

楔形体稳定的塑性极限分析下限法

陈 炜¹, 王均星¹, 辛丽萍¹, 张 微²

(1. 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 湖北 武汉 430072; 2. 长江勘测规划设计研究院, 湖北 武汉 430010)

摘 要: 楔形体稳定分析一般采用刚体极限平衡法, 然而该方法仅使楔形体的部分平衡条件得到满足, 而且还对滑动面反力做了一些假定, 由此导致了计算结果不一定是真实的。结合极限分析与块体元法, 提出了楔形体稳定分析的下限解法, 没有对楔形体的破坏模式、滑动面反力及滑动面数量做任何的假定。采用块体元法的离散思想, 将楔形体离散为块体-结构面组成的系统; 根据下限定理, 构造了满足完全平衡条件、边界条件和屈服条件的静力许可场; 建立了下限法数学规划模型, 并通过非线性规划获得楔体稳定严格的下限解。3个典型算例验证了本文方法的正确性及可行性。
关键词: 楔形体稳定; 下限法; 块体元法; 刚体极限平衡法; 安全系数

中图分类号: TU45

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2009)03-0431-06

作者简介: 陈 炜(1981-), 男, 博士研究生, 主要从事岩土及水工数值计算研究。E-mail: ytchenw@yahoo.com.cn。

Lower bound method of plastic limit analysis for wedge stability

CHEN Wei¹, WANG Jun-xing¹, XIN Li-ping¹, ZHANG Wei²

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China; 2.

Changjiang Institute of Survey, Planning, Design and Research, Wuhan 430010, China)

Abstract: The rigid limit equilibrium method has been widely used to analyze the wedge stability. However, it does not satisfy equilibrium equations, and it still requires assumptions regarding the force reactions, which may result in false results. A new method based on the lower bound method to analyze the stability of wedge slopes is proposed. It does not require assumptions regarding the wedge failure mode, the force reactions or the number of slide planes. The block-structural plane model is used for constructing the statically admissible stress fields which satisfy the equilibrium conditions, boundary conditions and yield criteria. By using the idea of nonlinear programming, the lower bound limit analysis model of mathematical programming for wedge stability is established. Finally, three examples are used, and the results agree well with those from the finite element and the upper bound methods.

Key words: wedge stability; lower bound method; block element method; rigid limit equilibrium method; factor of safety

0 引 言

楔形体破坏是节理岩体常见的一种破坏模式, 在岩石边坡、基础、洞室往往存在由相互切割的结构面而形成不稳定楔形体, 并在一定荷载的作用下发生楔形体的失稳破坏, 一般采用刚体极限平衡法进行楔形体稳定分析^[1-3]。然而, 楔形体稳定问题实际上是一个高次非静定问题, 通常采用各种假定使之得解, 因而求出的安全系数并不一定是真实的。

为寻求一种理论上更为严谨的方法, 1999年 Chen Z Y 等人^[4]首先运用塑性极限分析方法, 提出楔形体稳定分析的上限解法(Upper bound method, UB); 2002年 Wang Y J 和 Yin J H^[5]提出了考虑结构面剪胀效应的楔形体稳定分析方法(Dilatancy of discontinuities method, DD); 2004年 Wang Y J 等人^[6]根据潘家铮“极大极小原理”提出了广义极限平衡法(General limit

equilibrium, GLE), 与此同时 Chen Z Y^[7]在此前研究的基础上进一步提出了楔体稳定的塑性力学广义解法(Generalized solution for wedge stability, GSW)。

另外, 数值分析方法如有限元、DDA、离散元方法、块体元方法等, 可以模拟楔形体在各种因素作用下变形发展及渐进破坏的全过程, 也是研究楔形体稳定的重要方法。

一直以来, 极限分析上、下限定理是解决岩土体的承载能力和稳定问题强有力的工具^[8-9]。本文试图运用塑性极限分析下限方法, 结合块体元法^[10-11], 提出一种理论严谨、求解高效的楔形体稳定分析方法。

基金项目: 教育部科学技术研究重点项目(106107)

