



柱坐标系下地下水非稳定流模拟的有限层法

王旭东^{1, 2}, 殷宗泽², 宰金珉¹, 诸宏博¹

(1. 南京工业大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210009; 2. 河海大学岩土工程科学研究所, 江苏 南京 210098)

摘要: 在柱坐标系下, 利用贝塞耳函数和基函数提出了满足地下水流动边界条件的降深试探函数; 采用伽辽金法原理, 推导了层状非均质各向异性越流承压含水层中地下水非稳定流的有限层方程, 建立了地下水流动的有限层分析方法。在此基础上, 编制了相应的计算程序实现了有限层方程的求解。经典算例的解析解与有限层解的对比分析验证了本文方法的正确性和有效性。

关键词: 有限层法; 地下水; 非稳定流; 柱坐标系

中图分类号: TU43 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2009)01-0015-06

作者简介: 王旭东(1963-), 男, 江苏武进人, 教授, 博士研究生, 主要从事土与结构共同作用和岩土工程数值分析研究工作。E-mail: cewxd@njut.edu.cn。

Finite layer method for numerical simulation of unsteady groundwater flow in cylindrical coordinate system

WANG Xu-dong^{1, 2}, YIN Zong-ze², ZAI Jin-min¹, ZHU Hong-bo¹

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China; 2. Geotechnical Research Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A test function by using the Bessel function and basic function, which satisfies constant-head and no flow boundary conditions, is put forward to describe unsteady groundwater flow in the cylindrical coordinate system. Based on Galerkin's method, semi-analytical finite layer equations are derived in the non-homogeneous and anisotropic layered leaky confined aquifers. The finite layer method (FLM) for the unsteady groundwater flow is presented in the cylindrical coordinate system. A computer program is developed for solving the finite layer equations. Numerical examples are presented and compared with the analytical solutions to demonstrate the validity and efficiency of the present method.

Key words: finite layer method; groundwater; unsteady flow; cylindrical coordinate

0 引言

因含水层的非均质性、各向异性及边界条件等因素, 大多数情况下难以获得地下水流动问题的解析解。有限差分法、有限元法^[1]等已成为求解地下水流动问题的主要方法, 特别是有限元法因其适用性强得到广泛的应用。此外, 许多学者不断尝试寻找有效的数值方法用于地下水模拟计算文献[2~4]中的方法在提高计算精度和减少计算工作量等方面各有特点, 但对于层状非均质各向异性含水层中的三维地下水流动问题的分析, 仍存在计算工作量大、占有内存多等局限性, 计算规模受到制约。有限层法是针对求解层状介质问题提出的一种半解析半数值方法, 能有效地将三维问题简化为一维问题求解^[5], 较好地解决有限元等方法在三维数值模拟时遇到的占用内存多、计算工作量大等问题, 在岩土工程数值分析中得到了广泛的应用。文献[6~10]充分体现了有限层法求解层状介质问题

的优势, 大大提高了求解效率。

本文基于有限层法的优点, 在提出以贝塞耳函数和基函数为试探函数基础上, 采用伽辽金法推导柱坐标下承压含水层非稳定流有限层方程, 通过编制相应的计算程序实现有限层方程的求解, 最后, 由算例验证本文方法的正确性和有效性。

1 地下水非稳定流的数学描述

层状非均质各向异性等厚有限区域承压含水层, 初始水头保持水平。不考虑弱透水层弹性释水, 且弱透水层顶面保持常水头, 如图1所示。根据水量均衡原理和达西定律, 以降深表示的越流承压含水层中地

基金项目: 国家自然科学基金项目(50278042); 江苏省高校自然科学基金研究计划项目(03KJB560044)

