



基础梁边界约束作用的虚拟节点法

王国体^{1,2}, 陆 陈³, 王軼昕¹, 王婉娣⁴, 方诗圣¹

(1. 合肥工业大学土木与水利工程学院, 安徽 合肥 230009; 2. 安徽水利水电职业技术学院, 安徽 合肥 230601; 3. 安徽水利水电勘测设计研究院, 安徽 合肥 230022; 4. 安徽建筑工业学院建筑学院, 安徽 合肥 230022)

摘 要: 在传统弹性基础梁内力分析的数值计算方法中, 采用 Winkler 地基模型或双参数地基模型的缺陷是没有反映地基对梁端约束及地基应力扩散的影响。采用虚拟延展梁的方式来代替地基对梁端的约束作用, 给出虚拟梁端参数的控制方程, 建立新的、完整的基础梁的有限差分方程组的方法和求解控制条件。通过编制计算程序, 选用典型算例, 得到考虑地基对梁边界约束影响及应力扩散的基础梁的数值解答。本方法可供实际设计计算基础梁内力时, 考虑地基对梁端约束作用时参考应用。

关键词: 基础梁; 地基与基础共同作用; 应力扩散; 地基模型; 虚拟节点法; 差分方程法

中图分类号: TU470.1

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2009)03-0447-05

作者简介: 王国体(1951-), 男, 安徽太和人, 教授, 主要从事岩土工程方面的教学与研究工作。E-mail: wgthome@mail.hf.ah.cn。

Virtual node method under constraint action of elastic foundation beams

WANG Guo-ti^{1,2}, LU Chen³, WANG Yi-xin¹, WANG Wan-di⁴, FANG Shi-sheng¹

(1. School of Civil and Water Conservancy of Hefei University of Technology, Hefei 230009, China; 2. Anhui Technical College of Water Resources and Hydroelectric Power, Hefei 230601, China; 3. Anhui Survey and Design Institute of Water Conservancy and Hydropower, Hefei 230022, China; 4. Architecture School of Anhui University of Architecture, Hefei 230022, China)

Abstract: For the numerical analysis of elastic foundation beams working together with ground, the traditional methods of Winkler's or double-parameter model have some limitations in engineering. In order to consider the limitation at beam borders and stress diffusion in soil, the process of dummy nodes at beam borders, the control equations and their finite difference schemes are given. The examples by use of computer programs show the effect of beams working together with ground at the borders of the beams and the stress diffuse in soil. The present method can be used to analyze the beam stress in design of foundation engineering.

Key words: foundation beam; foundation-ground interaction; stress dispersion; ground model; virtual node method; finite difference method

0 引 言

在基础梁内力分析中, 应用经典的 Winkler 地基模型建立于 1867 年, 此模型假定每单位面积上所受的压力与地基沉降成正比, 相当于把地基看作为一系列弹簧组成的, 各弹簧之间互不联系。由于它的计算方法简单, 在工程实际中得到广泛的运用, 文献[1~4]进行了深入研究, 指出了 Winkler 模型的理论缺陷。文献[4~6]中详细的研究了采用双参数模型的弹性地基梁的数值计算方法, 包括理论的推导和差分方程组的建立及其程序的设计。然而它的计算方法是建立在梁的两端是自由边界基础上的, 实际上, 梁的两端受到地基的约束作用, 这种情况在黏性土中表现的非常明显; 再者, 基础与地基土的共同作用, 即上部受力基础梁对地基起到应力扩

散作用, 在原有的这两类模型中均无法体现。

为了克服弹性地基模型独立、“浮冰式地基”的缺陷, 使这两种地基模型能够反映基础对地基的上述实际工程的受力状况, 根据数值计算方法的特点, 本文通过延展梁段的方式, 建立梁端部虚拟梁段, 来考虑梁的端部的约束影响和应力扩散的实际, 应用有限差分的方法, 建立了差分方程矩阵元素组成的新形式, 并利用双参数模型, 给出过程算法、实例和计算地基反力分布。

1 基本原理和公式

1.1 双参数地基模型

双参数地基模型是在 Winkler 地基模型基础上, 假设弹簧之间可以传递剪力:

$$p = kw - G \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (1)$$

其中, p 为地基反力 (kPa); w 为地基沉降或基础梁的位移 (或称挠度) (m); k 为基床系数 (kN/m^3); G 为地基的剪切模量 (kN/m^2).

