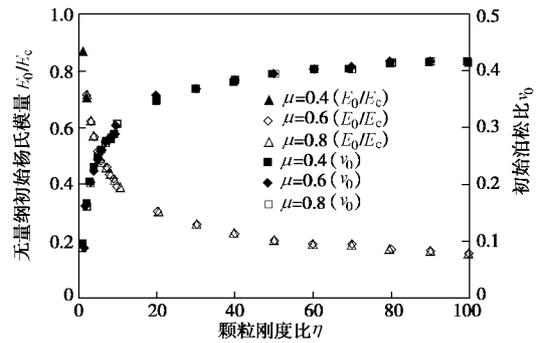


图6 颗粒摩擦系数对初始杨氏模量和初始泊松比的影响

Fig. 6 Influence of particle frictional coefficient on initial Young's modulus and Poisson's ratio ($k_n=25.3$ kN/m)

由图6可看出,摩擦系数 m 的大小对初始杨氏模量 E_0 和泊松比 ν_0 的影响都很小,进一步说明了采用初始杨氏模量 E_0 和初始泊松比 ν_0 作为与颗粒法向刚度 k_n 和切向刚度 k_s 对应的宏观弹性常数是合理的,相应的确定方法是合适的。

3 细-宏观弹性常数相关关系

基于上节的分析,本节将着重探讨并建立线性接触模型中细观弹性常数(颗粒法向刚度 k_n 和颗粒刚度比 h)与宏观弹性常数(材料初始杨氏模量 E_0 和初始泊松比 ν_0)间的相关关系。

3.1 计算参数

在三轴试验的颗粒离散元模拟中,若未特别说明,计算参数如表1所示。墙体法向刚度 k_{wn} 取为颗粒法向刚度 k_n 的1/10,轴向加载速度取为0.05 m/s^[3]。孔隙率 n 为0.30时对应的颗粒数为3134个,该数量足以反应颗粒材料的基本特性^[6]。

表1 基本计算参数列表

Table 1 Basic parameters for calculations			
	细观常数	符号	取值
几何参数	试样尺寸/mm	$b \times h$	2×4
	颗粒粒径/mm	$[R_{min}, R_{max}]$	0.075, 0.1
	孔隙率	n	0.30
颗粒	密度/(kg·m ⁻³)	ρ	2650
	摩擦系数	μ	0.60
	法向刚度/(kN·m ⁻¹)	k_n	25.3
	切向刚度/(kN·m ⁻¹)	k_s	25.3
物理参数	墙体摩擦系数	μ_w	0
	墙体法向刚度/(kN·m ⁻¹)	k_{wn}	2.53
	局部阻尼	D	0.7
	时步 s/step	Δt	
	围压/kPa	σ_3	100
	加载速度/(m·s ⁻¹)	u_0	0.05

颗粒材料的宏观弹性常数不仅与颗粒间法向刚度 k_n 和切向刚度 k_s 有关, 室内试验表明, 它们还受试样的孔隙率 n 和所受围压 s_3 的影响。为建立宏观弹性常数和细观弹性常数间的相关关系, 本文先针对平均颗粒粒径 d_{50} 为 0.175 mm 的颗粒材料进行了 342 个 ($2 \times 3 \times 3 \times 19$) 三轴数值模拟试验。为进一步考虑平均颗粒粒径的影响, 又分别针对 d_{50} 为 1.75, 17.5 和 175 mm 的颗粒材料进行了 114 个 ($3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 19$) 三轴数值模拟试验, 如表 2 所示。

表 2 数值试验统计表

Table 2 List of numerical simulation

d_{50} /mm	k_n 或 k_s 为定 值/(kN·m ⁻¹)	n	s_3 /kPa	h
0.175	$k_n = 25.3$ $k_s = 2.53$	0.300	100	从 1~100 共 19 个值
		0.375	200	
		0.450	300	
1.75	$k_n = 253$ $k_s = 25.3$	0.375	100	从 1~100 共 19 个值
17.5	$k_n = 2530$ $k_s = 253$	0.375	100	从 1~100 共 19 个值
175	$k_n = 25300$ $k_s = 2530$	0.375	100	从 1~100 共 19 个值