收稿日期: 2007-10-29

下水非稳定流数学模型为

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r r \frac{\partial s}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial s}{\partial z} \right) - \frac{s}{\lambda^2} + \\ & W(r, z, t) = S_s \frac{\partial s}{\partial t} \quad (t > 0, 0 \leq r \leq R), \\ & s(r, z, t) = 0 \quad (t = 0, 0 \leq r \leq R), \\ & s(r, z, t) \Big|_{r=R} = 0 \quad (t > 0), \\ & \frac{\partial s(r, z, t)}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \quad (t > 0). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $s(r, z, t)$ 为降深; K_r , K_z 分别为 r , z 方向的渗透系数; S_s 为贮水率; $\lambda = (cB'/K')^{1/2}$, c , B' , K' 分别为承压含水层厚度、弱透水层厚度和弱透水层渗透系数, $W(r, z, t)$ 为源汇项, 源取为正值, 汇取为负值; R 为计算区域尺寸。

2 有限层方程

2.1 有限层物理模型

有限层计算区域取为半径为 R , 厚度为 c 的圆柱体含水层, 沿 z 轴方向将含水层离散成 L 个层元, 各层元可分别取用不同的计算参数 K_r , K_z , S_s , 以反映不同含水层的层状非均质性和各向异性, 有限层物理模型如图 1 所示。

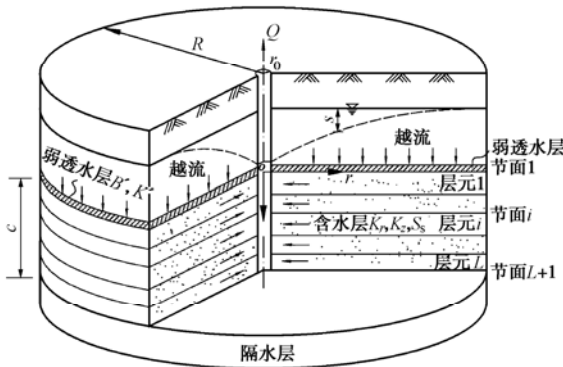


图 1 越流承压含水层有限层物理模型

Fig. 1 Finite layer physical model of leaky confined aquifers

2.2 降深试探函数

降深试探函数可表示为分离变量的函数项级数, 径向用解析函数表示, z 方向采用有限层元离散, 且层元内降深线性分布, 则降深的试探函数可表示为

$$\tilde{s}(r, z, t) = \sum_{j=1}^{L+1} \sum_{m=0}^M \Phi_{mj}(t) A_m(r) N_j(z), \quad (2)$$

式中, $\tilde{s}(r, z, t)$ 为降深试探函数, $\Phi_{mj}(t)$ 为与时间有关的待求系数, $A_m(r) = J_0(k_m r)$ 为径向解析函数, $J_0(k_m r)$ 为第一类零阶贝塞耳函数, M 为级数项数, L 为有限层层元数。

对于定水头边界, $k_m = \lambda_m^{(0)}/R$, $\lambda_m^{(0)}$ 为第一类零

阶贝塞耳函数的第 m 个正根, 保证在边界处 $s=0$; 对于隔水边界, $k_m = \lambda_m^{(1)}/R$, $\lambda_m^{(1)}$ 为第一类一阶贝塞耳函数的第 m 个正根, 保证在边界处 $\partial s/\partial n=0$ 。

$N_j(z)$ 为线性插值基函数, 其形式为

$$N_j(z) = \begin{cases} (z - z_{j-1})/(z_j - z_{j-1}) & (z_{j-1} \leq z \leq z_j) \\ (z - z_{j+1})/(z_j - z_{j+1}) & (z_j \leq z \leq z_{j+1}) \\ 0 & (z \leq z_{j-1} \text{ 或 } z \geq z_{j+1}) \end{cases} \quad (3)$$

2.3 伽辽金法

根据加权余量法原理, 由式 (1) 可得伽辽金方程:

$$\iint_D \{ L(\tilde{s}) + W \} \omega_{m'i} r dr dz = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, L+1) \quad (4)$$

式中 D 为含水层计算区域; W 为源汇项; $L(\tilde{s})$ 为微分算子, $L(\tilde{s}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r r \frac{\partial \tilde{s}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \tilde{s}}{\partial z} \right) - \frac{s}{\lambda^2} - S_s \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t}$; $\omega_{m'i}$