收稿日期: 2008-02-21

1 楔形体稳定的力学问题及传统解答

1.1 楔形体稳定的力学问题

对于一个由 n 个滑动面组成楔形体 (如图 1): 任意一个滑动面上的反力矢量, 可以分解为一个垂直于滑动面的反力 R_{jN} 平行于滑动面的剪切力 R_{jS} 和 R_{jT} (或剪切力合力 R_{jj} 及方向 β_j) 共 3 个未知量; 滑动面上反力矢量的作用点, 可以用滑动面的局部坐标 (x^j, y^j) 表示, 共两个未知量; 这样 n 个滑动面共 $5n$ 个未知量, 加上安全系数, 楔形体稳定问题的未知量数目共 $5n+1$ 个。

而能够获得的方程数包括 3 个力矢平衡条件、3 个力矩平衡条件、 n 个结构面的屈服条件, 共 $6+n$ 个。也就是说当滑动面数在 2 以上时, 就存在 $4n-5$ 个多余的未知量, 而成为超静定问题。

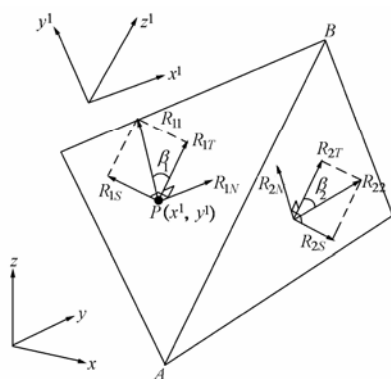


图 1 滑动面反力示意图

Fig. 1 Reaction forces on sliding face

1.2 刚体极限平衡法

为了解决上述问题, 刚体极限平衡法必须对某些方面进行假定, 如: ①楔形体失稳模式; ②结构面上反力的大小及方向。

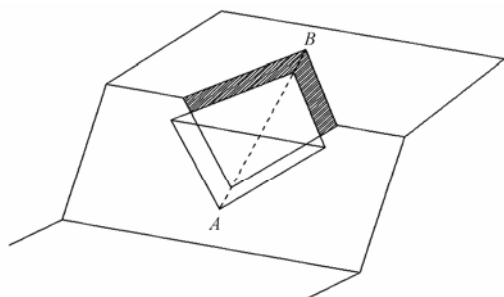


图 2 双滑动面的楔形体边坡

Fig. 2 Wedge slope with two slide faces

对于常见的双滑动面楔形体 (图 2), 根据上文分析是一个有 3 个多余未知量的超静定问题。传统方法 (Hoek 和 Bray, 1977) 为此作了两个极为重要的假定: ①假定楔形体沿着两个结构面的交线滑动 (即不

计力矩平衡条件, 这样可以不考虑反力作用点的位置); ②结构面的剪切力方向同交线平行 (法向分解假定, 即令 β_1, β_2 为零)。通过上述两个假定减少了 6 个未知量, 但也少了 3 个力矩平衡方程, 共减少了 3 个多余未知量, 于是问题得以解答。

楔形体稳定分析是一个超静定问题, 若单纯通过静力平衡方程求解, 所包含的未知量的数目将超过可以建立的平衡方程的数目^[9]。塑性极限分析方法的引入^[4]为求解楔形体稳定性问题提供了新的途径, 本文的主要工作是根据塑性极限分析下限定理, 提出楔形体稳定分析的下限解法。

2 楔形体稳定的极限分析下限法

在物体及其边界上: ①结构物内满足平衡条件; ②结构物内不违反屈服条件; ③在力边界上, 荷载与真实荷载相同, 满足上述 3 个条件称为静力许可条件, 相应的应力 (内力) 场称为静力许可应力 (内力) 场。塑性极限分析下限定理可描述为: 在所有与静力许可应力场对应的荷载中, 最大的荷载为极限荷载, 与最大荷载相应的静力容许应力场为结构的极限状态应力场。换一种说法就是, 所有满足静力许可条件的极限荷载 (或安全系数), 不会大于真实解, 为真实解的下限, 其中最大解就最接近于真实解。

