

埋置于饱和地基中的刚性圆柱基础的摇摆振动

胡秀青¹, 蔡袁强^{1, 2}

(1. 浙江大学软弱土与环境土工教育部重点实验室, 浙江 杭州 310027; 2. 温州大学建筑与土木工程学院, 浙江 温州 325035)

摘 要: 基于 Biot 动力控制方程, 用解析的方法研究了简谐激振作用下埋置于饱和地基中的刚性圆柱基础的摇摆振动问题。基底以下的土被视为饱和半空间, 基础侧面的土视为由若干圆形极薄饱和层组成的独立层, 假设土与基础完全黏着接触且接触面完全透水。运用 Hankel 积分变换对饱和土的动力控制方程进行求解, 然后结合基础与地基的混合边界条件求解了相应的动力响应问题, 并给出了饱和地基的等效动力刚度表达式。为验证本文结果的正确性, 计算了基础位于地基表面时的动力柔度曲线, 并与已知文献中的结果进行了相应对比。数值分析结果表明: 基础在饱和地基中的动力响应与在弹性地基中有很大的不同, 无量纲激振频率、基础埋置深度、渗透系数和泊松比对饱和地基的摇摆动力刚度有很大的影响。

关键词: 饱和半空间; 摇摆振动; 基础埋深; 刚性圆柱基础

中图分类号: TU435

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2009)08-1200-08

作者简介: 胡秀青(1981-), 女, 山东泰安人, 博士, 主要从事地基与基础的动力相互作用研究工作。E-mail: huxiuqing09@yahoo.cn。

Rocking vibrations of rigid cylindrical foundations embedded in saturated soil

HU Xiu-qing¹, CAI Yuan-qi^{1, 2}

(1. MOE Key Laboratory of Soft Soils and Geoenvironmental Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China; 2. College of Architecture and Civil Engineering, Wenzhou University, Wenzhou 325035, China)

Abstract: Based on the Biot's poroelastodynamic theory, rocking vibrations of rigid cylindrical foundations embedded in saturated soil subjected to time-harmonic excitation are studied by analytical methods. The soil underlying the foundation base is represented by a saturated half-space while the soil along the side of the foundation is modeled as an independent stratum composed of a series of infinitesimally thin poroelastic layers. The contact surface between the foundation and the soil is assumed to be perfect and fully permeable. General solutions of governing equations for saturated soils are obtained by using the Hankel transform. Based on the mixed boundary value conditions at the contact surface, the rocking integral equations are established by which the dynamic interaction problem is solved. Analytical solutions for the equivalent dynamic impedance of the rigid cylindrical foundation embedded in saturated soil are presented. The accuracy of the present solution is verified by comparisons with exciting solutions of dynamic compliance coefficients for surface foundations. Numerical results indicate that the dynamic response of foundations in a saturated medium is substantially different from that in an ideal elastic medium. The dimensionless frequency of the excitation, the depth ratio of foundation, the permeability coefficient and the Poisson's ratio have significant effects on the rocking dynamic impedance in saturated soil.

Key words: saturated half-space; rocking vibration; depth of foundation; rigid cylindrical foundation

0 引 言

地基与基础的动力相互作用问题一直是土木工程界的一个重要课题。自 Reissner^[1]提出弹性半空间计算模式以来, 许多学者在单相弹性地基与基础的动力相互作用问题上进行了大量深入而广泛的研究工作, 并取得了相当丰硕的成果^[2-6]。然而由土力学知识可知, 天然土体是由固、液、气三相构成的, 当土骨架之间的孔隙全部被水充满时, 则土体就是完全饱和的。对

饱和地基而言, 孔隙水和土骨架之间可以发生相对运动, 按两相介质理论研究动力基础的动力特性将更符合实际情况。Biot^[7-8]建立了饱和多孔介质中波的传播理论, 并成为以后有关饱和土体的动力问题研究的基础。

Halpern 等^[9-10]研究了饱和半空间在表面作用简

收稿日期: 2008-05-21

谐激振力时的稳态解, 并探讨了矩形刚性板的动力响应, 在分析中他们主要用到了 Fourier 积分变换技术。Philippacopoulos^[11]扩展了 Halpern 和 Christiano 的工作, 成功解析求解了上覆单相弹性层的饱和半空间上刚性圆板的竖向振动。Jin 等^[12-14]研究了饱和半空间上刚性圆板的竖向、水平、摇摆振动, 给出了地基表面动力柔度系数随无量纲激振频率的变化曲线。付兵^[15]系统地分析了饱和地基上基础的摇摆振动特性。陈龙珠等^[16]给出了饱和地基上刚性基础的竖向动力柔度系数曲线。上述研究都是针对表面基础的, 即假定基础位于地基的表面, 而实际工程中, 大多数基础都有一定的埋深, 因此研究具有一定埋深的基础的动力响应问题将具有更大的工程应用价值。Zcng 等^[17]通过 Hankel 变换和离散的方法研究了均质饱和半空间内部一定深度处的刚性薄圆板竖向动力响应问题。Senjuntichai 等^[18]研究了埋置在层状饱和半空间内部一定深度的柔性薄圆板的竖向振动。文献[17, 18]中都忽略了基础的厚度, 将基础视为无质量的薄板, 不考虑基础侧面与土的相互作用, 这显然是不合理的。由于数学上的原因, 对于埋置基础的动力响应问题, 至今尚未取得严格的解析解。关于饱和地基中埋置基础的动力响应问题, 目前研究的很少。考虑基础侧面与土的相互作用, Senjuntichai 等^[19]数值求解了埋置于饱和半空间中的刚性基础的在简谐荷载下的竖向振动问题, 研究中他们假定基础是具有一定体积的轴对称体, 运用边界积分的方法求解了相应的动力响应问题。蔡袁强等^[20]采用解析的方法, 求得了埋置于饱和半空间中的刚性圆柱基础的竖向动力刚度, 并通过算例讨论了基础埋深和土体渗透系数对结果的影响。根据作者所掌握的资料来看, 对于埋置于饱和半空间中的刚性圆柱基础的摇摆振动, 在国内外尚未见到报道。