当不考虑地基剪切影响时, 即 $G=0$, 为 Winkler 地基模型。

1.2 梁的挠曲微分方程

梁的挠度曲线方程

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M(x). \quad (2)$$

式中 w 为梁的挠度, 位移变形 (m); E 为材料的弹性模量 (kN/m^2); I 为梁截面惯性矩 (m^4); $M(x)$ 为梁截面上的弯矩 ($\text{kN} \cdot \text{m}$).

1.3 有限差分法

采用中点差分。对于 $w = f(x)$ 在 i 点处的二阶导数, 可以近似地用二阶中心差分来表示, 即

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)_i \approx \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}. \quad (3)$$

利用此公式, 可以将常微分方程转换为差分方程格式。再利用式 (2) 差分得到梁的弯矩分布, 进而三阶差分得到梁的剪力分布, 达到求解基础梁的内力分析。

2 建立差分方程组的过程解析

2.1 梁端虚拟梁段的控制方程

由差分法的要求, 任意将梁长划分成 N 段, 依次对分段编号为 $1, 2, 3, \dots, i, \dots, N$, 对梁端部进行单元长度延伸, 建立虚拟梁段, 两端虚拟梁段编号为 $0, N+1$; 则梁两端段其长度应有基础梁与地基的互相作用来体现。见图 1 所示。

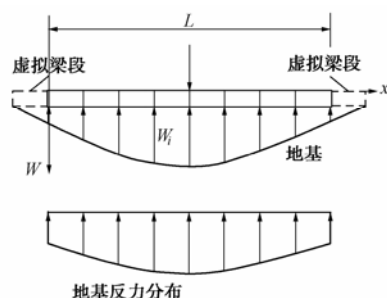


图 1 地基梁虚拟梁端示意图

Fig. 1 Sketch of dummy borders of foundation beam

地基对梁端的约束作用应表现为在梁端部外产生地基沉降 (基础梁位移) 的影响, 该位移必小于梁

端段处的位移, 在附近地基表面以远处必为零。为了合理的表示该位移受基础梁与地基共同作用的影响, 提出用延伸的虚拟梁段的位移表示, 对其位移应小于梁端部段的位移、在两端梁段以远处为零的特点, 采用插值的形式来表示, 必有式 (4) 成立, 称式 (4) 为梁端虚拟梁段的控制方程, 用梁内力分析中的挠度 (位移) 来习惯表示:

$$\left. \begin{aligned} w_0 &= y_1 w_1 (y_1 \in (0, 1)), \\ w_{N+1} &= y_2 w_N (y_2 \in (0, 1)). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 w_0 为梁虚拟左段的平均挠度, w_{N+1} 为梁虚拟右段的平均挠度; 它们反映了地基对梁端的约束作用和地基应力扩散的影响, 即产生了梁端以外的地面位移变形。 y_1, y_2 分别为左、右虚拟梁端控制参数, 它们受梁上荷载分布、基础梁的刚度、地基参数的变化而不同。

2.2 化微分方程为差分方程

对底宽 B 不变的基础梁, 其等分长 h 的 N 个梁段, 假定各梁段中点的挠度包括两端虚拟段 w_i ($i=0, 1, 2, \dots, N+1$) 为 i 梁段的平均挠度, w_0 和 w_{N+1} 是虚拟梁段的平均挠度, 因此, 梁段基底面积 $s_i = hB$ 上的地基反力可近似地认为是均匀的, 其强度为 p_i , 则 i 梁段上的基底总反力为

$$R_i = p_i s_i,$$

其中 $i=1, 2, \dots, N$ 。得到地基反力分布。

由式 (1)、(3) 可得梁段的反力方程:

$$\begin{aligned} R_i &= p_i s_i = p_i hB = hB \left(kw_i - G \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \\ &= khBw_i - \frac{GB}{h} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