2.1 静力许可应力场

(1) 平衡条件

建立结构面上的局部坐标系, 结构面 j 上取 x^j 轴平行于走向, y^j 轴平行于倾向, z^j 轴为结构面内法线方向。整体坐标系取 x 轴水平向东, y 轴水平向北, z 轴铅直向上。

整体坐标矢量 R 转化为结构面上局部坐标的矢量 R_j 的公式为

$$R_j = L_j R, \quad (1)$$

式中

$$L_j = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix}。$$

λ_{ik} 表示局部坐标下的 i 轴相应于 k 轴的方向余弦, $i=1, 2, 3$ 分别对应于局部坐标系的 x^j, y^j, z^j 轴, $k=1, 2, 3$ 分别对应于整体坐标系的 x, y, z 轴。

为建立静立许可应力场, 本文采用块体-结构面离散思想, 假定楔形体为刚体, 以结构面上的应力为未知量, 结构面 j 上任意一点的应力可以表示为

$$[\sigma_j] = [\tau_{x^j} \quad \tau_{y^j} \quad \sigma_{z^j}]^T, \quad (2)$$

式中, $\tau_{x^j}, \tau_{y^j}, \sigma_{z^j}$ 分别表示为 x^j, y^j 方向的剪应

力和 z^j 向的正应力, 正应力为压正拉负 (图 3)。

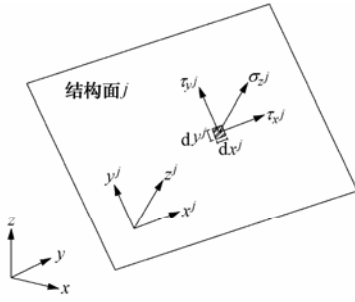


图 3 结构面坐标系

Fig. 3 Coordinates of structural plane

为建立楔形体的平衡方程, 把外力荷载向楔形体的形心上简化, 得到形心等效荷载列阵为

$$[F] = [F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z]^T, \quad (3)$$

式中, F_x , F_y , F_z 分别为 x , y , z 方向上的力, M_x , M_y , M_z 分别为绕 x , y , z 方向的力矩 (逆时针为正)。将楔形体的各结构面上的应力积分并投影到整体坐标系后, 可以得到楔形体的 3 个力矢平衡条件, 表示为矩阵如下:

$$-\sum_j \iint_{\Gamma} [L_j]^T [\sigma_j] dx_j dy_j = [F_x \ F_y \ F_z]^T. \quad (4)$$

如果要考虑楔形体的转动效应, 还应满足力矩平衡条件。将楔形体的各结构面上的应力积分并向形心简化, 可以得到楔形体的 3 个力矩平衡条件, 表示为矩阵如下:

$$-\sum_j \iint_{\Gamma} [D'] [L_j]^T [\sigma_j] dx_j dy_j = [M_x \ M_y \ M_z]^T, \quad (5)$$

式 (5) 中:

$$[D'] = \begin{bmatrix} 0 & -z+z_o & y-y_o \\ z-z_o & 0 & -x+x_o \\ -y+y_o & x-x_o & 0 \end{bmatrix}.$$

求和符号下的 $j=1, 2, \dots, m$, m 表示楔形体的结构面数; Γ 表示在结构面 j 上的积分范围; x_o , y_o , z_o 为楔形体形心的整体坐标。

将式 (4)、(5) 合并得

$$-\sum_j \iint_{\Gamma} [D] [L_j]^T [\sigma_j] dx_j dy_j = [F], \quad (6)$$

式中,

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -z+z_o & y-y_o & \\ z-z_o & & & 0 & -x+x_o & \\ -y+y_o & x-x_o & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

为了对式 (6) 在结构面上积分, 必须采用数值积分的方法。参考文献[10]的做法, 将结构面 j 划分为若干个的四节点等参单元, 于是式 (6) 可表示为

$$-\sum_j \sum_k \iint_{\Gamma_e} [D] [L_j]^T [N] [G_j^k] [\sigma_j^e] dx_j dy_j = [F]. \quad (7)$$

