

纵波在改进的弹性非线性法向变形行为单节理处的传播特性研究

俞 缙^{1, 2}, 钱七虎², 林从谋¹, 赵晓豹³

(1. 华侨大学岩土工程研究所, 福建 厦门 361021; 2. 解放军理工大学工程兵工程学院, 江苏 南京 210007; 3. 南京大学地球科学与工程学院, 江苏 南京 210093)

摘 要: 将传统的 BB 模型与经典指数模型统一起来, 提出的准静态条件下改进的节理弹性非线性法向变形本构关系可量化描述节理变形的这类差异。在不考虑加载速率对节理变形行为影响的情况下, 将该本构关系推广至动态条件, 建立了法向入射纵波在弹性半无限空间中干性单节理处传播的位移不连续模型, 基于 Lemaitre 假设获得了节理透、反射系数 $|T_{\text{IMP}}|$ 和 $|R_{\text{IMP}}|$ 的近似解析解; 同时结合一维波动方程特征线法推导了节理透、反射波质点速度时域数值差分格式并自编了计算程序, 进而得到 $|T_{\text{IMP}}|$ 、 $|R_{\text{IMP}}|$ 、透、反射波能量 e_{tra} 和 e_{ref} 、延迟时间 T_{del} 的半数值解, 依此研究弹性纵波在单节理处的传播过程及特征。在针对节理法向初始切线刚度 $K_{\text{n,i}}$ 、节理闭合量与最大允许闭合量比值 $\gamma=d_{\text{n}}/d_{\text{max}}$ 、入射波频率 f 等因素对 $|T_{\text{IMP}}|$ 、 $|R_{\text{IMP}}|$ 的影响进行探讨的同时, 着重分析模型非线性程度 ξ 及入射波最大振幅 $|v_{\text{inc}}|$ 的变化对透射波振幅及能量衰减、波形及频谱畸变、时间延迟所产生的影响, 并解释了一种“超越”现象。

关键词: 岩石节理; 纵波; 位移不连续模型; 非线性程度

中图分类号: TU45

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2009)08-1156-09

作者简介: 俞 缙(1978-), 男, 江苏苏州人, 博士后, 讲师, 硕士生导师, 主要从事岩土力学、岩土工程测试技术及地基处理等方面的研究工作。E-mail: bugyu0717@hqu.edu.cn。

Transmission of elastic P-wave across one fracture with improved nonlinear normal deformation behaviors

YU Jin^{1, 2}, QIAN Qi-hu², LIN Cong-mou¹, ZHAO Xiao-bao³

(1. Geotechnical Engineering Institute, Huaqiao University, Xiamen 361021, China; 2. Engineering Institute of Engineering Corps, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China; 3. School of Earth Sciences and Engineering, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

Abstract: The improved elastic nonlinear normal deformation constitutive model under the quasi-static condition which generalizes the BB model and the classical exponential model can describe the extent of nonlinearity quantitatively. Without the loading-rate effect considered, the improved constitutive relationship is extended to be under the dynamic condition, and then a nonlinear displacement discontinuity model for normally incident P-wave propagation across a dry fracture is established in an elastic half-space. By introducing the Lemaitre hypothesis, the approximate analytical solutions of transmission and reflection coefficients $|T_{\text{IMP}}|$ and $|R_{\text{IMP}}|$ are obtained. Furthermore, using one-dimensional wave equation characteristic method, the time-domain numerical difference scheme of reflected and transmitted particle velocities is proposed, and computational programs are compiled to obtain semi-numerical solutions of $|T_{\text{IMP}}|$ and $|R_{\text{IMP}}|$, transmission and reflection energy e_{tra} and e_{ref} , and delay time T_{del} . Parameter studies are conducted to get an insight into the effects of the extent of nonlinearity ξ and the incident wave maximum amplitude $|v_{\text{inc}}|$ on transmitted wave amplitude and energy attenuation, waveform and spectral aberration, and time delays, in terms of fracture initial stiffness $K_{\text{n,i}}$, the ratio of given closure to the maximum allowable closure $\gamma=d_{\text{n}}/d_{\text{max}}$, and frequency f . In addition, the phenomenon of exceeding is explained.

Key words: rock fracture; P-wave; displacement discontinuity model; extent of nonlinearity

0 引 言

节理、裂隙对岩体中应力波的传播过程及规律影响很大。通常认为节理间的反射与透射可导致应力波

基金项目: 国家自然科学基金项目(40702046); 福建省自然科学基金项目(2009J05125); 建设部“科学技术项目计划”(06-K1-23)
收稿日期: 2008-10-20

振幅衰减及波速降低。由于岩体结构破坏准则往往由波振幅门槛值(如质点位移、速度或加速度峰值)确定,因此在研究岩体动力学及防护工程问题时,节理裂隙对应力波的影响成为关键课题^[1]。

早期的研究主要是考虑应力波穿越含黏结界面或界面层介质时界面对波影响的理论计算及试验验证^[2-4]。随后的研究又建立于波散射模型基础之上,集中在相对于波长具有较小尺度节理(如微裂隙、微空隙)的影响方面,并经历了从考虑线性接触条件^[5-8]到考虑非线性接触条件^[9-11]的发展过程。然而多数天然节理岩体中大尺度平面节理(相对于波长伸展尺寸较大而厚度较小,也称宏观节理,以下简称为节理)的影响占主导地位^[12-14]。从物理角度上节理可被看作众多共线微裂隙、微空隙和粗糙面上微接触体的集合体,它们的变形产生节理总体变形(如张开、闭合、滑移),这会使岩体结构质点的位移和速度变化在空间上不连续,故节理又被视为非黏结界面^[15]、滑移界面^[16]或位移不连续体^[17]。当波穿过它们时应力场连续,位移场却是非连续的,显然此时采用黏结界面假设或波散射模型均不适宜,因此一些学者提出了位移不连续理论(把节理变形本构关系看作波动方程中的位移不连续边界条件)来解释节理对波的影响^[15-21]。此类研究同样经历了从考虑适用于小振幅波的线性位移不连续模型^[16-20]到考虑适用于大振幅波的非线性位移不连续模型的发展过程^[12-14, 21-22]。

关于非线性模型,目前仅局限于研究单一类型节理变形关系,如具有双曲型本构关系(BB模型)的节理对纵波的影响^[12-14],而根据不同的节理变形关系可建立不同的位移不连续模型。笔者曾分别利用BB模型和经典指数模型来探讨不同类型非线性节理变形行为下纵波的透、反射规律^[21]。该研究虽在某种程度上弥补了前人采用单一模型分析的不足,但两类模型在数学上都存在半值应力(half-closure stress)不可调、模型非线性程度(节理闭合量发展速度)固定不变的缺陷,因此该研究不能反映节理闭合量与应力关系非线性程度的变化对应力波传播的影响。为此笔者随后提出了改进的弹性非线性法向变形本构模型^[23],该模型可量化描述节理变形非线性程度的差异。本文将该模型推广至动态条件,建立法向入射纵波(不考虑剪切变形)在弹性半空间中干性单节理处传播的位移不连续模型,基于Lemaitre假设^[23]获得了节理透、反射系数近似解析解;同时结合一维波动方程特征线法^[12-13]推导了节理处透、反射波质点速度数值差分格式并利用Fortran语言编制了计算程序,获得了质点速度时域半数值半解析解,从而得到透、反射系数、透、反射波能量,延迟时间的半数值解,依此探讨纵波在