由于将梁离散为有限的 N 个梁段, 各梁段中心作用了 N 个离散的集中反力 R_i , 以各梁段中点的挠度 w_i 为未知量, 各梁段 (不包括虚拟的梁段) 中点的挠曲微分方程都可以近似地用差分方程来表示, 同一般的差分法中点差分一样, 按梁的内力分析计算理论, 对挠度的二阶导数等于弯矩, 则分段的差分方程有

$$\frac{EI}{h^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) = -M_i, \quad (6)$$

其中, $i=0, 1, 2, \dots, N, N+1$ 。

而

$$M_i = h \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) R_1 + \left(i - \frac{3}{2} \right) R_2 + \dots + \left(\frac{1}{2} \right) R_i \right] - M_{pi}, \quad (7)$$

M_{pi} 为第 i 截面左边梁上所有外力对该截面的力矩, 以逆时针方向为正。

把式(7)代入式(6)中得

$$\frac{EI}{h^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) + h \left[\left(i - \frac{1}{2}\right) R_1 + \left(i - \frac{3}{2}\right) R_2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right) R_i \right] = M_{pi} \quad (8)$$

把公式(6)代入公式(8)得

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{h^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) + \\ & h \left(i - \frac{1}{2} \right) \left[khBw_1 - \frac{GB}{h}(w_0 - 2w_1 + w_2) \right] + \\ & h \left(i - \frac{3}{2} \right) \left[khBw_2 - \frac{GB}{h}(w_1 - 2w_2 + w_3) \right] + \\ & + \dots + h \left(\frac{1}{2} \right) \left[khBw_i - \frac{GB}{h}(w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}) \right] \\ & = M_{pi} \quad (9) \end{aligned}$$

对式(9)进行整理,得

$$\begin{aligned} & \frac{EI}{h^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) + \\ & \sum_{j=1}^{j=i} \left(i - j + \frac{1}{2} \right) khBw_j - \\ & GB/2 \sum_{j=1}^{j=i} (w_{j-1} - 2w_j + w_{j+1}) = M_{pi}, \quad (10) \end{aligned}$$

其中, $i=0,1,2,\dots,N+1$ 。

这样,就建立了以各段梁的中点挠度 w_i ($i=0,1,2,\dots,N+1$) 为未知量的 $N+2$ 个方程,与公式(4)相结合组成完整的差分方程组,表示成矩阵的形式为

$$[A]\{w\} = \{F\} \quad (11)$$

其中, $[A]$ 为 $(N+2) \times (N+2)$ 阶方阵。

建立的基础梁挠度计算完整的差分方程式(10)、(11),而区别于传统方法所建立的差分方程求解要求补充两个方程(如受力平衡方程)^[5-6]才能求解。并且其矩阵组成元素也不相同。

式(11) $[A]$ 矩阵中分为3部分,各部分矩阵、元素依次如下所示:

$$\left(\frac{EI}{h^2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -y_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & & & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & \dots & 0 & -y_2 & 1 \end{bmatrix},$$

$(N+2) \times (N+2)$ 阶和

$$kh^2 B \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \dots & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \frac{7}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & & & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$(N+2) \times (N+2)$ 阶以及

$$-\left(\frac{GB}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 5 & -7 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$(N+2) \times (N+2)$ 阶组成。

$\{w_i\}$ ($i=0,1,2,\dots,N+1$) 和参数 y 为未知量, $\{F\} = \{0, M_{p1}, M_{p2}, \dots, M_{pN}, 0\}$ 为基础梁上外力分布矩阵,可有梁具体受力计算得到。

其他参数同前所述。

y_1, y_2 反映了地基与基础的共同作用,也反映外荷的影响,当基础梁受外力分布为对称时, $y_1=y_2$ 。合适的 y_1, y_2 确定以后,就可以求解式(11),得到梁段的挠度,进而应用梁的基本理论得到转角、弯矩和剪力。