为权函数, 取为 $\omega_{m'i}(r, z) = N_i(z) J_0(k_m r)$, 其中 $N_i(z)$ 为线性插值基函数。

对于任一有限层层元 e , 式 (4) 可进一步表示为

$$\sum_{e=1}^L \iint_{D^e} \{ L(\tilde{s}) + W^e \} \omega_{m'i} r dr dz = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, L+1) \quad (5)$$

式中, D^e 为层元计算区域, W^e 为层元源汇项。

将式 (2) 代入式 (5) 得

$$\sum_{e=1}^L \sum_{j=1}^{L+1} \sum_{m=0}^M \iint_{D^e} \{ L(\Phi_{mj}(t) A_m N_j) + W^e \} N_i A_m r dr dz = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, L+1) \quad (6)$$

2.4 层元有限层方程

取一典型有限层层元 l , 层元厚 c_l , 其节面编号分别为 l , $l+1$, 如图 2 所示。根据贝塞耳函数的正交性, 第一类齐次边界条件时 (定水头边界), 有

$$\int_0^R J_0(k_m r) J_0(k_{m'} r) r dr = \begin{cases} 0 & (m \neq m') \\ \frac{R^2}{2} [J_1(k_m R)]^2 & (m = m') \end{cases} \quad (7a)$$

式中, $k_m = \lambda_m^{(0)}/R$, $\lambda_m^{(0)}$ 为第一类零阶贝塞耳函数的第 m 个正根。

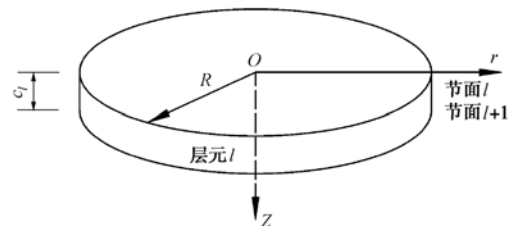


图 2 有限层层元

Fig. 2 Finite layer element

对于第二类齐次边界条件 (隔水边界), 有

$$\int_0^R J_0(k_m r) J_0(k_{m'} r) r dr = \begin{cases} 0 & (m \neq m') \\ \frac{R^2}{2} [J_0(k_m R)]^2 & (m = m') \end{cases}, \quad (7b)$$

式中, $k_m = \lambda_m^{(1)} / R$, $\lambda_m^{(1)}$ 为第一类一阶贝塞耳函数的第 m 个正根。

当 $m = m'$ 时, 由式 (6) 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{l+1} \sum_{m=1}^M \left[\Phi_{mj} \int_{Z_l}^{Z_{l+1}} K_r N_i^e N_j^e dz \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_m}{\partial r} \right) A_m dr - \right. \\ & \Phi_{mj} \int_{Z_l}^{Z_{l+1}} K_z \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} dz \int_0^R A_m^2 r dr - \\ & \Phi_{mj} \int_{Z_l}^{Z_{l+1}} \frac{1}{\lambda^2} N_i^e N_j^e dz \int_0^R A_m^2 r dr + \\ & \Phi_{mj} K_z \frac{\partial N_j^e}{\partial z} N_i^e \Big|_0^c \int_0^R A_m^2 r dr - \\ & \left. \frac{\partial \Phi_{mj}}{\partial t} \int_{Z_l}^{Z_{l+1}} S_s N_i^e N_j^e dz \int_0^R A_m^2 r dr \right] + \\ & \int_{Z_l}^{Z_{l+1}} \int_0^R W^e N_i^e A_m r dr dz = 0 \quad (i = l, l+1). \quad (8) \end{aligned}$$

由式 (8) 积分可得到层元 l 的第 m 项有限层方程:

$$[G]_m^e \{\Phi\}_m^e + [B]_m^e \frac{d}{dt} \{\Phi\}_m^e + \{q\}_m^e = 0, \quad (9)$$

式中, $[G]_m^e$ 为 2 阶层元渗透矩阵, $[B]_m^e$ 为 2 阶层元贮水矩阵, $\{q\}_m^e$ 为层元水量向量, $\{\Phi\}_m^e$ 为层元待求系数向量。