单节理处的传播过程及特征。在针对节理法向初始切线刚度、节理闭合量与最大允许闭合量比值、频率等因素对透、反射系数的影响进行探讨的同时,着重分析模型非线性程度和入射波振幅的改变对透射波振幅及能量衰减、波形及频谱畸变和时间延迟现象所产生的影响,并解释了入射波振幅较高时出现的一种“超越”现象。

1 改进的节理非线性模型及动态推广

1.1 改进的节理弹性非线性法向变形本构模型简述

岩石节理准静态法向单调加载及循环加、卸载条件下代表性模型较多,如Shehata^[24], Goodman^[25], Kulhaway^[26], Bandis等^[27], Barton等^[28], Malama等^[29]提出的模型,而动态模型较少且基本是从准静态模型中移植而来,如Cai等^[30], Yang等^[31]分别对天然及人工制备节理进行动态单轴加载试验,将BB(Barton and Bandis)模型推广至动态, Wang等^[32]用Instron1342电液伺服试验机对不同表面形态人工节理试验建立的考虑率效应的幂函数形式节理动态经验模型。笔者等^[23]已探讨了上述各模型非线性程度不可调的数学缺陷,基于前人准静态法向单调加载试验结果,将传统的BB模型与经典指数模型统一起来,建立了改进的节理弹性非线性法向变形本构模型,并在数学上严格证明了二者是新模型的两个特例。模型方程及节理法向切线刚度 K_n 的表达式为

$$d_n = \frac{\xi d_{\max} \left\{ \exp \left[\frac{(1-\xi)\sigma_n}{\xi K_{n,i} d_{\max}} \right] - 1 \right\}}{\exp \left[\frac{(1-\xi)\sigma_n}{\xi K_{n,i} d_{\max}} \right] - \xi}, \quad (1)$$

$$K_n = \frac{\partial \sigma_n}{\partial d_n} = \frac{\xi K_{n,i} d_{\max}^2}{(d_{\max} - d_n)(\xi d_{\max} - d_n)}, \quad (2)$$

式中, σ_n 为节理法向压应力, d_n 为节理法向闭合量, $K_{n,i}$ 为节理法向初始切线刚度, $d_{\max}$ 为节理法向最大允许闭合量。这里规定 σ_n , d_n 以压缩为正。 ξ 为用于对 σ_n - d_n 关系非线性程度进行修正的系数(具体确定方法见文献[22])。模型 σ_n - d_n 关系曲线见图1,其中 $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ 。新模型以BB模型($\xi \rightarrow 1$)和经典指数模型($\xi \rightarrow \infty$)为边界,随着 ξ 值的增大,模型曲线的非线性程度随之增大。该模型克服了传统节理弹性非线性模型半值应力不可调、非线性程度固定不变的缺点。

1.2 模型的动态推广

Zhao等^[12]、Zhao等^[13-14]及笔者等^[21]认为连续的循环加卸载对节理的刚化作用可使其 σ_n - d_n 关系成为无滞回环的弹性关系,而天然岩石节理在漫长的地质历史中都经历了多次变形,故起初的循环加卸载过程

中的滞回现象可被忽略，同时在不考虑加载速率对节理变形特性影响情况下，解释了准静态条件下 BB 模型与经典指数模型在纵波传播问题中运用的合理性。这里沿用该思想，将改进的节理弹性非线性法向变形本构模型推广至动态条件，进行计算分析研究。

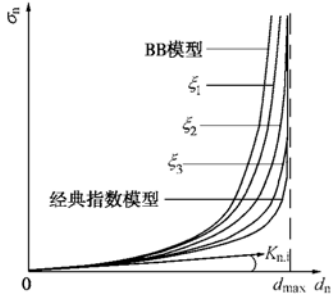


图 1 改进的岩石节理法向变形本构模型示意图

Fig. 1 Improved normal deformation constitutive model of rock fractures

2 近似解析计算

2.1 透、反射系数近似解析解

Schoenberg^[16]、Pyrak-Nolte等^[17]已得出线性位移不连续模型下，任意入射角射入干性单节理应力波（P，SV，SH波）的透、反射系数精确解析解，

$$\begin{aligned} |T_{lin}| &= \sqrt{\frac{4(K/z\omega)^2}{4(K/z\omega)^2 + 1}}, \\ |R_{lin}| &= \sqrt{\frac{1}{4(K/z\omega)^2 + 1}} \end{aligned} \quad (3)$$

式中， $|T_{lin}|$ ， $|R_{lin}|$ 分别为线性变形节理的透、反射系数， z 为波阻抗， K 为节理法向刚度， ω 为入射波角频率。

为得到非线性位移不连续模型下单节理处纵波透、反射系数解析解，王卫华等^[23]借鉴岩石损伤力学领域中的 Lemaitre 等效应变假设思想，利用等效刚度将非线性节理刚度用线性变形本构关系式表示，进而得到 BB 模型情况下节理透、反射系数解析解。所得的计算结果虽并非如该文中所阐述的与 Zhao 等^[12]的数值解完全一致，而只是与其存在一定误差的近似解（笔者^[21]曾详细分析其原因，此处不再赘述），却不失为一种简便计算方法。本文依此法求得具有改进的弹性非线性法向变形本构关系单节理处的纵波透、反射系数近似解析解，

$$|T_{IMP}| = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{z\omega(1-d_n/d_{max})(\xi-d_n/d_{max})}{2\xi K_{n,i}} \right]^2 + 1}} \quad (4)$$

$$|R_{IMP}| = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{2\xi K_{n,i}}{z\omega(1-d_n/d_{max})(\xi-d_n/d_{max})} \right]^2 + 1}} \quad (5)$$

式中， $|T_{IMP}|$ ， $|R_{IMP}|$ 分别为改进后的单节理透、反射系数。由式（4）、（5）可知 $|T_{IMP}|^2 + |R_{IMP}|^2 = 1$ ，即由于应用弹性模型假设，透、反射波能量之和遵守能量守恒定律。

2.2 参数研究

依据不同修正系数 $\xi \rightarrow 1$ ， $\xi = 1.5$ ， $\xi = 5.5$ ， $\xi \rightarrow \infty$ ，针对 $K_{n,i}$ 、节理闭合量与最大允许闭合量比值 $\gamma = d_n/d_{max}$ （反映入射波振幅大小）以及入射波频率 f 等参数进行研究。为了与前人研究结果进行对比，参数均来自文献[12，23]。岩石密度为 $2.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ，波频 $f = \omega/2\pi$ 分别为50 Hz、150 Hz，纵波波速为4500 m/s，波阻抗=密度×波速= $1.08 \times 10^7 \text{ kg/(m}^2 \cdot \text{s)}$ ， $K_{n,i}$ 与 d_{max} 的5组参数组合见表1，计算结果见图2，3。