本文由 Biot 动力控制方程出发, 用解析的方法研究了在简谐激振力下, 埋置于饱和半空间中的刚性圆柱基础的摇摆振动问题。基础中心受到简谐激振力, 且假设土与基础完全黏着接触, 接触面完全透水。文末给出了摇摆动力刚度的表达式, 并分析了相关参数对结果的影响。

1 基本方程

1.1 基本假定与计算模型

建立模型如图 1 所示, 一半径为 r_0 的刚性圆柱基础部分埋置于饱和半空间中, 埋深为 h , 其中心受到摇摆简谐激振力 $M(t) = M_0 e^{i\omega t}$, ω 为振动圆频率, $\phi(t) = \phi e^{i\omega t}$ 为刚性基础的摇摆角位移。

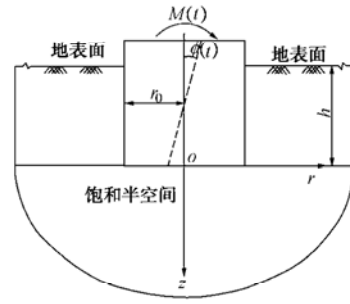


图 1 埋置于饱和半空间中的刚性圆柱基础的力学模型

Fig. 1 Model for rigid cylindrical foundation embedded in a saturated half-space

在弹性地基与基础的动力相互作用问题研究中, Novak 等^[21-22]基于 Baranov^[23]提出的薄层法假设, 系统地分析了弹性地基中具有埋深的刚性圆柱基础的动力响应问题, 此后 Novak 薄层法以其简便实用的特性得到了广泛的应用^[24-28]。本文应用和发展了这一方法, 以计算埋置于饱和地基中刚性圆柱基础的摇摆振动。假设: ①地基为均质饱和介质, 土与基础在四周及底部紧密接触, 相互之间无滑移, 且接触面是完全透水的; ②基底以下的土为饱和半空间, 基础侧面的土视为由若干半径为 r_0 的圆形极薄饱和层组成的独立土层, 且不计上覆土层的覆盖效应。地基作用在埋置基础上的反力矩由基底反力矩和侧面反力矩两部分组成。显然利用极薄饱和和弹性层在圆孔周边处的力-位移关系和沿基础侧面积分的方法, 可求得基础侧面的总反力矩。

1.2 饱和土基本方程

在圆柱坐标下, 不计土颗粒和孔隙水的压缩, 根据 Biot 理论^[29], 饱和土的基本运动方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \ddot{u}_r + \rho_f \ddot{w}_r, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\partial p}{r \partial \theta} = \rho \ddot{u}_\theta + \rho_f \ddot{w}_\theta, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} - \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \ddot{u}_z + \rho_f \ddot{w}_z. \quad (1c)$$

式中 $\sigma_i (i=r, \theta, z)$ 为土骨架有效正应力; τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$ 为土骨架有效剪应力; p 为孔隙水压; $u_i (i=r, \theta, z)$ 为土骨架位移; $w_i (i=r, \theta, z)$ 为流体相对于土体的位移; ρ 为饱和土质量密度, 且有 $\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_f$, ρ_s , ρ_f 分别为土颗粒和水的密度, n 为孔隙率; 变量上面的点表示对时间 t 求导。

流体的运动方程为

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_f \ddot{u}_r + m \ddot{w}_r + b \dot{w}_r, \quad (2a)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \rho_f \ddot{u}_\theta + m \ddot{w}_\theta + b \dot{w}_\theta, \quad (2b)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_f \ddot{u}_z + m \ddot{w}_z + b \dot{w}_z, \quad (2c)$$

式中, $m = \frac{\rho_f}{n}$, b 为固液两相黏性耦合参数, $b = \frac{\eta}{k_p}$, η 为流体黏滞系数, k_p 为渗透系数。

渗流连续方程为

$$\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} + \frac{\dot{u}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial \dot{w}_r}{\partial r} + \frac{\dot{w}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \dot{w}_z}{\partial z}\right). \quad (3)$$

土体的应力-应变关系为

$$\sigma_z = \lambda e + 2G \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (4a)$$

$$\sigma_r = \lambda e + 2G \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (4b)$$

$$\sigma_\theta = \lambda e + 2G \frac{u_r}{r}, \quad (4c)$$

$$\tau_{r\theta} = G \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad (4d)$$

$$\tau_{\theta z} = G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right), \quad (4e)$$

$$\tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (4f)$$

式中, λ , G 为土骨架的 Lamé 常数, $e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ 。

引入无量纲参数 $a_0 = \sqrt{\frac{\rho}{G}} r_0 \omega$, $\rho^* = \frac{\rho_f}{\rho}$, $m^* = \frac{m}{\rho}$,

$b^* = \frac{b}{\rho G} r_0$, $\lambda^* = \frac{\lambda}{G}$ 及无量纲变量 $\bar{r} = \frac{r}{r_0}$, $\bar{z} = \frac{z}{r_0}$,