3.2 初始杨氏模量 E_0 和初始泊松比 ν_0

图 7 给出了颗粒法向刚度 k_n 和切向刚度 k_s 保持不变时, 无量纲初始杨氏模量 $\frac{E_0}{E_c}$ 和初始泊松比 ν_0 随颗粒刚度比 h 的变化规律。由图可以看出, $\frac{E_0}{E_c}$ 随着 h 的增大而减小, 而 ν_0 则随着 h 的增大而增大, 其变化幅度都逐渐降低并趋于稳定。由图还可以看出, h 相同但 k_n (或 k_s) 不同时, E_0/E_c 和 ν_0 都不相同。产生差异的原因是具有不同细观刚度 k_n 的两个试样承受相同的围压 (100 kPa)。

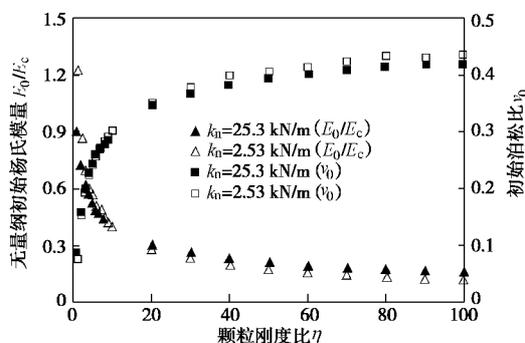


图 7 初始杨氏模量和初始泊松比随颗粒刚度比的变化曲线

Fig. 7 Variation of non-dimensional initial Young's modulus and Poisson's ratio with stiffness ratio of particles

图 8 给出了围压 s_3 对无量纲初始杨氏模量 $\frac{E_0}{E_c}$ 和初始泊松比 ν_0 的影响。由图可见, 围压越高, $\frac{E_0}{E_c}$ 值越大, 而 ν_0 值则越小, 这与室内试验观察到的现象是一致的。孔隙率 n 对初始杨氏模量 E_0 和初始泊松比 ν_0 的影响如图 9 所示。由图可以看出, 在 ν_0 相同的条件下, n 越大, $\frac{E_0}{E_c}$ 越小, 而 ν_0 则越大。注意到, 当孔隙率从 0.3 增至 0.45 时, $\frac{E_0}{E_c}$ 和 ν_0 的变化并不很明显, 这与砂土的实际情况^[17]不相吻合。研究指出, 孔隙率 n 可由配位数 C_n 直接表征^[18]。本文的数值试样采用半径膨胀法^[2]制备, 分析发现, 在采用该方法制备试样时, 不同孔隙率 n 的试样在等向固结 (围压 s_3 相同) 完成时, 对应的配位数 C_n 差异很小, 从而造成图 9 中孔隙率影响不显著。

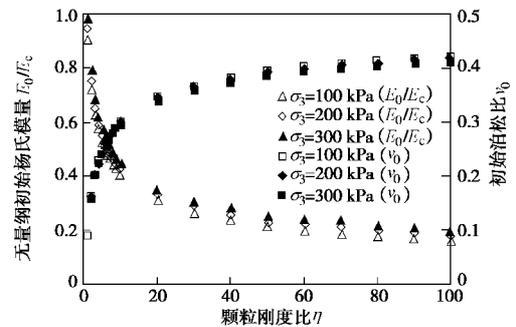


图 8 围压对初始杨氏模量和泊松比的影响 ($k_n=25.3$ kN/m)

Fig. 8 Influence of confining pressure on initial Young's modulus and Poisson's ratio ($k_n=25.3$ kN/m)

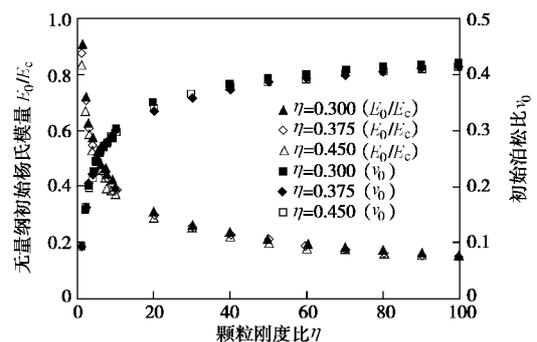


图 9 孔隙率对初始杨氏模量和泊松比的影响 ($k_n=25.3$ kN/m)