表 1 d_{max} 和 $K_{n,i}$ 参数值的组合^[12, 23]

Table 1 Various combinations of d_{max} and $K_{n,i}$		
参数组合	节理最大允许闭合量 d_{max}/mm	节理初始切线刚度 $K_{n,i}/(\text{GPa} \cdot \text{m}^{-1})$
1	0.61	1.25
2	0.57	2.00
3	0.53	3.00
4	0.50	3.80
5	0.40	5.50

由图2可知， $|T_{IMP}|$ 不仅随 $K_{n,i}$ ， γ 的增大而增大，随 d_{max} ， f 的增大而减小，还较强的依赖于修正系数 ξ 。在其他参数不变的情况下， ξ 越大， $|T_{IMP}|$ 越小，这意味着节理位移不连续模型非线性程度越大，对入射波的阻碍也越大，致使 $|T_{IMP}|$ 下降。从图3上也可以看出 $|R_{IMP}|$ 所具有的与其相反的规律。

3 半数值半解析计算

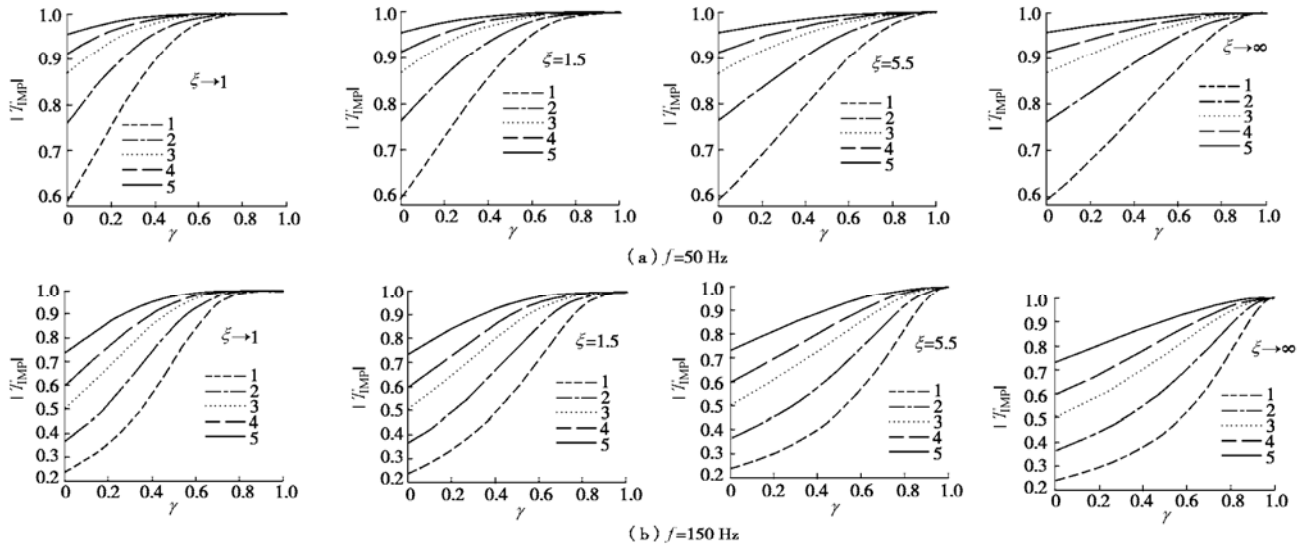
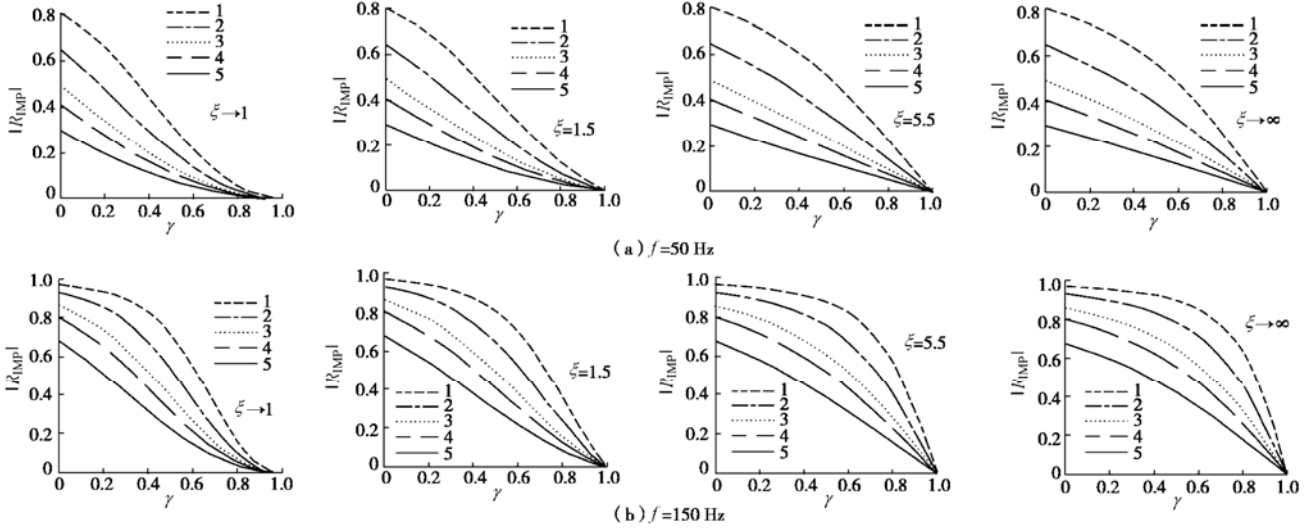
3.1 一维波动方程特征线法

弹性纵波法向穿越具有BB变形本构关系的单节理及平行多节理时的透、反射系数数值解可通过一维波动方程特征线法得到^[12-13]。这里借鉴该思路推导改进的弹性非线性法向本构模型单节理处（篇幅所限，平行多节理问题另文撰述）一维波动方程的特征线解。

弹性波的一维波动方程为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \alpha_p^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (6)$$

式中， $u(x,t)$ 为质点位移， α_p 为波速，且 $\alpha_p^2 = E/\rho$ ，其中 E 为杨氏模量， ρ 为密度。质点速度 $v(x,t) = \partial u(x,t)/\partial t$ ，应变 $\varepsilon(x,t) = \partial u(x,t)/\partial x$ ，式（6）可写为

图2 不同 ξ 情况下各 $d_{\max}$, $K_{n,i}$ 参数组合的 $|T_{\text{IMP}}|$ 与 γ 关系曲线Fig. 2 $|T_{\text{IMP}}|$ as a function of γ for various combinations of $d_{\max}$ and $K_{n,i}$ under different ξ conditions图3 不同 ξ 情况下各 $d_{\max}$, $K_{n,i}$ 参数组合的 $|R_{\text{IMP}}|$ 与 γ 关系曲线Fig. 3 $|R_{\text{IMP}}|$ as a function of γ for various combinations of $d_{\max}$ and $K_{n,i}$ under different ξ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= \alpha_p^2 \frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial x}, \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= \frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