因承压含水层的顶面和底面处在 Z 方向没有水流, 故式 (8) 中 $\Phi_{mj} K_z \frac{\partial N_j^e}{\partial z} N_i^e \Big|_0^c \int_0^R A_m^2 r dr$ 的值为零。

式 (9) 中层元渗透矩阵系数 g_{mij}^e 、层元贮水矩阵系数 b_{mij}^e 与水量向量系数 q_{mi}^e 分别为

$$\begin{aligned} g_{mij}^e &= \int_{Z_l}^{Z_{l+1}} K_r N_i^e N_j^e dz \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A_m}{\partial r} \right) A_m dr - \\ & \int_{Z_l}^{Z_{l+1}} K_z \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} dz \int_0^R A_m^2 r dr - \\ & \int_{Z_l}^{Z_{l+1}} \frac{1}{\lambda^2} N_i^e N_j^e dz \int_0^R A_m^2 r dr, \quad (10) \end{aligned}$$

$$b_{mij}^e = - \int_{Z_l}^{Z_{l+1}} S_s N_i^e N_j^e dz \int_0^R A_m^2 r dr, \quad (11)$$

$$q_{mi}^e = \int_{Z_l}^{Z_{l+1}} N_i^e dz \int_0^R W^e A_m r dr. \quad (12)$$

根据贝塞耳函数的正交性和基函数的性质, 由式 (10) ~ (12) 可分别求得不同边界条件下各层元的渗透矩阵系数 g_{mij}^e 、贮水矩阵系数 b_{mij}^e 、水量向量系数 q_{mi}^e , 其积分结果如下所示。

(1) 层元渗透矩阵系数

a) 定水头边界

$$g_{mij}^e = \begin{cases} -\frac{R^2}{2} [J_1(\lambda_m^{(0)})]^2 \left\{ [(K_r)_l (k_m)^2] \frac{c_l}{3} + \frac{(K_z)_l}{c_l} \right\} - \frac{R^2 c_l}{6 \lambda^2} [J_1(\lambda_m^{(0)})]^2 & (i = j) \\ -\frac{R^2}{2} [J_1(\lambda_m^{(0)})]^2 \left\{ [(K_r)_l (k_m)^2] \frac{c_l}{6} - \frac{(K_z)_l}{c_l} \right\} - \frac{R^2 c_l}{12 \lambda^2} [J_1(\lambda_m^{(0)})]^2 & (i \neq j) \end{cases}, \quad (13)$$

式中, $\lambda_m^{(0)}$ 为第一类零阶贝塞耳函数的第 m 个正根。

当 $m=0$ 时, 有 $J_1(0)=0$, 故定水头边界时, 级数项仅需从 1 开始。

b) 隔水边界

当 $m=0$ 时, $J'_0(k_0 R) = J'_0(\lambda_0^{(1)}) = J_1(\lambda_0^{(1)}) = 0$, 得 $\lambda_0^{(1)} = 0$, 则 $k_0 = 0$ 。因 $J_0(0)=1$, 故有

$$g_{mij}^e = \begin{cases} -\frac{R^2}{2} \frac{(K_z)_l}{c_l} - \frac{R^2 c_l}{6 \lambda^2} & (i = j) \\ -\frac{R^2}{2} \frac{(K_z)_l}{c_l} - \frac{R^2 c_l}{12 \lambda^2} & (i \neq j) \end{cases}; \quad (14)$$

当 $m \neq 0$ 时,

$$g_{mij}^e = \begin{cases} -\frac{R^2}{2} [J_0(\lambda_m^{(1)})]^2 \left\{ [(K_r)_l (k_m)^2] \frac{c_l}{3} + \frac{(K_z)_l}{c_l} \right\} - \frac{R^2 c_l}{6 \lambda^2} [J_0(\lambda_m^{(1)})]^2 & (i = j) \\ -\frac{R^2}{2} [J_0(\lambda_m^{(1)})]^2 \left\{ [(K_r)_l (k_m)^2] \frac{c_l}{6} - \frac{(K_z)_l}{c_l} \right\} - \frac{R^2 c_l}{12 \lambda^2} [J_0(\lambda_m^{(1)})]^2 & (i \neq j) \end{cases}, \quad (15)$$