$\bar{u}_r = \frac{u_r}{r_0}$, $\bar{u}_\theta = \frac{u_\theta}{r_0}$, $\bar{u}_z = \frac{u_z}{r_0}$, $\bar{w}_r = \frac{w_r}{r_0}$, $\bar{w}_\theta = \frac{w_\theta}{r_0}$,

$\bar{w}_z = \frac{w_z}{r_0}$, $\bar{p} = \frac{p}{G}$, $\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{G}$, $\bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{G}$, $\bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{G}$,

$\bar{\tau}_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G}$, $\bar{\tau}_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G}$, $\bar{\tau}_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G}$ 。

2 结合边界条件求解方程

2.1 混合边值条件

饱和土中刚性基础的摇摆振动在弹性力学中属于混合边值问题, 即在基底下定位移, 在基底外给定应力, 无量纲化后 $\bar{z} = 0$ 处的边界条件为

$$\bar{u}_z(\bar{r}, \theta, 0) = \phi \bar{r} \cos \theta \quad (0 \leq \bar{r} \leq 1), \quad (5a)$$

$$\bar{\sigma}_z(\bar{r}, \theta, 0) = 0 \quad (\bar{r} > 1), \quad (5b)$$

$$\bar{\tau}_{rz}(\bar{r}, \theta, 0) = \bar{\tau}_{\theta z}(\bar{r}, \theta, 0) = 0 \quad (\bar{r} \geq 0), \quad (5c)$$

$$\bar{p}(\bar{r}, \theta, 0) = 0 \quad (\bar{r} \geq 0). \quad (5d)$$

2.2 方程的求解

假设系统所有运动均为具有因子 $e^{i\omega t}$ 的简谐运动, 并把所有量对 θ 进行 Fourier 展开^[30], 根据本问题的特点, 所有量的展开都只有一项^[13], 即

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_r(r, \theta, z) \\ \bar{u}_z(r, \theta, z) \\ \bar{\tau}_{rz}(r, \theta, z) \\ \bar{\sigma}_z(r, \theta, z) \\ \bar{e}(r, \theta, z) \\ \bar{p}(r, \theta, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{r1}(r, z) \\ \bar{u}_{z1}(r, z) \\ \bar{\tau}_{r1}(r, z) \\ \bar{\sigma}_{z1}(r, z) \\ \bar{e}_1(r, z) \\ \bar{p}_1(r, z) \end{Bmatrix} \cos \theta, \quad (6a)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_\theta(r, \theta, z) \\ \bar{\tau}_{\theta z}(r, \theta, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{\theta 1}(r, z) \\ \bar{\tau}_{\theta z 1}(r, z) \end{Bmatrix} \sin \theta. \quad (6b)$$

(1) 求解基底反力矩

记 $\tilde{f}^\mu(\xi, z)$ 为函数 $f(r, z)$ 的 μ 阶 Hankel 变换形式, 对式 (1) ~ (4) 施以相应的 Hankel 变换, 可得饱和半空间位移和应力的 Hankel 变换解:

$$\tilde{\bar{p}}_1 = \chi_{21} A e^{-\gamma_1 \bar{z}} + B e^{-\xi \bar{z}}, \quad (7a)$$

$$\tilde{\bar{u}}_{z1} = \chi_{31} A e^{-\gamma_1 \bar{z}} + \chi_{32} B e^{-\xi \bar{z}} + C e^{-\gamma_2 \bar{z}}, \quad (7b)$$

$$\tilde{\bar{\sigma}}_{z1} = (\lambda^* - 2\chi_{31}\gamma_1) A e^{-\gamma_1 \bar{z}} - 2\xi \chi_{32} B e^{-\xi \bar{z}} - 2\gamma_2 C e^{-\gamma_2 \bar{z}}, \quad (7c)$$

$$\tilde{\bar{u}}_{r1}^0 - \tilde{\bar{u}}_{\theta 1}^0 = \frac{-\chi_{31}\xi A}{\gamma_1 e^{-\gamma_1 \bar{z}}} - \chi_{32} B e^{-\xi \bar{z}} + D e^{-\gamma_2 \bar{z}}, \quad (7d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{u}}_{r1}^2 + \tilde{\bar{u}}_{\theta 1}^2 = & \left[\frac{2(1 + \chi_{31}\gamma_1)}{\xi} - \frac{\xi \chi_{31}}{\gamma_1} \right] A e^{-\gamma_1 \bar{z}} + \chi_{32} B e^{-\xi \bar{z}} + \\ & \left(\frac{2C\gamma_2}{\xi} + D \right) e^{-\gamma_2 \bar{z}}, \end{aligned} \quad (7e)$$

$$\tilde{\bar{\tau}}_{r1}^0 - \tilde{\bar{\tau}}_{\theta z 1}^0 = 2\xi \chi_{31} A e^{-\gamma_1 \bar{z}} + 2\xi \chi_{32} B e^{-\xi \bar{z}} + (\xi C - \gamma_2 D) e^{-\gamma_2 \bar{z}}, \quad (7f)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{\tau}}_{r1}^2 + \tilde{\bar{\tau}}_{\theta z 1}^2 = & -\frac{2\gamma_1(1 + \chi_{31}\gamma_1)A}{\xi e^{-\gamma_1 \bar{z}}} - 2\xi \chi_{32} B e^{-\xi \bar{z}} - \\ & \left[\left(\frac{2\gamma_2^2}{\xi} + \xi \right) C + \gamma_2 D \right] e^{-\gamma_2 \bar{z}}. \end{aligned} \quad (7g)$$