假设线弹性半空间内位于 $x=x_1$ 处有一干性节理, 空间一侧受到质点速度函数为 $p(t)$ 的法向入射平面纵波, 根据特征线法, $x-t$ 平面中函数 $v(x,t) - \alpha_p \varepsilon(x,t)$ 的增量为

$$\begin{aligned} d[v(x,t) - \alpha_p \varepsilon(x,t)] &= \left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \alpha_p \frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} \right] dt + \\ &\quad \left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - \alpha_p \frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial x} \right] dx. \end{aligned} \quad (8)$$

由式 (7), 可将式 (8) 改写为

$$d[v(x,t) - \alpha_p \varepsilon(x,t)]$$

$$= \left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{\alpha_p} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right] (dx - \alpha_p dt). \quad (9)$$

当 $dx/dt = \alpha_p$ 时, $d[v(x,t) - \alpha_p \varepsilon(x,t)] = 0$ 。既沿着 $x-t$ 平面中斜率为 $1/\alpha_p$ 的任何直线, 有特征方程:

$$v(x,t) - \alpha_p \varepsilon(x,t) = \text{constant}, \quad (10)$$

由波阻抗 $z = \rho \alpha_p$, $\alpha_p^2 = E/\rho$ 容易得到:

$$z \alpha_p \varepsilon(x,t) = -\sigma(x,t), \quad (11)$$

式中, $\sigma(x,t)$ 为质点应力 (定义压为正, 拉为负), 将式 (10) 两边同乘以 z , 引入式 (11) 得一维波特征方程:

$$z[v(x,t) - \alpha_p \varepsilon(x,t)] = zv(x,t) + \sigma(x,t) = \text{constant}. \quad (12)$$

同理, 当 $dx/dt = -\alpha_p$ 时, 既沿着 $x-t$ 平面中斜率为 $-1/\alpha_p$ 的任何直线, 有另一特征方程:

$$z[v(x,t) + \alpha_p \varepsilon(x,t)] = zv(x,t) - \sigma(x,t) = \text{constant} \quad (13)$$

如图4所示, $x-t$ 平面中始于节理处并交于 x 轴, 斜率为 $-1/\alpha_p$ 的直线 AB 是波动方程的左行特征线; 始于节理处并交于 t 轴上点 $(0, t - x_1/\alpha_p)$, 斜率为 $1/\alpha_p$ 的直线 AC 是右行特征线; 自点 $(0, t - x_1/\alpha_p)$, 交于 x 轴的直线 CD , 为另一斜率为 $-1/\alpha_p$ 的左行特征线。上标“-”、“+”分别表示参数属于节理前、后弹性波场。

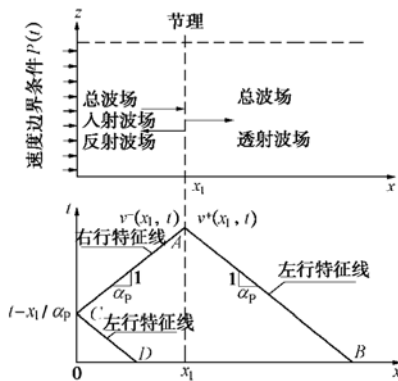


图4 半无限空间中纵波场向穿越单节理波场示意图与对应 $x-t$ 平面中左、右行特征线示意图

Fig. 4 Normal incidence of P-wave through a fracture in a half-space and the corresponding left- and right-running characteristics in the $x-t$ plane

左行特征线 AB 与 x 轴交于 B 点, 当 $t=0$ 时, 研究域未受扰动, 因此有:

$$\left. \begin{aligned} v^+(x, 0) &= 0, \\ \sigma(x, 0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

代入式(13)可得节理后波场中左行特征线 AB 上有:

$$zv^+(x_1, t) - \sigma(x_1, t) = v^+(x, 0) + \sigma(x, 0) = 0 \quad (15)$$

右行特征线 AC 与 t 轴交于 C 点, 在 $t - x_1/\alpha_p$ 时刻, 研究域左边界质点速度 $v^-(0, t - x_1/\alpha_p) = p(t - x_1/\alpha_p)$, 再由式(12)可得节理前波场中右行特征线 AC 上有:

$$zv^-(x_1, t) + \sigma(x_1, t) = zp(t - x_1/\alpha_p) + \sigma(0, t - x_1/\alpha_p), \quad (16)$$

与特征线 AB 相同, 另一左行特征线 CD 上有:

$$zp(t - x_1/\alpha_p) - \sigma(0, t - x_1/\alpha_p) = 0 \quad (17)$$

由式(16)、(17)可得:

$$zv^-(x_1, t) + \sigma(x_1, t) = 2zp(t - x_1/\alpha_p) \quad (18)$$

将式(16)、(18)相加得

$$v^-(x_1, t) + v^+(x_1, t) = 2p(t - x_1/\alpha_p), \quad (19)$$

式(19)表达了在节理前后质点速度间的关系。

3.2 透、反射波质点速度数值差分格式

波场在 $x=x_1$ 处的位移不连续边界条件:

$$\sigma^-(x_1, t) = \sigma^+(x_1, t) = \sigma(x_1, t), \quad (20)$$

$$u^-(x_1, t) - u^+(x_1, t) = \frac{\xi d_{\max} \left\{ \exp \left[\frac{(1-\xi)\sigma(x_1, t)}{\xi K_{n,i} d_{\max}} \right] - 1 \right\}}{\exp \left[\frac{(1-\xi)\sigma(x_1, t)}{\xi K_{n,i} d_{\max}} \right] - \xi} \quad (21)$$

为简化计算过程, 令 $(1-\xi)/(\xi K_{n,i} d_{\max}) = \psi$, 则式(21)可简写为

$$u^-(x_1, t) - u^+(x_1, t) = \frac{\xi d_{\max} \left\{ \exp[\psi \sigma(x_1, t)] - 1 \right\}}{\exp[\psi \sigma(x_1, t)] - \xi}, \quad (22)$$

对式(22)在时间域求导得:

$$\begin{aligned} v^-(x_1, t) - v^+(x_1, t) &= \frac{\xi d_{\max} \psi (1-\xi) \exp[\psi \sigma(x_1, t)] \frac{\partial \sigma(x_1, t)}{\partial t}}{\left\{ \exp[\psi \sigma(x_1, t)] - \xi \right\}^2} \quad (23) \end{aligned}$$

将式(15)代入式(23)可得:

$$\begin{aligned} v^-(x_1, t) - v^+(x_1, t) &= \frac{\xi d_{\max} \psi (1-\xi) \exp[\psi zv^+(x_1, t)] \frac{\partial zv^+(x_1, t)}{\partial t}}{\left\{ \exp[\psi zv^+(x_1, t)] - \xi \right\}^2} \quad (24) \end{aligned}$$

根据式(19)、(24), 得到关于 $v^+(x_1, t)$ 的微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^+(x_1, t)}{\partial t} &= \frac{2 \left[p(t - x_1/\alpha_p) - v^+(x_1, t) \right] \left\{ \exp[\psi zv^+(x_1, t)] - \xi \right\}^2}{z \xi d_{\max} \psi (1-\xi) \exp[\psi zv^+(x_1, t)]} \quad (25) \end{aligned}$$