式中 k 为 j 面单元数; Γ_e 表示在单元上积分; $[N]$ 为单元形函数矩阵; $[G_j^k]$ 为 j 面单元 k 的平衡方程集合矩阵, 为 $12 \times 3l_j$ 矩阵, 根据单元节点的排序及各节点编号对应的 12 个元素为 1 其余元素为零; $[\sigma_j^e] = [\tau_{x^j1} \ \tau_{y^j1} \ \sigma_{z^j1} \ \tau_{x^j2} \ \tau_{y^j2} \ \sigma_{z^j2} \ \dots \ \tau_{x^jl_j} \ \tau_{y^jl_j} \ \sigma_{z^jl_j}]^T$; 为 $3l_j \times 1$ 列阵, l_j 为结构面 j 上的节点数。

式 (7) 表示为矩阵形式如下:

$$[A][\sigma] = [F]. \quad (8)$$

式中 $[A] = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_j]$; $A_j = -\sum_k \iint_{\Gamma_e} [D] [L_j]^T$

$[N] [G_j^k] dx_j dy_j$; $[\sigma] = \{[\sigma_1^e]^T \ [\sigma_2^e]^T \ \dots \ [\sigma_j^e]^T\}^T$ 。

从推导过程可以发现, 平衡方程 (8) 实际上已经包含了力的边界条件。

(2) 屈服条件

对于结构面一般采用 Mohr-Coulomb 屈服准则, 结构面 j 应满足的屈服条件可表示为

$$\tau_{x^jl_j}^2 + \tau_{y^jl_j}^2 - (\sigma_{z^jl_j} \tan \varphi_j / k + c_j / k)^2 \leq 0. \quad (9)$$

还应满足不受拉条件:

$$-\sigma_{z^jl_j} \leq 0. \quad (10)$$

式中 $j=1, 2, \dots, m$, m 表示楔形体的结构面数; l_j 表示结构面 j 上的节点数; c_j , φ_j , k 分别为结构面 j 材料的黏聚力、内摩擦角和强度折减系数。

每个结构面都有和式 (9)、(10) 相同形式的独立的屈服条件, 将所有结构面的屈服条件集合, 并表示为如下形式:

$$f([\sigma]) \leq 0. \quad (11)$$

(3) 外力等效荷载

在建立平衡方程时, 外力荷载必须转化为形心上的等效荷载。外力荷载一般有点荷载、面荷载、体力荷载 3 种。

对于质量为 m_0 的楔形体, 重力和惯性力等体力荷载在形心上的等效荷载为

$$[F_v] = [-k_x m_0 \ -k_y m_0 \ -(k_z + g) m_0 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \quad (12)$$

式中, k_x , k_y , k_z 分别表示 x , y , z 方向的惯性加速度, g 为重力加速度。

对作用于点 $p(x, y, z)$ 的点荷载 ($F_x \ F_y \ F_z$), 其在形心上的等效荷载为

$$[F_p] = [D][F_x \ F_y \ F_z]^T, \quad (13)$$

式中, $[D]$ 见式 (6), F_x , F_y , F_z 分别为点荷载在整体坐标系 3 个方向上的投影。

面荷载的计算较为复杂, 可以先转化为点荷载,

然后根据式(13)再转化为作用在形心上的等效荷载。

2.2 下限法数学规划模型

下限法的求解实际上可以归结为一个数学规划问题,即在所构造的所有满足静力容许的应力场(约束条件)中,寻找一个静力场使其对应的极限荷载或稳定安全系数最大(目标函数)。根据下限原理,该极限荷载或稳定安全系数最接近并且不大于真实解。

楔形体稳定极限分析下限法数学规划模型由3部分组成:①线性约束条件:包括平衡条件和边界条件;②非线性约束条件,即屈服条件;③目标函数,即稳定安全系数。

本文采用强度储备系数定义安全系数,目标函数为

Max: k 。(14)

由式(8)(11)(14)可以得到以强度储备系数 k 为目标函数的下限法非线性规划数学模型:

Max: k ,
Subject to: $[A][\sigma] = \{F\}$,
 $f([\sigma]) \leq 0$ 。(15)