式中 A, B, C, D 为待定系数, 可从边界条件求得:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \sqrt{\xi^2 + c_4}, \\ \gamma_2 = \sqrt{\xi^2 - c_2}, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \chi_{21} = \frac{c_3}{c_4}, \\ \chi_{31} = \frac{\gamma_1[(1 + c_1)\chi_{21} - (\lambda^* + 1)]}{(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)}, \\ \chi_{32} = \frac{-\xi(1 + c_1)}{c_2}, \end{cases} \quad (9)$$

其中, $c_1 = \frac{\rho^* a_0^2}{i b^* a_0 - m^* a_0^2}$, $c_2 = a_0^2 + \rho^* a_0^2 c_1$,

$c_3 = \frac{1+c_1}{c_1} \rho^* a_0^2$, $c_4 = \frac{c_3(1+c_1)-c_2}{\lambda^*+2}$, 且本文研究的是基础在动力荷载作用下的振动特性, 因此无量纲激振频率 a_0 , $\text{Re}(\gamma_1)$ 和 $\text{Re}(\gamma_2)$ 均大于零。

将式 (7) 带入边界条件式 (5), 可得到一组描述刚性圆柱基础摇摆振动混合边值问题的对偶积分方程:

$$\int_0^\infty \xi^{-1} [1 + H(\xi)] S(\xi) J_1(\xi \bar{r}) d\xi = \frac{\phi \bar{r}}{L} \quad (0 \leq \bar{r} \leq 1), \quad (10)$$

$$\int_0^\infty S(\xi) J_0(\xi \bar{r}) d\xi = 0 \quad (1 < \bar{r} < \infty), \quad (11)$$

式中,

$$S(\xi) = \xi \tilde{\sigma}_{z1}^1(\xi, 0), \quad (12)$$

$$\tilde{\sigma}_{z1}^1(\xi, 0) = \tilde{\sigma}_{z1}^1(\xi, 0) \cos \theta, \quad (13)$$

$$\tilde{\sigma}_{z1}^1(\xi, 0) = \int_0^\infty \bar{r} \tilde{\sigma}_{z1}(\bar{r}, 0) J_1(\xi \bar{r}) d\bar{r}, \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} H(\xi) &= \xi y(\xi) / L - 1, \\ L &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi y(\xi) = -(1-\nu), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中, ν 为土骨架的泊松比。

$$y(\xi) = \frac{\chi_{31} - \chi_{32} \chi_{21} + d_1}{\lambda^* - 2\gamma_{31}\gamma_1 + 2\xi\gamma_{32}\gamma_{21} - 2\gamma_2 d_1}, \quad (16)$$

$$d_1 = \frac{-\gamma_1(1 + \chi_{31}\gamma_1) - \chi_{31}\xi^2 + 2\chi_{32}\chi_{21}\xi^2}{\gamma_2^2 + \xi^2}. \quad (17)$$

运用 Nobel^[31] 的方法, 令

$$S(\xi) = \frac{4\xi\phi}{\pi L} \int_0^1 \Phi(x) \sin(\xi x) dx. \quad (18)$$

将式 (18) 代入对偶积分方程, 则得到如下第二类 Fredholm 积分方程:

$$\Phi(\bar{r}) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 F(\bar{r}, x) \Phi(x) dx = \bar{r}, \quad (19)$$

式中, $F(r, x)$ 为核函数,

$$F(r, x) = 2 \int_0^\infty H(\xi) \sin(\xi r) \sin(\xi x) d\xi. \quad (20)$$

设刚性圆柱基础底面的反力矩为 $R_\phi(t) = R_\phi e^{i\omega t}$, 由动力平衡条件可以写为

$$\begin{aligned} \frac{-R_\phi}{Gr_0^3} &= \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^\infty \bar{r}^2 \tilde{\sigma}_{z1}(\bar{r}, \theta, 0) d\bar{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^\infty \tilde{\sigma}_{z1}(\bar{r}, 0) \bar{r}^2 d\bar{r} \\ &= \pi \int_0^\infty \bar{r}^2 \tilde{\sigma}_{z1}(\bar{r}, 0) d\bar{r}. \end{aligned} \quad (21)$$

由式 (14) 得

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{z1}^1(\xi, 0)}{d\xi} &= \int_0^\infty \bar{r}^2 \tilde{\sigma}_{z1}(\bar{r}, 0) J_0(\xi \bar{r}) d\bar{r} - \\ &\quad \int_0^\infty \bar{r} \tilde{\sigma}_{z1}(\bar{r}, 0) \frac{J_1(\xi \bar{r})}{\xi} d\bar{r}. \end{aligned} \quad (22)$$

将式 (14)、(18) 代入式 (22), 并令 $\xi \rightarrow 0$, 得

$$\frac{8\phi}{\pi L} \int_0^1 x \Phi(x) dx = \int_0^\infty \bar{r}^2 \tilde{\sigma}_{z1}(\bar{r}, 0) d\bar{r}. \quad (23)$$

将式 (23) 代入式 (21) 得基础底面的反力矩幅

值:

$$R_\phi = Gr_0^3 \frac{8\phi}{1-\nu} \int_0^1 x \Phi(x) dx = Gr_0^3 \frac{8\phi}{3(1-\nu)} \frac{1}{f_1 + f_2}, \quad (24)$$