将时间域 $[0, t]$ 划分为 J 个等时段($j=1, 2, \dots, J$), 每个时段时间增加值 Δt (取为 $\Delta t = T_e/m$)。 $v^+(x_1, t)$ 在每个时间段有一阶向前差商:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^+(x_1, t_j)}{\partial t} &= \frac{v^+(x_1, t_{j+1}) - v^+(x_1, t_j)}{\Delta t} \\ &= \frac{m \left[v^+(x_1, t_{j+1}) - v^+(x_1, t_j) \right]}{T_e}, \quad (26) \end{aligned}$$

式中, T_e 为入射波周期, m 为在入射波一周期内时间的段个数。可以得到计算 $v^+(x_1, t)$ 的差分递归方程:

$$\begin{aligned} v^+(x_1, t_{j+1}) &= v^+(x_1, t_j) + \frac{2T_e \left[p(t_j - x_1/\alpha_p) - v^+(x_1, t_j) \right] \left\{ \exp[\psi zv^+(x_1, t_j)] - \xi \right\}^2}{m z \xi d_{\max} (1-\xi) \psi \exp[\psi zv^+(x_1, t_j)]}, \quad (27) \end{aligned}$$

代入式(22)得到计算 $v^+(x_1, t)$ 完整形式差分递归方程:

$$\begin{aligned} v^+(x_1, t_{j+1}) &= v^+(x_1, t_j) + \frac{2T_e K_{n,i} \left[p(t_j - x_1/\alpha_p) - v^+(x_1, t_j) \right]}{m z (1-\xi)^2} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{ \exp \left[\frac{z(1-\xi)v^+(x_1, t_i)}{\xi K_{n,i} d_{\max}} \right] - \xi \right\}^2 \quad (28)$$

$$\left\{ \exp \left[\frac{z(1-\xi)v^+(x_1, t_j)}{\xi K_{n,i} d_{\max}} \right] \right\}.$$

如果入射波的质点速度波形函数 $p(t)$ 和初始条件 $v^+(x_1, 0)$ 已知, 利用上式可迭代计算得出 $v^+(x_1, t)$, 即透射波质点速度 $v_{\text{tra}}(x_1, t)$ 。在计算中将 m 取得较大($m=1000$), 可以得到一个足够小的 Δt , 使得计算得到具有足够精度的 $v^+(x_1, t)$ 差分数值解。再借助式(19)易求出 $v^-(x_1, t)$, 从而求出节理处反射波的质点速度:

$$v_{\text{ref}}(x_1, t) = v^-(x_1, t) - v_{\text{inc}}(x_1, t), \quad (29)$$

式中, $v_{\text{inc}}(x_1, t)$ 为节理处入射波质点速度。节理透、反射系数半数值解 $|T_{\text{IMP}}|$ 、 $|R_{\text{IMP}}|$ 由透、反射波速度振幅与入射波速度振幅比表示:

$$\left\{ \begin{aligned} |T_{\text{IMP}}| &= \frac{v_{\text{tra}}(x_1, t)_{\max}}{v_{\text{inc}}(x_1, t)_{\max}}, \\ |R_{\text{IMP}}| &= \frac{v_{\text{ref}}(x_1, t)_{\max}}{v_{\text{inc}}(x_1, t)_{\max}}. \end{aligned} \right. \quad (30)$$

为检验入射波在节理处的透、反射过程中是否有能量消耗, 通过对 $v_{\text{tra}}(x_1, t)$ 和 $v_{\text{ref}}(x_1, t)$ 的数值积分, 计算归一化透、反射波能量 e_{tra} 和 e_{ref} :

$$e_{\text{tra}} = \frac{E_{\text{tra}}}{E_{\text{inc}}} = \frac{\int_{t_{\text{tra}}^0}^{t_{\text{tra}}^1} z [v_{\text{tra}}(x_1, t)]^2 dt}{\int_{t_{\text{inc}}^0}^{t_{\text{inc}}^1} z [v_{\text{inc}}(x_1, t)]^2 dt} = \frac{\sum_{j=t_{\text{tra}}^0}^{j=t_{\text{tra}}^1} [v_{\text{tra}}(x_1, t_j)]^2 \Delta t}{\sum_{j=t_{\text{inc}}^0}^{j=t_{\text{inc}}^1} [v_{\text{inc}}(x_1, t_j)]^2 \Delta t}, \quad (31)$$

$$e_{\text{ref}} = \frac{E_{\text{ref}}}{E_{\text{inc}}} = \frac{\int_{t_{\text{ref}}^0}^{t_{\text{ref}}^1} z [v_{\text{ref}}(x_1, t)]^2 dt}{\int_{t_{\text{inc}}^0}^{t_{\text{inc}}^1} z [v_{\text{inc}}(x_1, t)]^2 dt} = \frac{\sum_{j=t_{\text{ref}}^0}^{j=t_{\text{ref}}^1} [v_{\text{ref}}(x_1, t_j)]^2 \Delta t}{\sum_{j=t_{\text{inc}}^0}^{j=t_{\text{inc}}^1} [v_{\text{inc}}(x_1, t_j)]^2 \Delta t}. \quad (32)$$

式中 E_{inc} , E_{tra} , E_{ref} 分别为入、透、反射波能量; t_{inc}^0 , t_{tra}^0 , t_{ref}^0 分别为入、透、反射波初始时刻; t_{inc}^1 , t_{tra}^1 , t_{ref}^1 为终了时刻。

4 参数研究

利用 Fortran 语言编制计算程序, 采用前述近似解析计算中使用的 α_p , ρ , z 参数值, 选择表1中参数组合1, 且垂直于左边界($x=0$)的入射纵波为周期是20 ms的半正弦波, 应力最大振幅 $|\sigma_{\text{inc}}| = \rho \alpha_p |v_{\text{inc}}|$ 分别定为0.22, 0.54, 1.1, 2.2, 4.4 MPa, 其中 $|v_{\text{inc}}|$ 为入射波时域最大振幅, 分别为0.02, 0.05, 0.10, 0.20, 0.40 m/s, 模型修正系数选择 $\xi \rightarrow 1$, $\xi = 1.8$, $\xi \rightarrow \infty$ 三种情况进行计算。入、透射波波形及频谱曲线见图5。