2.3 计算控制方程

由式(10)、(11)组成的矩阵方程,在 y_1, y_2 确定后是完全可解的。由于 y_1, y_2 是反映了地基对梁端的约束作用和地基应力扩散的影响,如何确定其值才是符合基础梁与地基共同作用的应力扩散和约束作用的规律,但必须遵循受力平衡的原理即地基反力与外荷的平衡。具体做法是以全梁所受力平衡条件为控制,可以是以荷载平衡与弯矩平衡为联合控制条件来求解式(10)、(11)。也就是可以假定 y_1, y_2 为任意值求解式(10)、(11)差分方程的解,但所得到的地基反力必须满足基础梁的荷载平衡与弯矩平衡为条件。

以梁受荷载 F 为例,荷载平衡与弯矩平衡的联合控制条件为下述控制方程式(12):

$$\text{sum} = \left| \sum_{i=1}^{i=N} R_i \cdot (i-0.5) \cdot h - F \cdot L \cdot 0.5 \right| \cdot l_1 + \left| \sum_{i=1}^{i=N} R_i - F \right| \cdot l_2, \quad (12)$$

其中 F 为外荷载大小, L 为梁长, l_1, l_2 为权重系数 ($l_1 + l_2 = 1$, 上式仅适用梁中部受集中荷载作用的情况, 其他荷载情况同理)。

这样, 基础梁及两端虚拟梁段在位移 $y(y_1, y_2) \in (0, 1)$ 之间的实际描述后, 以双参数地基模型或 Winkler 模型, 考虑地基对基础梁端部的约束作用和地基应力扩散影响计算基础梁的位移、内力的差分算法的全过程就转化为求解有式 (10)、(11) 构成的差分方程, 并必须满足式 (12) 为必要条件的数值计算的过程。采取不同的数值计算方法求解式 (10)、(11), 就是变成了搜索 sum 为控制最小值, 得出 $\{w_i\} (i = 0, 1, 2, \dots, N + 1)$ 的最优数值解。

表 1 基础梁计算参数

Table 1 Computed parameters of foundation beams

算例编号	梁长 /m	EI /($\text{kN} \cdot \text{m}^2$)	G /($\text{kN} \cdot \text{m}^2$)	B/m	K /($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)	集中荷载	荷载误差	弯矩误差	sum	控制参数 y
1	10	500000	4000	1	2000	4000	0.903	0.014	0.913	0.99041
2	10	500000	1000	1	2000	2000	0.908	0.023	0.931	0.99049
3	10	800000	1000	1	2000	4000	0.946	0.020	0.948	0.99429
4	10	500000	11000000	1	4000	4000	0.905	0.003	0.908	0.97863
5	10	500000		1	2000	4000	0.907	0.023	0.930	0.99049