式中, f_1 和 f_2 为表面基础的动力柔度系数,

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \text{Re} \left[\frac{1}{3 \int_0^1 x \Phi(x) dx} \right], \\ f_2 &= \text{Im} \left[\frac{1}{3 \int_0^1 x \Phi(x) dx} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(2) 求解基础侧面的反力矩

取一极薄饱和层, 根据假定^[23], 即在每一薄层内的正应力与 z 无关, 且忽略径向位移沿 z 轴的变化对基础侧面反力的影响, 则无量纲化后式 (1c)、(2c)、

(4f) 改为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \bar{u}_z = -a_0^2 \bar{u}_z - \rho_f^* a_0^2 \bar{w}_z, \quad (26)$$

$$-\rho^* a_0^2 \bar{u}_z - m^* a_0^2 \bar{w}_z + i b^* a_0 \bar{w}_z = 0, \quad (27)$$

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial \bar{r}}. \quad (28)$$

将 $\bar{u}_z = \bar{u}_{z1} \cos \theta$ 和 $\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{rz1} \cos \theta$ 代入, 整理得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_{z1}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}_{z1}}{\partial \bar{r}} + (c_2 - \frac{1}{\bar{r}^2}) \bar{u}_{z1} = 0, \quad (29)$$

$$\bar{\tau}_{rz1} = \frac{\partial \bar{u}_{z1}}{\partial \bar{r}}. \quad (30)$$

式 (29) 的解可写为

$$\bar{u}_{z1} = E_1 H_1^{(1)}(\beta \bar{r}) + E_2 H_1^{(2)}(\beta \bar{r}), \quad (31)$$

式中, $H_1^{(1)}$, $H_1^{(2)}$ 分别为 1 阶第一类、第二类 Hankel 函数, E_1 , E_2 为待定常数, $\beta = \sqrt{c_2}$ 且 $\text{Re}(\beta) > 0$ 。

由于基础振动在饱和薄层内仅有向外传播的波, 由 Hankel 函数的渐近性可得 $B_1 = 0$, 再结合边界条件 (5a), 得

$$E_2 = \frac{\phi}{H_1^{(2)}(\beta)}. \quad (32)$$

将式 (31)、(32) 代入式 (30) 得

$$\bar{\tau}_{rz} = \bar{\tau}_{rz1} \cos \theta = \phi \bar{r} \left(\beta \frac{H_0^{(2)}(\beta \bar{r})}{H_1^{(2)}(\beta \bar{r})} - 1 \right) \cos \theta, \quad (33)$$

式中, $H_0^{(2)}$ 为 0 阶第二类 Hankel 函数。

设作用在基础侧面的反力矩为 $N_\phi(t) = N_\phi e^{i\omega t}$, 对 $(\bar{r} \bar{\tau}_{rz})|_{\bar{r}=1}$ 沿基础侧面进行积分可得反力矩幅值:

$$\frac{N_\phi}{Gr_0^3} = l \phi \pi (1 - \beta \frac{H_0^{(2)}(\beta)}{H_1^{(2)}(\beta)}) = l \phi (S_1 + i S_2), \quad (34)$$

式中, l 为基础的埋深比, 且有 $l = \frac{h}{r_0}$ 。

2.3 基础的动力平衡方程

埋置基础的摇摆平衡方程为

$$I\ddot{\phi}(t) = M(t) - R_{\phi}(t) - N_{\phi}(t), \quad (35)$$

式中, I 为刚性圆柱基础的质量惯性矩。

将基底反力矩式(24)和基础侧面的反力矩式(34)代入式(35), 整理得

$$\frac{\rho r_0^2 B_{\phi}}{G} \ddot{\phi}(t) + K\phi(t) = \frac{M(t)}{Gr_0^3}, \quad (36)$$

式中, B_{ϕ} 为基础质量比, K 为等效摇摆动力刚度系数, 且有

$$B_{\phi} = I / \rho r_0^5, \quad (37)$$

$$K = \frac{8}{3(1-\nu)} \frac{f_1 - if_2}{f_1^2 + f_2^2} + l(S_1 + iS_2). \quad (38)$$

3 解的验证

为了验证本文结果的正确性, 计算了基础埋深为 0 时, 即基础位于地基表面时的动力柔度系数 (f_1 和 f_2) 曲线, 并已知文献的结果进行了对比, 见图 2, 3。

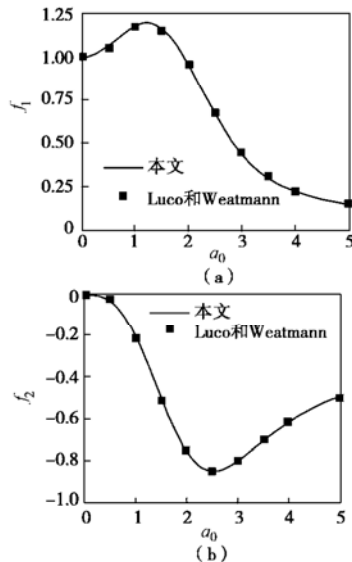


图 2 基础位于弹性半空间表面时的动力柔度系数

Fig. 2 Dynamic compliance coefficients for surface foundations on elastic half-space

图 2 给出的是基础位于弹性半空间表面时的动力柔度系数曲线。计算中令 $\rho^* = b^* = 10^{-5}$ 将饱和地基退化到弹性地基, 其他参数值与 Luco 等^[3]的相同。图 3 给出的是基础位于饱和半空间表面时的动力柔度系数曲线, 并与 Jin 等^[14]的计算结果进行对比, 程序中的计算参数选自文献[14]。由于文献[14]研究的频率范围为 $0 < a_0 \leq 4$, 因此对比也仅限于此范围。由图 2, 3 可以看出, 本文结果与对比文献的结果吻合的很好。