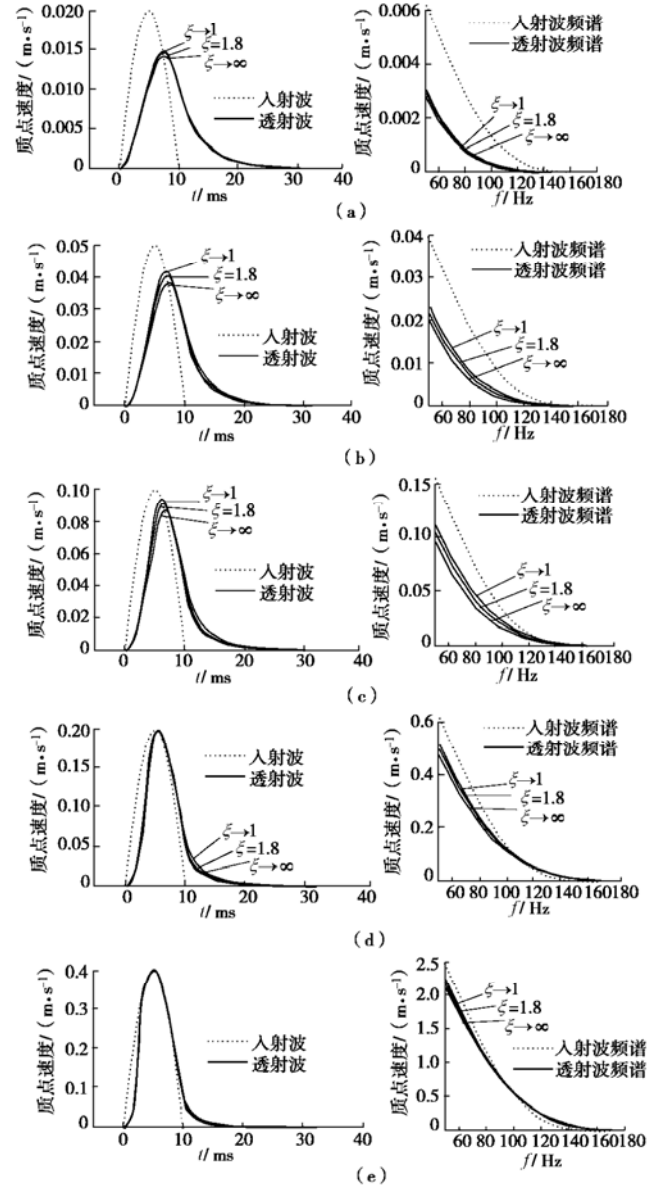


图5 不同入射波振幅下透射波波形图及频谱曲线图

Fig. 5 Incident P-wave pulses with different amplitudes and the resulting transmitted pulses and the corresponding spectrum

纵波传播过程中, 节理首先受压应力作用达到一定闭合量, 然后恢复至初始状态, 即随 σ_n 的增大, d_n 以非线性方式增加到一个最大值后再减小为0。由图5可见, $|v_{\text{inc}}|$ 增大, 透射波时域最大振幅 $|v_{\text{tra}}|$ 与频域最大振幅相应增大, $|v_{\text{inc}}|$ 很大时, $|v_{\text{tra}}| \rightarrow |v_{\text{inc}}|$ 。同时, 透射波波形相对于入射波而言均不同程度的在时域上发生畸变, 波起跳阶段体现出“由缓到陡”的变化趋势, 到达波峰后又不同程度的经历“由陡至缓”的趋势。 $|v_{\text{inc}}|$ 较小时, 不同 ξ 值的透射波波形及频谱图差别不大, 这是因为 ξ 在节理变形初期对节理闭合程度影响不大, 对透射波的影响相应也较小; $|v_{\text{inc}}|$ 较大时, 不同 ξ 值的透射波波形及频谱图差别增大, ξ 较大的节理其 $|v_{\text{tra}}|$ 明显较小, 这反映了变形非线性程度较大的

节理对纵波的透射能力较低,也意味着非线性程度较小的节理中有更多的波传过,这是因为此时节理变形发展至中期阶段, ξ 较大的节理相对于较小 ξ 值的节理更易闭合,对纵波穿越起到一定阻碍作用,而不利其传播; $|v_{inc}|$ 很大时,不同 ξ 值的透射波波形及频谱图差别又变小,甚至接近重合,这是由于此时节理变形发展至后期阶段,闭合趋于完全,波可顺利传过节理,这也可以从 $|v_{inc}|=0.4$ m/s时,透射波与入射波“先分离后重合”的现象上体现出来。值得注意的是, $|v_{inc}|$ 很大时频谱图显示相对于入射波而言,透射波产生振幅更大的高频分量,这与Zhao等^[12]的认识一致,且出现了 ξ 越大高频部分振幅越大的情况。此外,无论 ξ 取值多大,透射波波峰总是与入射波波峰后部相交。

进一步对 $|T_{IMP}|$, $|R_{IMP}|$, e_{tra} , e_{ref} 进行计算, $|v_{inc}|$ 分别为0.001, 0.01, 0.05, 0.08, 0.10, 0.15, 0.20, 0.40 m/s, 整个计算结果显示对任何情形有 $e_{tra} + e_{ref} = 1$, 即透、反射波的能量之和总符合能量守恒定律,这也从侧面体现了计算的正确性。 $|T_{IMP}|$, e_{tra} 与 ξ 关系见图6, 7。

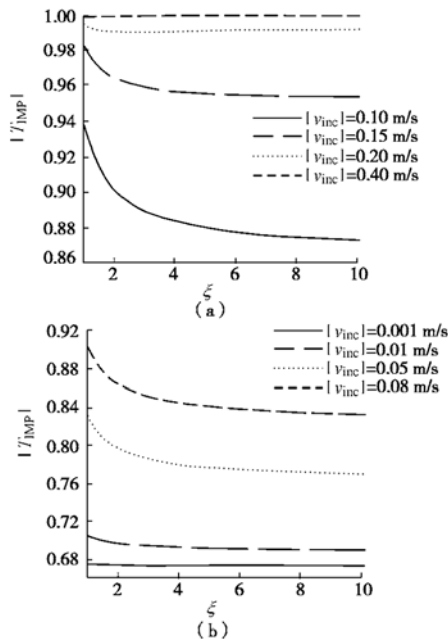


图6 $|T_{IMP}|$ 与 ξ 关系曲线图

Fig. 6 $|T_{IMP}|$ - ξ curves

由图6, 7可见: ① $|T_{IMP}|$, e_{tra} 随 $|v_{inc}|$ 的增加而增大; ② $|T_{IMP}|$, e_{tra} 总体上随 ξ 的增加而降低, 并在 $|v_{inc}|$ 处于中等水平时($|v_{inc}|=0.10$ m/s)该趋势较为显著, 随着 $|v_{inc}|$ 的增大或减小, 该趋势均趋于缓和, 这与图5显示的结果一致; ③ $|v_{inc}|$ 很小($|v_{inc}|=0.001$ m/s)时, $|T_{IMP}|$ 、 e_{tra} 与 ξ 间的关系均为一水平直线, 表示 $|T_{IMP}|$, e_{tra} 与 ξ 无关, 这是由于此时节理 σ_n - d_n 关系接近线性情况, 故 $|T_{IMP}| \rightarrow |T_{lin}|$, e_{tra} 亦趋近于定值; ④ $|v_{inc}|$ 很大($|v_{inc}|=0.4$ m/s)时, 节理接近完全闭合, $K_n \rightarrow \infty$, 应力波不受阻碍, 故 $|T_{IMP}| \rightarrow 1$ 。但此时 $e_{tra} < 1$, 且随 ξ

的增加而略有降低, 这是因为 $|v_{tra}|$ 达到最大值时, 节理必将经历非线性变形、即刚度不断增大的硬化过程, 也就必然会发生反射现象($e_{ref} > 0$), 从而导致能量无法完全透射, e_{tra} 也就相对变小。