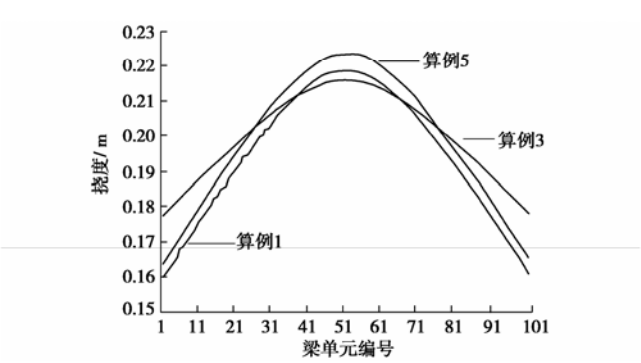


图 2 算例 1, 3, 5 的梁挠曲线图

Fig. 2 The deflection curves of beams for examples No. 1, 3, 5

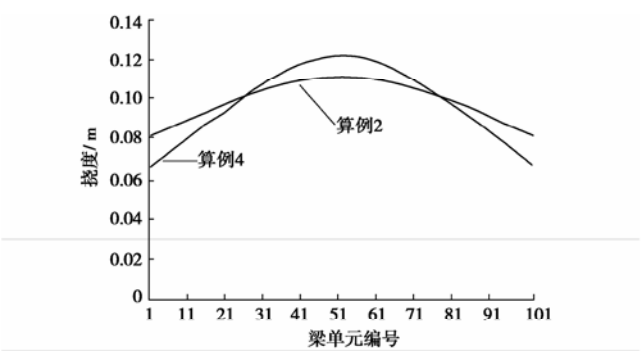


图 3 算例 2, 4 的梁挠曲线图

Fig. 3 The deflection curves of beams for examples No. 2, 4

3 计算算例

设一基础梁, 采用 5 种形式的各算例, 具体参数见表 1, 其中梁长的单位为 m , EI 的单位为 $(\text{kN} \cdot \text{m}^2)$, G 的单位为 kN/m^2 , B 的单位 m , K 的单位为 kN/m^3 , 荷载的单位为 kN 。应用公式 (4) ~ (12), 通过编制计算程序, 采用遗传算法求解矩阵方程, sum 为控制最小值为 0.1。为了简化程序设计, 以集中荷载为例 ($y_1=y_2=y$), 说明本文方法。

算例 1, 2, 3, 4, 5 部分梁段的挠度和地基反力见表 2, 算例 1, 3, 5 的挠度曲线图见图 2, 地基反力曲线图见图 3。算例 2, 4 的挠度曲线图见图 3, 地基反力曲线图见图 5。它们反映了不同地基参数对地基反力的影响, 体现了基础梁与地基的共同作用的基本特征。

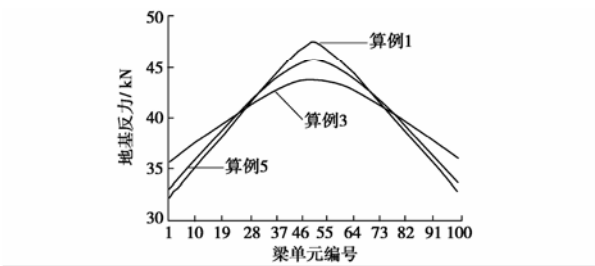


图 4 算例 1, 3, 5 的地基反力曲线图

Fig. 4 Compressive stress curves of foundation beams for examples No. 1, 3, 5

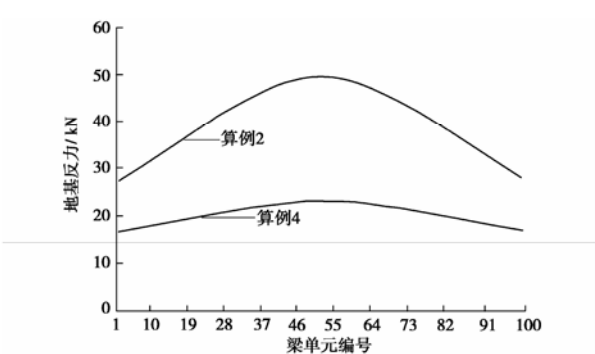


图 5 算例 2, 4 的地基反力曲线图

Fig. 5 Compressive stress curves of foundation beams for examples No. 2, 4

4 结 论

(1) 本文引入了虚拟梁的概念,以虚拟梁段代替地基对梁端部的约束作用,克服了使用 Winkler 模型或双参数模型计算地基梁时不考虑地基对梁端部的约束作用和地基应力扩散影响的缺陷。给出了差分方程标准形式的矩阵方程及其控制元素。其差分方程的计算结果精度可以通过程序设计较好地控制,能满足基础梁工程设计的需要。

(2) 在本算法中,控制参数 y (y_1, y_2), 是方法反映地基对基础梁端部约束作用和应力扩散的影响。梁段细分影响计算精度,合适的分段单元划分,就可以达到较好的精确度的要求,也是地基对基础梁端部约束作用和应力扩散影响的真实体现。