对于埋置基础, 笔者^[20]曾计算了埋置于弹性半空间中的刚性圆柱基础的竖向动力刚度系数, 并把所得结果与经典的数值解^[5]进行了对比, 从而验证了本文选用的对埋置基础动力响应的计算方法是可行的, 这里不

再详述。

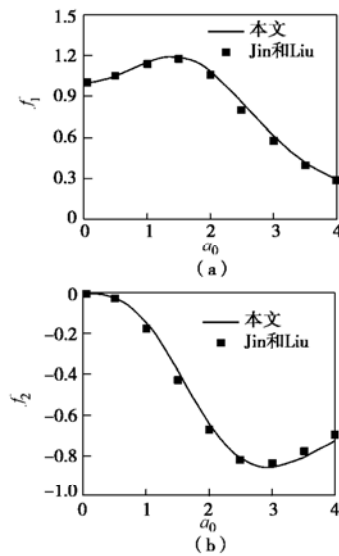


图 3 基础位于饱和半空间表面时的动力柔度系数

Fig. 3 Dynamic compliance coefficients for surface foundations on saturated half-space

4 算例分析

本文中饱和土的无量纲物理力学参数: $\rho^* = 0.53$; $m^* = 1.1$, 土骨架泊松比 $\nu = 0.01, 0.25, 0.3, 0.45, 0.49$; 无量纲的固液两相黏性耦合参数 $b^* = 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000$ 。

在分析中, 我们选取 $\nu = 0.25$ ($\lambda^* = 1$), $b^* = 0.01$ 和 1000 分别计算了不同埋深比 ($l = 0, 0.25, 0.5, 1$) 时, 摇摆动力刚度系数 K 随无量纲激振频率 a_0 的变化曲线 ($0 < a_0 \leq 5$), 其结果如图 4, 5 所示。

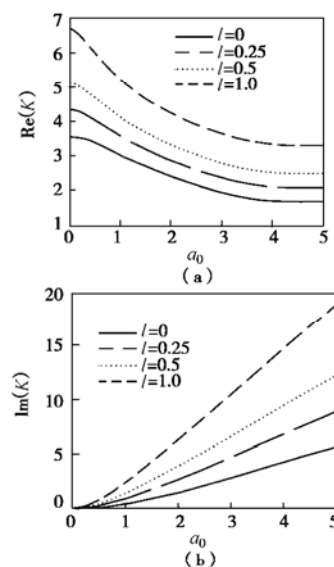


图 4 不同 l 值时 K 随 a_0 的变化曲线 ($b^* = 0.01$)

Fig. 4 Variation of K with a_0 for different values of l ($b^* = 0.01$)

由图 4, 5 可见, 埋深比 l 对动力响应有很大的影

响, 对于给定的 b^* 值, K 的实部和虚部值都随 l 的增加而增加, 但不同的 l 值对应的 $K - a_0$ 变化曲线相似。当 b^* 值较小时, $\text{Re}(K)$ 随频率 a_0 的增加呈缓慢减小的趋势, 且埋深越大趋势越明显; 当 b^* 值很大时, 在较小频率值范围内 ($0 < a_0 \leq 0.3$), $\text{Re}(K)$ 随频率 a_0 的增加而增加; 但当 $0.3 < a_0 \leq 5$ 时, $\text{Re}(K)$ 随频率 a_0 的增加而线性减小。对于 K 的虚部, 无论 b^* 值大或小, 其值都与频率 a_0 基本呈线性增加的关系。

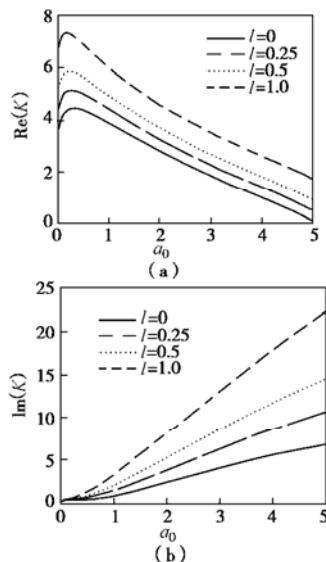


图5 不同 l 值时 K 随 a_0 的变化曲线 ($b^*=1000$)

Fig. 5 Variation of K with a_0 for different values of l ($b^*=1000$)

图6给出了 $\nu = 0.25$, $l = 0.25$, 不同 b^* 值 ($b^* = 0.01, 0.1, 1, 10, 100, 1000$) 时的动力刚度系数曲线, 为了比较, 图6中还给出了单相弹性半空间 (干土) 对应的曲线。 b^* 值与饱和土的渗透系数成反比, 即 b^* 越大, 代表渗透系数越小。由图中可以看出, $b^* = 0.01$ 和 $b^* = 0.1$ 对应的 K 曲线基本重合, 这说明当 b^* 值很小时 ($b^* < 1$), 即对于渗透性很好的饱和砂性地基, 其振动特性主要受土骨架的影响, 渗透系数对动力刚度的影响可以忽略。随着 b^* 值的增大, $\text{Re}(K)$ 和 $\text{Im}(K)$ 值都随之增大, 不同 b^* 值对应的曲线间的差异明显, 当 $b^* \geq 100$ 时, $\text{Re}(K)$ 将在某些高频段内有减小的现象, 且随着 b^* 值的持续增加, $\text{Re}(K)$ 和 $\text{Im}(K)$ 值均逐渐接近于 $\nu = 0.5$ 的单相弹性半空间曲线, 这些说明了, 对渗透性极差、土骨架与孔隙水间难以产生相对运动的饱和黏性地基, 其振动特性将受孔隙水和土骨架的共同影响而犹如 $\nu = 0.5$ 的单相弹性半空间, 其中第二 P 波的作用可以忽略。