上述形成的下限法的数学规划模型(15)是一个非线性规划的问题。目前专业优化软件以及包括优化功能的数学软件众多,本文选用了著名的Lingo系统公司的专业优化软件Lingo8.0来实现非线性规划的求解。它内置多种算法,可以根据非线性规划问题的特点、规模,运用相应的算法求解。经试算验证Lingo8.0是一个功能强大、高效率、且比较稳定的非线性规划求解器。通过非线性规划求解最终可以获得楔形体稳定安全系数值及相应的静力许可应力场。

3 算例分析

为验证本文方法的有效性,选取了两个经典算例及一个工程实例,采用自编的程序进行计算。

3.1 对称楔形体边坡

本算例为一个对称楔形体边坡,其几何特性及强度参数见表1。文献[6]曾运用上限法(UB)、广义极限平衡法(GLE)及有限元法(FEM)对该算例进行过分析。本文方法及各种方法的计算结果见表2;表3列出了各种方法计算的结构面反力;表4为本文下限法及传统方法(Hoek和Bray,1977)对应于不同的摩擦角 φ 及黏聚力 c 的计算结果。

从计算结果可以发现:①本文下限法与文献[6]的上限法(UB)获得完全一致的结果,由极限分析理论可知,该结果为极限分析的完全解;②本文方法结果与广义极限平衡法(GLE)、有限元法结果也非常吻合,表明了本文方法结果的合理性;③相比其他方法,传

统方法获得了一个较小的结果,实际上从表3可以看出,滑动面剪力方向并不是平行于交棱线的,并且如果将本文方法获得的剪力夹角 $\beta_1(\beta_2)=30.75^\circ$ 作为已知量(而不是法向分解假定的 $\beta_j=0$)代入刚体极限平衡法的平衡方程,竟获得的同本文方法相同的安全系数即1.430,这个结果具有重要意义,说明了传统方法的法向分解假定实际上导致了一个偏于安全的结果。

表1 对称楔形体的几何特性及强度参数

Table 1 Geometrical characteristics and strength parameters for a symmetrical wedge

平面	倾向 /(°)	倾角 /(°)	黏聚力 c /kPa	摩擦角 φ /(°)
左结构面	120	65	10	30
右结构面	240	65	10	30
边坡坡面	180	90	$H=10.2\text{ m}$	
边坡顶面	180	0	$\gamma=26.46\text{ kN/m}^3$	

表2 各种方法的安全系数计算结果

Table 2 Results of safety factor with different methods

本文下 限法	UB	GLE	传统 方法	有限 元法	DD	
					剪胀角 $\varphi'=0$	剪胀角 $\varphi'=\varphi$
1.430	1.430	1.430	1.228	1.430	1.228	1.430

表3 各种方法得到的结构面反力结果

Table 3 Reaction forces obtained by different methods

计算方法	结构面 法向反力 /kN	沿交线 方向剪力 /kN	垂直交线 方向剪力 /kN	$\beta_1(\beta_2)$ /(°)
本文下限法	3883	1719	1023	30.75
GLE	3683	1655	983	30.71
传统方法	2587	1719	0	0.00
有限元法	3584	1638	942	29.90

表4 不同 c 、 φ 值本文下限法及传统方法的计算结果比较

Table 4 Values of safety factor determined by lower bound and transitional methods with different strength parameters

c /kPa	计算方法	$\varphi=0^\circ$	$\varphi=15^\circ$	$\varphi=30^\circ$	$\varphi=45^\circ$
0	本文下限法	—	0.527	1.132	1.967
	传统方法	—	0.403	0.869	1.505
	相对误差/%	—	30.800	30.300	30.700
10	本文下限法	0.360	0.835	1.430	2.254
	传统方法	0.360	0.763	1.228	1.865
	相对误差/%	0.000	9.400	16.400	20.900
20	本文下限法	0.719	1.173	1.748	2.224
	传统方法	0.719	1.122	1.588	2.560
	相对误差/%	0.000	4.500	10.100	15.100
30	本文下限法	1.079	1.521	2.081	2.878
	传统方法	1.079	1.482	1.948	2.584
	相对误差/%	0	2.600	6.800	11.400