Fig. 9 Influence of porosity on initial Young's modulus and Poisson's ratio ($k_n=25.3$ kN/m)

3.3 细 - 宏观弹性常数相关关系

计算表明, 宏观弹性常数 (初始杨氏模量 E_0 和初始泊松比 ν_0) 不仅与细观弹性常数 (颗粒法向刚度 k_n 与颗粒刚度比 h) 相关, 而且还受颗粒材料的孔隙率 n 和围压 s_3 的影响。本文通过总结颗粒粒径 d_{50} 为 0.175 mm 的 342 个数值试验结果, 发现配位数 C_n (等向固结

完成后的值)与围压和颗粒接触模量的比值 s_3/E_c 密切相关, 见图10。

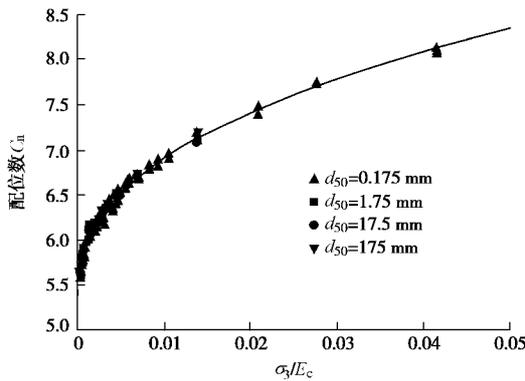


图10 配位数 C_n 随 s_3/E_c 的变化关系

Fig. 10 Variation of coordinate number C_n with s_3/E_c

从图10可以看出, 颗粒配位数 C_n 随着围压和颗粒接触模量的比值 $\frac{s_3}{E_c}$ 的增大而增大, 受其他细观参数的影响很小。经拟合, 两者的关系表示为

$$C_n = A\left(\frac{s_3}{E_c}\right)^k + C_{n0}, \quad (12)$$

式中, $A=10.304$, $k=0.415$, $C_{n0}=5.387$ 。

初始杨氏模量 E_0 与细观弹性常数间的关系可表示为

$$E_0 = aE_c h^a (C_n - C_{n0})^m, \quad (13)$$

式中, a 与颗粒粒径 d_{50} 相关, a, m 为常数。经拟合, 得 $a=1.048$, $m=0.245$, $a=-0.393$ 。

式(12)代入式(13), 可得

$$E_0 = aA^m E_c^{(1-km)} h^a (s_3)^{km}, \quad (14)$$

式中, $aA^m=1.856$, $km=0.102$ 。

同理, 初始剪切模量可为

$$G_0 = bE_c h^b (C_n - C_{n0})^l, \quad (15)$$

式中, b 与颗粒粒径 d_{50} 相关, b, l 为常数。经拟合, 得 $b=0.478$, $l=0.246$, $b=-0.462$ 。

图11, 12分别给出了初始杨氏模量 E_0 、初始剪切模量 G_0 的计算值和拟合结果的对比。

从图11, 12中可看出, 式(13)、(15)拟合的效果都较好。经分析, 其相对误差的平均值分别为4.372%和4.543%, 当 $h \leq 30$ 时, 其相对误差的平均值则分别降为3.345%和3.486%。

根据初始杨氏模量 E_0 和初始剪切模量 G_0 的相互关系为

$$G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}. \quad (16)$$

结合式(13)、(15), 可得初始泊松比为

$$\nu_0 = \frac{a}{2b} (C_n - C_{n0})^{m-l} h^{a-b} - 1, \quad (17)$$

式中, $\frac{a}{2b}=1.097$, $m-l=-0.000827$, $a-b=0.069$ 。

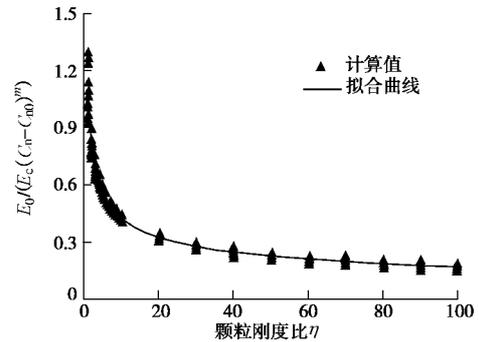


图11 初始杨氏模量计算值与拟合值的对比图

Fig. 11 Comparison between calculated and fitted values of initial Young's modulus