从图6中还可以看出, 当 b^* 值很小时, 饱和地基 K 的实部值较土骨架参数相同的单相弹性半空间的略大, 而虚部值却比弹性半空间的小, 因此, 对于渗透性很好的饱和砂性地基, 孔隙水的存在将使其动刚度

有所增大, 而它的阻尼特性减弱, 对位于饱和地基表面的刚性基础的摇摆振动分析中^[15]也得出了相似的结论, 但两者对基础的综合影响尚需进一步研究。

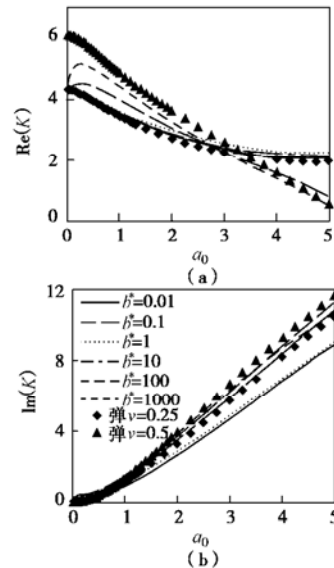


图6 不同 b^* 值时 K 随 a_0 的变化曲线 ($l=0.25$)

Fig. 6 Variation of K with a_0 for different b^* ($l=0.25$)

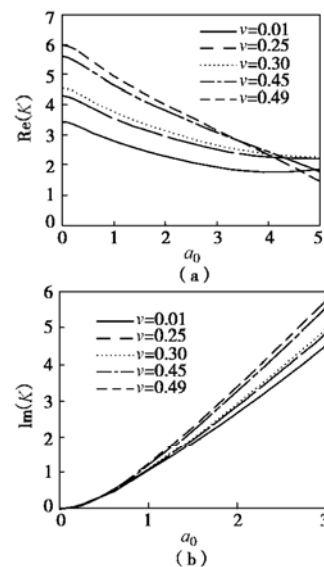


图7 ν 对 K 的影响 ($b^*=1$, $l=0.25$)

Fig. 7 Effect of ν on K ($b^*=1$, $l=0.25$)

最后以 $b^* = 1$, $l = 0.25$ 为例, 选用5个不同的土骨架泊松比 ($\nu = 0.01, 0.25, 0.3, 0.45, 0.49$) 对动力刚度系数进行了计算, 以研究 ν 的影响, 结果见图7。由图中可知, b^* 和 l 值一定时, 土骨架的泊松比 ν 对摇摆动力刚度的实部和虚部均有很大的影响。当 $a_0 \leq 0.5$ 时 $\text{Im}(K)$ 几乎不受 ν 的影响, 当 $a_0 > 0.5$ 时, $\text{Im}(K)$ 随 ν 的增加而增加; $\text{Re}(K)$ 的变化略微复杂, 对 $0 < \nu \leq 0.3$ 的情况, 随着 ν 的增加 $\text{Re}(K)$ 增加, 但当 ν 增大到一定值时 ($\nu \geq 0.45$), ν 的继续增加将导致某些高频段内 ($a_0 > 3.5$) $\text{Re}(K)$ 的减小。

5 结 论

本文由 Biot 动力控制方程出发, 考虑地基与基础侧面与的动力相互作用, 用解析的方法研究了在简谐激振力下, 埋置于饱和半空间中的刚性圆柱基础的摇摆振动问题。将埋置基础退化到埋深为零的情况, 分别计算了地基为单相弹性半空间和饱和半空间时的动力柔度系数, 计算结果与已知的研究成果十分吻合, 从而验证了本文所采用的方法和程序是可靠的。通过数值算例分析可得出如下结论:

(1) 计算结果表明, 本文提出的方法可以有效地分析出基础埋深、渗透系数、土骨架泊松比对饱和地基中埋置基础的摇摆振动特性的影响。

(2) 不论渗透性好差, 饱和地基的摇摆动力刚度 K 的实部和虚部值都随基础埋深的增加而增加, 且其虚部值均随频率 a_0 基本呈线性增加的关系。

(3) 对于渗透性很好的饱和砂性地基, 其振动特性主要受土骨架的影响, 渗透系数对动力刚度的影响可以忽略, 且通过与土骨架参数相同的单相弹性半空间的对比, 表明孔隙水的存在使饱和砂性土的动刚度有所增大, 而它的阻尼特性有所减弱。

(4) 随着渗透系数的减小, $\text{Re}(K)$ 和 $\text{Im}(K)$ 值会随之增大, 只是对渗透性极差、土骨架与孔隙水间难以产生相对运动的饱和黏性地基, 其实部值将在某些高频段内有减小的现象, 且其振动特性将逐渐接近于泊松比为 0.5 的单相弹性半空间理论曲线。

(5) b^* 和 l 值一定时, $\text{Re}(K)$ 和 $\text{Im}(K)$ 值会随泊松比的增大而增大, 只是当泊松比增大到一定值时, 在高频率段内 ($a_0 > 3.5$) 有 $\text{Re}(K)$ 减小的现象。