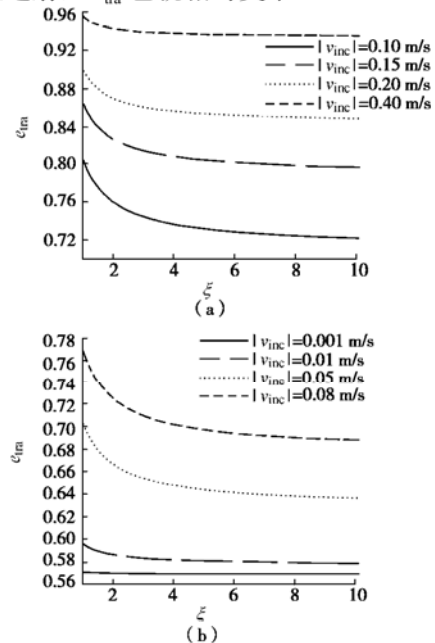


图7 e_{tra} 与 ξ 关系曲线图

Fig. 7 e_{tra} - ξ curves

纵波穿越节理除了振幅下降和能量衰减外还会出现时间延迟现象。由于起跳点难以识别, 入、透射波时间间隔常通过两波波峰时刻差计算, 即峰—峰间隔, 这里称为延迟时间, 记作 T_{del} , 计算结果见图8。

由图8可见, ① T_{del} 随 $|v_{inc}|$ 增大而减小; ② T_{del} 总体上随 ξ 的增加而增加, 并在 $|v_{inc}|$ 处于中等水平时($|v_{inc}|=0.10$ m/s)该趋势较为显著, 随着 $|v_{inc}|$ 的增大或减小, 该趋势均趋于缓和, 这亦与图5显示的结果一致; ③ $|v_{inc}|$ 很小($|v_{inc}|=0.001$ m/s)时, T_{del} 与 ξ 值无关, $|v_{inc}|$ 较大($|v_{inc}|=0.4$ m/s)时, T_{del} 随 ξ 的增加反而减小, 最终趋近于0, 这里不妨称之为“超越”现象。对上述现象的解释是: 随着 $|v_{inc}|$ 的增加, 节理被一定程度的压缩, 其刚度随之增大, 即发生硬化作用, 较大 ξ 值的节理由于变形的非线性程度较大, 在节理闭合发展的初期刚度比小 ξ 值情况增长得慢, 因此 T_{del} 较大。 $|v_{inc}|$ 继续增加使节理被紧密压缩, 在节理闭合发展到一定程度后, 较大 ξ 值的节理刚度比小 ξ 值情况增长得快, 硬化作用更为显著, 其透射波开始“追赶”小 ξ 值的透射波, 最终导致其 T_{del} 更小, 在这个节理“先软后硬”的发展过程中, 是否发生“超越”现象主要看软化和硬化哪一方在竞争中占主要地位。

“超越”现象见图9(a)显示了 $\xi \rightarrow \infty$ 情况透射波超越 $\xi \rightarrow 1$ 情况的过程, 图9(b)从小尺度上体现了 $\xi \rightarrow \infty$ 情况延迟时间的降低, 由于 $|T_{IMP}| \rightarrow 1$, 因此 $|T_{IMP}|$ 的“超越”现象不显著。

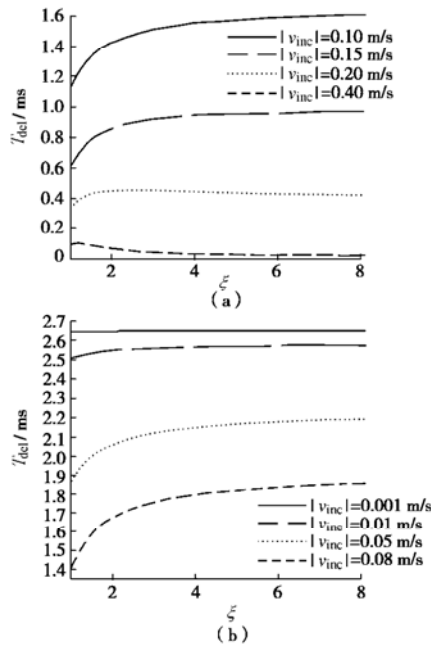
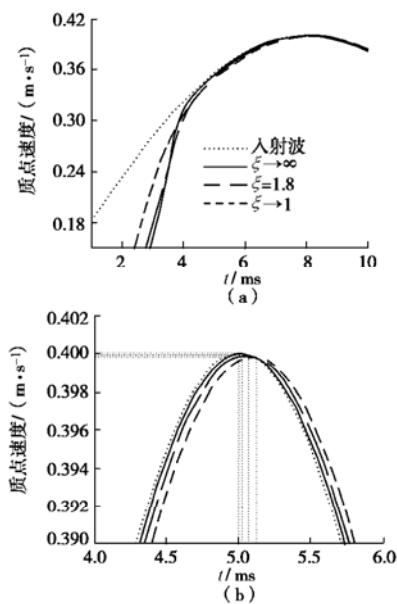
图8 T_{del} 与 ξ 关系曲线图Fig. 8 T_{del} - ξ curves

图9 “超越”现象示意图

Fig. 9 Illustration of the phenomenon of exceeding

5 结 论

节理对岩体中纵波传播规律影响的理论研究经历了从考虑微裂隙到宏观节理、从位移连续到位移不连续、从线性模型到非线性模型的发展过程, 本文沿着其发展脉络, 将模型非线性程度固定的情况发展到可调情况, 通过解析和数值计算得到了一些有益的结论。

(1) 基于 Lemaitre 假设获得了弹性纵波法向穿越具有改进的非线性变形行为单节理处 $|T_{IMP}|$, $|R_{IMP}|$ 的近似解析解。计算结果显示 $|T_{IMP}|$ 随 $K_{n,i}$, γ 的增大而增大, d_{max} , f 的增大而减小, 同时较强的依赖于

修正系数 ξ 。其他参数不变时 ξ 越大, $|T_{IMP}|$ 越小, 这意味着节理变形非线性程度越大, 对入射波的阻碍也越大。 $|R_{IMP}|$ 具有的与其相反的规律。

(2) 结合一维波动方程特征线法推导了节理处前、后波场质点速度数值差分格式并编制了计算程序, 获得了 $v_{tra}(x_1, t)$, $v_{ref}(x_1, t)$ 半数值解, 进而得到 $|T_{IMP}|$, $|R_{IMP}|$, e_{tra} , e_{ref} , T_{del} 解。