(3) 由算例 2 至算例 5 的计算结果比较,可知在参数 EI, K, G, B 相同的情况下,荷载大小对梁端控制参数 y 的影响;地基参数 G, EI, K 和梁端控制参数 y_1, y_2 的具体关系反映了基础梁与地基的共同作用在梁端影响的综合特征。

(4) 算例表明不同的土类下的应力扩散情况,随着参数 K, G 的变大,应力逐渐向梁中部集中,它符合地基土层应力扩散的实际变化规律。

(5) 本文方法的算例计算结果表明了基础梁对地基不同参数的不同响应,如果参数选择符合实际,那么地基对基础梁端部约束作用和应力扩散的影响响应也更符合实际情况。

(6) y_1, y_2 的具体关系不仅反映了基础梁与地基的共同作用在梁端综合特征,也反映了基础梁荷载分布的影响。基础梁在对称荷载作用时,梁端控制参数 $y_1 = y_2$, 非对称荷载作用时, $y_1 \neq y_2$ 。虚拟梁段、控制参数式(4)、矩阵方程(10)、(11)求解控制方程(12)综合反映了荷载组成、基础梁与地基共同作用的在端处应力扩散的影响。

(7) 本文给出了基础梁数值计算的差分过程的矩阵方程,同样,该方法也可以应用到其他的数值方法计算中去。

参考文献:

[1] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2000: 100 - 104. (SHEN Zhu-jiang. Theory of soil

mechanics[M]. Beijing: China Water Power Press, 2000: 100 - 104. (in Chinese))

- [2] 丁大钧. 弹性地基梁计算理论与方法[M]. 南京: 东南大学出版社, 1986: 6 - 8. (DING Da-jun, The theory and method of elastic foundation beam calculation[M]. Nanjing: Southeast University Press, 1986: 6 - 8. (in Chinese))
- [3] 邱 畅, 王贻荪. 基于双参数地基模型的十字交叉梁柱荷载分配系数工程实用算法[J]. 勘察科学技术, 2000, 18(5): 22 - 27. (QIU Chang, WANG Yi-sun. The engineering practical calculation method of criss-cross beam and column distribution coefficient based on double-parameter foundation model[J]. Site Investigation Science and Technology, 2000, 18(5): 22 - 27. (in Chinese))
- [4] 王国体. 地基反力的数值模拟和基础结构的内力响应[J]. 土木工程学报, 2002, 35(2): 103 - 107. (WANG Guo-ti. A model of soil for the distribution of subgrade reaction and response in structure analysis[J]. China Civil Engineering Journal, 2002, 35(2): 103 - 107. (in Chinese))
- [5] 王国体, 赖焕枫, 胡志专, 等. 双参数弹性地基梁有限差分法及变形、反力特征[J]. 合肥工业大学学报, 2004, 27(1): 33 - 39. (WANG Guo-ti, LAI Huan-feng, HU Zhi-zhuan, et al. Finite difference parameter method for analysis of double elastic foundation beam's features in deformation and contact pressure[J]. Journal of Hefei University of Technology, 2004, 27(1): 33 - 39. (in Chinese))
- [6] 王国体. 地基基础计算与程序设计[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1991: 189 - 198. (WANG Guo-ti. Computation and program design for soil and foundation[M]. Hefei: University of Science and Technology of China Press, 1991: 189 - 198. (in Chinese))
- [7] 廖红建, 王铁行, 等. 岩土工程数值分析[M]. 北京: 机械工业出版社, 2006: 70 - 89. (LIAO Hong-jian, WANG Tie-xing, et al. Numerical analysis of geotechnical engineering[M]. Beijing: China Machine Press, 2006: 70 - 89. (in Chinese))
- [8] 黄 义, 何芳社. 弹性地基上的梁、板、壳[M]. 北京: 科学教育出版社, 2005: 26 - 36. (HUANG Yi. HE Fang-she. Beam plank shell on elastic foundation[M]. Beijing: Science Education Publishing Company, 2005: 26 - 36. (in Chinese))