参考文献:

- [1] REISSNER E. Stationare, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde masse erregte schwingungen einrs homogenen elastischen halfbraumes[J]. Archive of Applied Mechanics, 1936, 7: 381 - 396.
- [2] AWOJOBI A O, GROOTENHUIS P. Vibration of rigid bodies on semi-infinite elastic media[J]. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1965, 287: 27 - 63.
- [3] LUCO J E, WESTMANN R A. Dynamic response of circular footings[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1971, 97(EM5): 1381 - 1395.
- [4] SELVADURAI A P S. Rotary oscillations of a rigid disc inclusion embedded in an isotropic elastic infinite space[J]. International Journal of Solids and Structures, 1981, 17: 493 - 498.
- [5] APSELR J, LUCO J E. Impedance functions for foundations embedded in a layered medium: an integral equation approach[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1987, 15: 213 - 231.
- [6] SPYRAKOS C C, XU C J. Dynamic analysis of flexible massive strip-foundations embedded in layered soils by hybrid BEM-FEM[J]. Computers & Structures, 2004, 82(29/30): 2541 - 2550.
- [7] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. low frequency range[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1956, 28(2): 168 - 178.
- [8] BIOT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. high frequency range[J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1956, 28(2): 179 - 191.
- [9] HALPERN M R, CHRISTIANO P. Response of poroelastic halfspace to steady-state harmonic surface tractions[J]. Internal Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1986, 10(6): 609 - 632.
- [10] HALPERN M R, CHRISTIANO P. Steady-state harmonic response of a rigid plate bearing on a liquid-saturated poroelastic half space[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1986, 14: 439 - 454.
- [11] PHILIPPACOPOULOS A J. Axisymmetric vibration of disk resting on saturated layered half-space[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1989, 115(10): 2301 - 2322.
- [12] JIN B, LIU H. Vertical dynamic response of a disk on a saturated poroelastic half-space[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1999, 18: 437 - 443.
- [13] JIN B, LIU H. Horizontal vibrations of a disk on a poroelastic half-space[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2000, 19: 269 - 275.
- [14] JIN B, LIU H. Rocking vibrations of rigid disk on saturated poroelastic medium[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2000, 19: 469 - 472.
- [15] 付 兵. 饱和地基上基础的摇摆振动特性研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2005. (FU Bing. Study on the rocking vibrations of foundations resting on saturated grounds[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2005. (in Chinese))
- [16] 陈龙珠, 陈胜立. 饱和地基上刚性基础的竖向振动分析[J]. 岩土工程学报, 1999, 21(4): 392 - 397. (CHEN Long-zhu, CHEN Sheng-li. Vertical vibration of a rigid circular footing

- on saturated soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1999, **21**(4): 392 - 397. (in Chinese))
- [17] ZENG X, RAJAPAKSE R K N D. Vertical vibrations of a rigid disk embedded in a poroelastic medium[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1999, **23**: 2075 - 2095.
- [18] SENJUNTICHAH T, SAPSATHIARM Y. Forced vertical vibration of circular plate in multilayered poroelastic medium[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 2003, **129**(11): 1330 - 1341.
- [19] SENJUNTICHAH T, MANI S, RAJAPAKSE R K N D. Vertical vibration of an embedded rigid foundation in a poroelastic soil[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2006, **26**(6-7): 626 - 636.
- [20] 蔡袁强, 胡秀青. 埋置于饱和地基中考虑质量的刚性圆柱基础的等效竖向动力刚度[J]. 岩石力学与工程学报, 2008, **27**(2). (CAI Yuan-qiang, HU Xiu-qing. Equivalent vertical dynamic stiffness for embedded rigid cylindrical foundation in saturated soil[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2008, **27**(2). (in Chinese))
- [21] NOVAK M, BEREDUGO Y. Vertical vibration of embedded footings[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1972, **98**(SM12): 1291 - 1310.
- [22] NOVAK M, BEREDUGO Y. Coupled horizontal and rocking vibration of embedded footings[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1972, **9**: 477 - 493.
- [23] BARANOV V A. On the calculation of excited vibrations of an embedded foundation[J]. Polytechnical Institute of Riga, 1967, **14**(5): 195 - 207. (in Russia)
- [24] NOGAMI T, NOVAK M. Soil-pile interaction in vertical vibration[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1976, **4**(3): 277 - 294.
- [25] NOVAK M, NOGAMI T. Soil-pile interaction in horizontal vibration[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1977, **5**(3): 263 - 281.
- [26] NOVAK M, NOGAMI T, ABOUL-ELLA F. Dynamic soil reaction for plane strain case[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1978, **104**(4): 953 - 969.
- [27] LIU W M, NOVAK M. Dynamic response of single piles embedded in transversely isotropic layered media[J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1994, **23**(3): 1239 - 1257.
- [28] MILITANO G, RAJAPAKSE R K N D. Dynamic response of single piles in a multi-layered soil to transient torsional and axial loading[J]. Geotechnique, 1999, **49**(1): 91 - 109.
- [29] BIOT M A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media[J]. Journal of Applied Physics, 1962, **33**: 1482 - 1498.
- [30] MUKI R. Asymmetric problems of the theory of elasticity for a semi-infinite solid and a thick plate[C]// Proc of the 399th Interscience of Progress in Solid Mechanics. New York: Amsterdam North-Holland Publish Co, 1960.
- [31] NOBEL B. The solution of Bessel-function dual integral equations by a multiplying-factor method[J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1963, **59**: 351 - 362.