(3) 计算结果显示: $|T_{IMP}|$ 不仅像线性变形节理那样, 依赖于 $K_{n,i}$, d_{max} , f , 还较强的依赖于修正系数 ξ 。对 ξ 的依赖性, 反映了节理变形本构关系的非线性程度与 $|v_{inc}|$ 产生的综合影响。 $|v_{inc}|$ 很小时, d_n 远小于 d_{max} , 无论 ξ 值多大均有: $|T_{IMP}| \rightarrow |T_{lin}|$, 即 $|T_{lin}|$ 是 $|T_{IMP}|$ 的特例, 此时波形畸变、频谱、 e_{tra} , T_{del} 也均不受 ξ 影响; $|v_{inc}|$ 较大时, 节理闭合进一步发生, 非线性特性程度的差异开始体现, $|T_{IMP}|$, e_{tra} 随 ξ 的增加而降低, 波形畸变程度、频谱差异、 T_{del} 随 ξ 的增加而增大; $|v_{inc}|$ 很大时, 节理变形发展至后期阶段, 节理闭合趋于完全, $|T_{IMP}| = 1$ (与 ξ 无关), $e_{tra} < 1$ 且随 ξ 的增加略有降低, 频谱中出现高频区域振幅增大现象。此外, 由于 ξ 较大的节理 K_n 会迅速提高, 还可能产生一种“超越”现象。

(4) 以上结论有助于进一步了解节理岩体中纵波的传播规律, 实际情况有待通过试验进一步验证。

参考文献:

- [1] MOHANTY B. Physics of exploration hazard[M]. London: Taylor and Francis Group, 1998.
- [2] SCHOENBERGER M, KEVIN F K. Apparent attenuation due to intrabed multiples[J]. Geophysics, 1974, **39**(3): 278 - 291.
- [3] SPENCER J W, EDWARDS C M, SONNAD J R. Seismic wave attenuation in nonresolvable cyclic stratification[J]. Geophysics, 1977, **42**(5): 939 - 949.
- [4] BANIK N C, LERCHE I, SHUEY R T. Stratigraphic filtering based on derivation of the O'Doherty-Anstey formula[J]. Geophysics, 1985, **50**(12): 2768 - 2774.
- [5] HUDSON J A. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks[J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1981, **64**(1): 133 - 150.
- [6] ANGLE Y C, ACHENBACH J D. Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks[J]. Journal of Applied Mechanics, 1985, **52**(1): 33 - 46.
- [7] ANGLE Y C, ACHENBACH J D. Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of cracks: oblique incidence[J]. Wave Motion, 1985, **9**(3): 375 - 388.
- [8] HIROSE S, KITAHARA M. Scattering of elastic waves by a crack with spring-mass contact[J]. International Journal of Numerical Method in Engineering, 1991, **31**(7): 789 - 801.

- [9] ACHENBACH J D, NORRIS A N. Loss of specular reflection due to nonlinear crack-face interaction[J]. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 1982, **3**(4): 229 - 239.
- [10] SMYSHLYAEV V P, WILLIS J R. Linear and nonlinear scattering of elastic waves by microcracks[J]. *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 1994, **42**(4): 585 - 610.
- [11] CAPUANI D, WILLIS J R. Wave propagation in elastic media with cracks. Part I: transient nonlinear response of a single crack[J]. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 1977, **16**(3): 377 - 408.
- [12] ZHAO J, CAI J G. Transmission of elastic P-waves across single fractures with a nonlinear normal deformational behavior[J]. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2001, **34**(1): 3 - 22.
- [13] ZHAO X B. Theoretical and numerical studies of wave attenuation across parallel fractures[D]. Singapore: Nanyang Technological University, 2004.
- [14] ZHAO X B, ZHAO J, CAI J G, et al. UDEC modelling on wave propagation across fractured rock masses[J]. *Computers and Geotechnics*, 2008, **35**(1): 97 - 104.
- [15] JONES J P, WHITTIER J S. Waves at a flexibly bonded interface[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1967, **40**: 905 - 909.
- [16] SCHOENBERG M. Elastic Wave behavior across linear slip interfaces[J]. *Journal of Acoustic Society of America*, 1980, **68**(5): 1516 - 1521.
- [17] PYRAK-NOLTE L J, MYER L R, COOK N G W. Transmission of seismic waves across single natural fractures[J]. *Journal of Geophysical Research*, 1990, **95**(6): 8617 - 8638.
- [18] KITSUNZAKI C. Behavior of plane elastic waves across a plane crack[J]. *Journal of Mining College of Akita University*, 1983, **6**(3): 173 - 187.
- [19] CAI J G, ZHAO J. Effects of multiple parallel fractures on apparent attenuation of stress waves in rock mass[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2000, **37**: 661 - 682.
- [20] ZHAO J, ZHAO X B, CAI J G. A further study of P-wave attenuation across parallel fractures with linear deformational behaviour[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Science*, 2006, **44**: 776 - 788.
- [21] YU J. Effects of single joint with different nonlinear normal deformational behaviors on P-wave propagation[C]// *Proceedings of the 2nd International Conference on Geotechnical Engineering for Disaster Mitigation and Rehabilitation*. 2008: 458 - 465.
- [22] 王卫华, 李夕兵, 左宇军. 非线性法向变形节理对弹性纵波传播的影响[J]. *岩石力学与工程学报*, 2006, **25**(6): 1218 - 1225. (WANG Wei-hua, LI Xi-bing, ZUO Yu-jun. Effects of single joint with nonlinear normal deformation on P-wave propagation[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2006, **25**(6): 1218 - 1225. (in Chinese))
- [23] 俞 缙, 赵晓豹, 赵维炳, 等. 改进的岩体节理弹性非线性法向变形本构模型研究[J]. *岩土工程学报*, 2008, **30**(9): 1316 - 1321. (YU Jin, ZHAO Xiao-bao, ZHAO Wei-bing, et al. Study on improved elastic nonlinear deformation constitutive model of rock fractures[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2008, **30**(9): 1316 - 1321. (in Chinese))
- [24] SHEHATA W M. Geohydrology of mount vernon canyon area[D]. Golden: Colorado School of Mines, 1971.
- [25] GOODMAN R E. Methods of Geological Engineering in discontinuous rocks[M]. New York: West, 1976: 472 - 490.
- [26] KULHAWAY F H. Stress-deformation properties of rock and rock discontinuities[J]. *Engineering Geology*, 1975, **8**: 327 - 350.
- [27] BANDIS S C, LUMSDEN A C, BARTON N R. Fundamentals of rock fracture deformation[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*, 1983, **20**(6): 249 - 268.
- [28] BARTON N R, BANDIS S C, BAKHTAR K. Strength, deformation and conductivity coupling of rock joints[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*, 1985, **22**(3): 121 - 140.
- [29] MALAMA B, KULATILAKE P H S W. Models for normal fracture deformation under compressive loading[J]. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 2003, **40**(6): 893 - 901.
- [30] CAI J G, ZHAO J, LI H B. Effects of loading rate on fracture normal behaviour[C]// *Proceedings of the 2nd Asian Rock Mechanics Symposium*, Beijing, 2001: 197 - 200.
- [31] YANG W Y, KONG G Y, CAI J G. Dynamic model of normal behavior of rock fractures[J]. *Journal of Coal Science & Engineering (China)*, 2005, **11**(2): 24 - 28.
- [32] WANG W H, LI X B, ZHANG Y P, et al. Closure behavior of rock joint under dynamic loading[J]. *Journal of Central South University of Technology (China)*, 2007, **14**(3): 408 - 412.