从表 4 中可以发现: ①在 $\varphi=0^\circ$ 的情况下本文下限法所得到的结果同传统方法完全吻合, 仅在此种情况下法向分解假定成立; ②随着 φ 值的增加, 两种方法的得到的安全系数差别增大, 并且随着 c 的减小差别进一步增大, 当 $c=0$ 时两者的差别最为显著。这些规律同文献[9]中上限法(UB)是一致的。

3.2 非对称楔形体边坡

本算例采用的是一个非对称的楔形体边坡算例, 该算例首先为 Hoek 和 Bray^[1]所采用, 其几何特性及强度参数见表 5。本文方法及文献[6]各种方法的计算结果列于表 6。表 7 为各种方法计算的结构面反力大小。

表 5 非对称楔形体的几何特性及强度参数

Table 5 Geometrical characteristics and strength parameters for a non-symmetrical wedge

平面	倾向 /(°)	倾角 /(°)	黏聚力 /kPa	摩擦角 /(°)
左结构面	105	45	23.9	20
右结构面	235	70	47.9	30
边坡坡面	185	65	$H=39.65\text{ m}$	
边坡顶面	195	12	$\gamma=25.2\text{ kN/m}^3$	

表 6 各种方法的安全系数计算结果

Table 6 Results of safety factor with different methods

本文 下限法	UB	GLE	传统 方法	有限 元法	DD	
					剪胀角 $\varphi'=0$	剪胀角 $\varphi'=\varphi$
1.928	1.929	1.929	1.846	1.930	1.846	1.929

表 7 各种方法得到的结构面反力结果

Table 7 Reaction forces obtained by different methods

计算方法	结构面 法向反力 /10 ³ kN		沿交线 方向剪力 /10 ³ kN		垂直交线 方向剪力 /10 ³ kN	
	$ R_{1N} $	$ R_{2N} $	$ T_{S1} $	$ T_{S2} $	$ R_{1S} $	$ R_{2S} $
本文下限法	146	96	36	49	13	13
GLE	146	96	41	48	14	13
传统方法	131	80	37	46	0	0
有限元法	140	92	37	48	10	7

从表 6 中可以看出, 本文方法计算结果除略高于传统方法外, 同其他方法得到的结果都非常吻合。表 7 的反力结果再次表明滑动面剪力方向并不平行于交棱线。

3.3 已发生的楔体失稳实例

该算例为发生在土耳其安卡拉城 (Ankara Castle) 的一个已经破坏的楔形体边坡^[12] (图 4)。该楔形体左右滑动面的倾向和倾角为 $194^\circ/44^\circ$ 和 $103^\circ/71^\circ$, 坡面倾向和倾角为 $162^\circ/69^\circ$ 。两个滑动面的摩擦角

皆为 $\varphi=30^\circ$, 黏聚力为零, 外力仅为自重。
采用传统方法计算的安全系数为 0.732, 本文方法为 0.865, 两种方法计算结果都符合该边坡已经破坏的实际情况。在计算过程中发现, 本文方法计算出的安全系数并不随着楔体重度变化而改变, 这一规律是同传统方法是一致的, 即滑动面黏聚力为零时安全系数同楔体的重度无关。