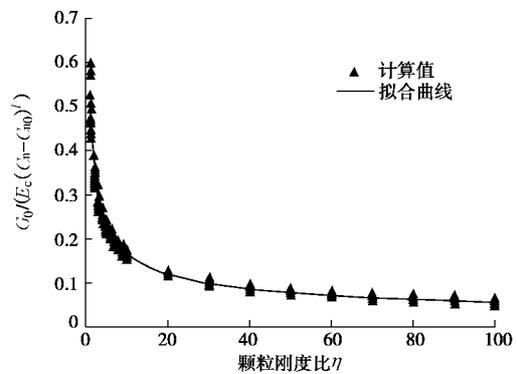


图12 初始剪切模量计算值与拟合值的对比图

Fig. 12 Comparison between calculated and fitted values of initial shear modulus

根据式(17), 计算得到初始泊松比 ν_0 的拟合值与计算值间绝对误差的平均值为0.030。当 $h \leq 30$ 时, 计算值与拟合值间绝对误差的最大值为0.029, 平均值为0.013; 而当 $h > 30$ 时, 计算值与拟合值间绝对误差的平均值则为0.061。

可见, 当 $h \leq 30$ 时, 式(13)、(15)和(17)的适用性都较好。

通常, 我们认为初始泊松比 ν_0 应小于0.5。则由式(17)可知, 当配位数 C_n 为6, 7和8时, 颗粒刚度比 h 应分别小于94.6, 95.7和96.2。结合一般土体的初始泊松比范围^[16], 可得对应的颗粒刚度比 h 范围为2.0~20.7。可见, 对于一般土体而言, 经验公式(13)和(17)是完全适用的。

由式(17), 可绘出不同配位数 C_n 条件下初始泊松比 ν_0 随颗粒刚度比 h 的变化曲线, 如图13所示。

由图13可见, 当配位数 C_n 从6变化到8时, 初始泊松比曲线变化甚微。以颗粒刚度比 $h=10$ 时为例, 配位数 C_n 为6, 7和8对应的 ν_0 分别为0.286, 0.285和

0.285。图13同时给出了本文计算结果与其他研究结果的对比分析, 由图可见, Mindlin^[1, 11]与王泳嘉等^[12]直接给出了颗粒刚度比 h 范围(分别为1~1.5和1~10), 但未给出与材料初始泊松比 ν_0 的关系。与本文最接近的是Hentz等^[14]在 h 为1~20范围内的研究结果。

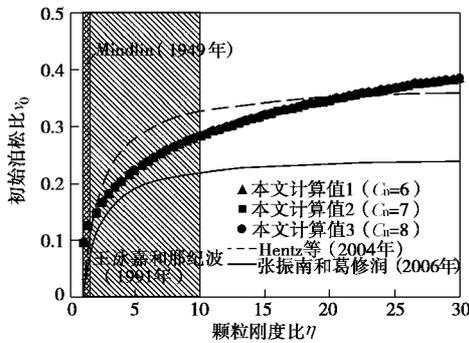


图 13 颗粒刚度比随材料初始泊松比的变化曲线

Fig. 13 Variation of stiffness ratio of particle with initial Poisson's ratio

由式(12)、(14)和(15)可知, 初始杨氏模量 E_0 和初始剪切模量 G_0 都约与围压 s_3 的1/10次方成正比, 这一结果与基于Hertz理论给出的结果^[18]不同。文献[19]的研究也指出, 在表征围压对土体刚度的影响上, 线性接触模型略差。另外, 从式(17)还可以看出, 初始泊松比 ν_0 约与颗粒刚度比 h 的1/14次方成正比。