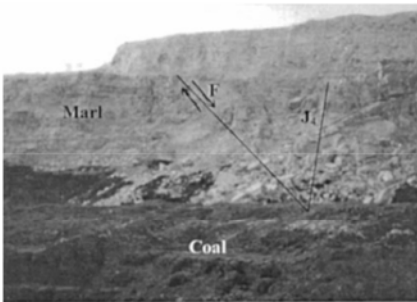


图 4 位于土耳其安卡拉城附近的楔形体边坡实例
Fig. 4 A wedge slope near Ankara Castle of Turkey

4 结 论

- (1) 算例表明: 本文方法的计算结果同有限元方法、上限法 (UB) 及其他方法都十分吻合, 表明了本文方法的正确性。
- (2) 从文中公式推导过程可以发现, 本文方法没有对楔形体的破坏模式、滑动面反力及滑动面数量做任何的假定, 克服了传统方法由于上述假定造成的误差。
- (3) 通过文中的分析表明, 传统方法的法向分解假定实际上是一种偏于安全的做法。但值得注意的是, 通常刚体极限平衡法仅满足了部分的平衡条件, 根据塑性极限分析理论, 获得的结果既非上限解也非下限解。也就是说在一定情况下, 由于没有考虑力矩平衡条件, 传统方法也可能获得一种偏于危险的解答, 特别是拱坝、重力坝的坝基稳定问题等当自重不再作为主要荷载时, 由此可能产生较大的误差。
- (4) 本文方法计算结果在 $\varphi=0^\circ$ 的情况同传统方法是完全吻合的, 但是随着 φ 值的增加, 两种方法的得到的安全系数差别逐渐增大, 并且在 $c=0$ 时两者的差别最为显著。陈祖煜、王玉杰等人认为这一现象是由于莫尔-库仑材料的剪胀性引起的, 那么下限法中如何考虑材料剪胀性的影响是今后需要研究的内容之一。

参考文献:

[1] HOEK E T, BRAY J W. Rock slope engineering[M]. Institution of Mining and Metallurgy, London, 1977.

- [2] WITTKE W. Methods to analyze the stability of rock slopes with and without additional loading[C]// Rock Mech, Eng Geology, Supp II, 1965: 52 - 79.
- [3] WITTKE W. Rock mechanics[M]. Berlin: Springer, 1990.
- [4] CHEN Z Y, WANG Y J, WANG X G, WANG J. An upper bound wedge failure analysis method[C]// YAGI N, YAMAGAMI T, JIANG J C, eds. Slope Stability Analysis, Rotterdam: Balkema, 1999: 325 - 328.
- [5] WANG Y J, YIN J H. Wedge stability analysis considering dilatancy of discontinuities[J]. Rock Mech Rock Eng, 2002, **35**(2): 127 - 137.
- [6] WANG Y J, YIN J H, CHEN Z Y, LEE C F. Analysis of wedge stability using different methods[J]. Rock Mech Rock Eng, 2004, **37**(2): 127 - 150.
- [7] CHEN Z Y. A generalized solution for tetrahedral rock wedge stability analysis[J]. Rock Mechanics and Mining Sciences, 2004, **41**: 613 - 628.
- [8] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. Elsevier Scientific Publishing Company, New York, 1975.
- [9] 陈祖煜, 汪小刚, 杨 健, 等. 岩质边坡稳定分析—原理、方法、程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2005. CHEN Zu-yu, WANG Xiao-gang, YANG Jian, et al. Rock slope stability analysis—theory, methods and programs[M]. Beijing: China Water Power Press, 2005. (in Chinese))
- [10] 陈胜宏. 岩体三维弹黏塑性块体理论的初步研究[J]. 武汉水利电力大学学报, 1990, **23**(6): 55 - 60. (CHEN Sheng-hong. A preliminary study on three-dimensional elastic-viscoplastic block theory for rock masses[J]. Journal of Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, 1990, **23**(6): 55 - 61. (in Chinese))
- [11] 任青文, 余天堂. 块体单元法的理论和计算模型[J]. 工程力学, 1999, **16**(1): 67 - 77. (REN Qing-wen, YU Tian-tang. Theory and calculating model of block element method[J]. Engineering Mechanics, 1999, **16**(1): 67 - 77. (in Chinese))
- [12] KUMER H, AYDAN O, ULUSAY R. Dynamic and static stability assessment of rock slopes against wedge failure[J]. Rock Mech Rock Eng, 2000, **33**(1): 31 - 51.
- [13] 李 泽, 王均星. 基于非线性规划的岩质变坡有限元塑性极限分析下限法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2007, **26**(4): 747 - 753. (LI Ze, WANG Jun-xing. Lower bound limit study on plastic limit analysis of rock slope using finite elements based on nonlinear programming[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2007, **26**(4): 747 - 753. (in Chinese))
- [14] 陈 炜, 王均星. 节理岩质边坡的块体元塑性极限分析下限法[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(2): 272 - 277. (CHEN Wei, WANG Jun-xing. Plastic lower bound limit analysis using block element method for jointed rock slope[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(2): 272 - 277. (in Chinese))