前面的计算分析都是针对由颗粒粒径 d_{50} 为0.175 mm的颗粒组成的颗粒材料试样。在实际的计算分析中, 为节约计算时间和成本, 会考虑将颗粒粒径做一定比例的放大, 以满足实际要求。这就需要进一步考查式(13)、(17)对由放大后的颗粒组成的颗粒材料的适用性。下面将利用颗粒粒径放大后的数值试样探讨系数 a, b 与 d_{50} 的关联性。为此, 以前面的孔隙率 n 为0.375的试样为原型, 等比例放大颗粒粒径 d_{50} 至1.75 mm, 17.5 mm和175 mm, 并保持颗粒数量不变, 得到放大后的数值试样。每级 d_{50} 下的试样, 分别进行保持 k_n 不变和保持 k_s 不变下的两组共38个数值试验, 如表2。利用式(13)、(17)对其试验结果进行分析, 得到不同 d_{50} 下的 a, b 值, 如图14, 图中 d_0 取为0.075 mm。从图中可以看出, 随着颗粒粒径 d_{50} 从0.175 mm等比例逐步放大至1.75 mm, 17.5 mm和175 mm, 系数 a, b 几乎保持为常数, 而与 d_{50} 无关。

结合式(4)、(12)和(17), 可得颗粒粒径 d_{50} 与初始泊松比 ν_0 的关系为

$$\nu_0 = \frac{a}{2b} (2^k A)^{m-1} \frac{(s_3)^{k(m-1)}}{(k_n)^{k(m-1)}} h^{a-b} (d_{50})^{k(m-1)} - 1 \quad (18)$$

由式(18)可知, 颗粒粒径 d_{50} 对初始泊松比 ν_0 的

影响很小, 可忽略。

对于颗粒粒径 d_{50} 对初始杨氏模量 E_0 的影响, 由式(4)、(14)可得,

$$E_0 = aA^m 2^{1-km} (k_n)^{1-km} h^a s_3^{km} (d_{50})^{-(1-km)} \quad (19)$$

由式(19)可知, 初始杨氏模量 E_0 约与颗粒粒径 d_{50} 的0.9次方成反比。

另外, 图10中还给出了颗粒粒径 d_{50} 对配位数 C_n 的影响, 可以看出不同 d_{50} 下的曲线几乎重合。可见, 式(12)已很好地表征了颗粒粒径 d_{50} 的影响。

由此可见, 上述经验公式较好地表征了颗粒材料宏观弹性常数与颗粒细观弹性常数间的相关关系, 并考虑了颗粒粒径的影响。

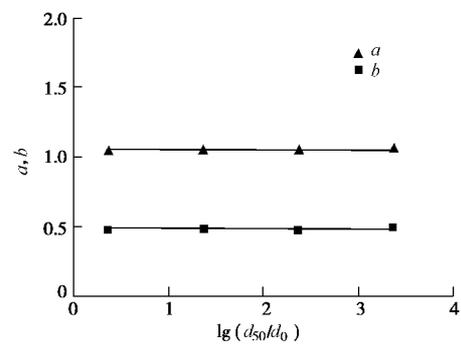


图 14 颗粒粒径对系数 a, b 的影响

Fig. 14 Influence of particle size on values of a and b

4 结 论

(1) 颗粒材料的宏观弹性常数 E_0 和 ν_0 与颗粒的细观弹性常数 k_n 和 h 存在很好的相关性。

(2) 颗粒材料的初始杨氏模量 E_0 和初始剪切模量 G_0 随颗粒刚度比 h 的增大而减小, 并约与围压 s_3 的1/10次方成正比; 初始泊松比 ν_0 则随颗粒刚度比 h 的增大而增大, 并约与 h 的1/14次方成正比。

(3) 通过初始泊松比 ν_0 与颗粒刚度比 h 的相关关系, 可得常见砂土的 h 值应为2.0~20.7。

(4) 初始杨氏模量 E_0 约与颗粒粒径 d_{50} 的0.9次方成反比, 而颗粒粒径 d_{50} 对初始泊松比 ν_0 则几乎没有影响。

参考文献:

[1] CUNDALL P A, STRACK O D L. A discrete numerical model for granular assemblies[J]. Geotechnique, 1979, 29(1): 47 - 65.
 [2] Itasca Consulting Group Inc. Manual of particle flow code in 3-dimension[M]. Version 4.0, Minnesota, 2008.
 [3] POTYONDY D O, CUNDALL P A. A bonded-particle model for rock[J]. International Journal of Rock Mechanics and

- Mining Sciences, 2004, **41**: 1329 - 1364.
- [4] MASSON S, MARTINEZ J. Effect of particle mechanical properties on silo flow and stresses from distinct element simulations[J]. Powder Technology, 2000, **109**: 164 - 178.
- [5] MISHRA B K, MURTY C V R. On the determination of contact parameters for realistic DEM simulations of contact of ball mills[J]. Powder Technology, 2001, **115**: 290 - 297.
- [6] 周 健, 贾敏才. 土工细观模型试验与数值模拟[M]. 北京: 科学出版社, 2008. (ZHOU Jian, JIA Min-cai. Microscopic model test and numerical simulation for soil engineering[M]. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese))
- [7] LANDRY H, LAGUE C, ROBERGE M. Discrete element representation of manure products[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2006, **51**: 17 - 34.
- [8] ASAF Z, RUBINSTEIN D, SHMULEVICH I. Evaluation of link-track performances using DEM[J]. Journal of Terramechanics, 2006, **43**: 141 - 161.
- [9] DI RENZO A, DI MAIO F P. Comparison of contact-force models for simulation of collision in DEM-based granular flow codes[J]. Chemical Engineering Science, 2004, **59**: 525 - 541.
- [10] MANUEL J M M, LUIS E M R. Discrete numerical model for analysis of earth pressure balance tunnel excavation[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2005, **131**(10): 1234 - 1242.
- [11] MINDLIN R D. Compliance of elastic bodies in contact[J]. Journal of Applied Mechanics, 1949, **71**(3): 258 - 269.
- [12] 王泳嘉, 邢纪波. 离散单元法及其在岩土力学中的作用[M]. 沈阳: 东北工学院出版社, 1991. (WANG Yong-jia, XING Ji-bo. Discrete element method and its application in geotechnical mechanics[M]. Shenyang: Northeast University of Technology Press, 1991. (in Chinese))
- [13] 邢纪波, 俞良群, 张瑞丰, 等. 离散单元法的计算参数和求解方法选择[J]. 计算力学学报, 1999, **16**(1): 47 - 51. (XING Ji-bo, YU Liang-qun, ZHANG Rui-feng, et al. Determination of calculating parameters and solution methods of discrete element method[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 1999, **16**(1): 47 - 51. (in Chinese))
- [14] HENTZ S, DAUDEVILLE L, DONZE F V. Identification and validation of a discrete element model for concrete[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2004, **130**(6): 709 - 719.
- [15] 张振南, 葛修润, 李永和. 基于虚内键理论的材料多尺度力学模型[J]. 固体力学学报, 2006, **27**(4): 325 - 329. (ZHANG Zhen-nan, GE Xiu-run, LI Yong-he. A multiscale mechanical model for materials based on virtual internal bond theory[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2006, **27**(4): 325 - 329. (in Chinese))
- [16] 徐日庆, 龚晓南. 土的应力路径非线性行为[J]. 岩土工程学报, 1995, **17**(4): 56 - 60. (XU Ri-qing, GONG Xiao-nan. Nonlinear stress-path-dependent behavior in soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995, **17**(4): 56 - 60. (in Chinese))
- [17] ISHIHARA K. Soil behavior in earthquake geotechnics[M]. New York: Oxford University Press, 1996.
- [18] SANTAMARINA J C, KLEIN K A, FAM M A. Soils and waves[M]. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2001.
- [19] 史旦达. 单调与循环加荷条件下砂土力学性质细观模拟[D]. 上海: 同济大学, 2007. (SHI Dan-da. Microscopic numerical simulations of monotonic and cyclic loading of sand[D]. Shanghai: Tongji University, 2007. (in Chinese))