式中, $\lambda_m^{(1)}$ 为第一类一阶贝塞耳函数的第 m 个正根。

(2) 层元贮水矩阵系数

a) 定水头边界

$$b_{mij}^e = \begin{cases} -\frac{R^2 c_l S_s}{6} [J_1(\lambda_m^{(0)})]^2 & (i = j) \\ -\frac{R^2 c_l S_s}{12} [J_1(\lambda_m^{(0)})]^2 & (i \neq j) \end{cases}, \quad (16)$$

式中, $\lambda_m^{(0)}$ 为第一类零阶贝塞耳函数的第 m 个正根。

b) 隔水边界

当 $m=0$ 时,

$$b_{mij}^e = \begin{cases} -\frac{R^2 c_l S_s}{6} & (i = j) \\ -\frac{R^2 c_l S_s}{12} & (i \neq j) \end{cases}; \quad (17)$$

当 $m \neq 0$ 时,

$$b_{mij}^e = \begin{cases} -\frac{R^2 c_l S_s}{6} [J_0(\lambda_m^{(i)})]^2 & (i = j) \\ -\frac{R^2 c_l S_s}{12} [J_0(\lambda_m^{(i)})]^2 & (i \neq j) \end{cases}; \quad (18)$$

式中, $\lambda_m^{(i)}$ 为第一类一阶贝塞耳函数的第 m 个正根。

(3) 水量向量系数

抽水井(注水井)为

$$q_{mi}^e = \int_{z_i}^{z_{i+1}} N_i^e dz \int_0^R \bar{Q} \frac{\delta(r)}{2\pi r} J_0(k_m r) r dr$$

$$= \frac{c_l}{4\pi} \bar{Q} \quad (i = l, l+1), \quad (19)$$

式中, $\bar{Q}$ 为抽水率, $\bar{Q} = Q/c_s$, Q 为抽水量, c_s 为滤管长度。

2.5 整体有限层方程

由于试探解的正交性, 保证了各级数项之间存在非耦合关系, 有限层方程求解可简化为 m 个独立方程组求解, 故由层元有限层方程即可形成第 m 项级数的整体有限层方程:

$$[G]_m \{\Phi\}_m + [B]_m \frac{d}{dt} \{\Phi\}_m + \{q\}_m = 0 \quad (20)$$

式中 $[G]_m$ 为整体渗透矩阵, $[G]_m = \sum_{e=1}^L [G]_m^e$; $[B]_m$ 为整体贮水矩阵, $[B]_m = \sum_{e=1}^L [B]_m^e$; $\{q\}_m$ 为整体水量向量, $\{q\}_m = \sum_{e=1}^L \{q\}_m^e$; $\{\Phi\}_m$ 待求未知数, $\{\Phi\}_m = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_j, \dots, \phi_L, \phi_{L+1}]_m^T$ 。

对于有 L 个层元的有限层问题, $[G]_m, [B]_m$ 都为 $(L+1)$ 阶、带宽为 3 的对称矩阵, 叠加方法如图 3 所示。

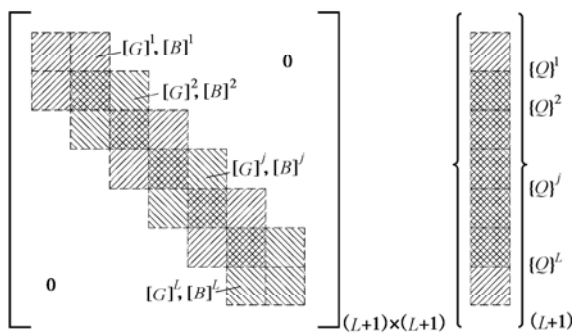


图 3 $[G]$, $[B]$ 和 $\{Q\}$ 叠加方法

Fig. 3 Matrix assembly for $[G]$, $[B]$ and $\{Q\}$

3 有限层方程求解

将试探函数中的 $\Phi_{mj}(t)$ 采用有限差分离散可得

$$\frac{d\{\Phi\}_m}{dt} = \frac{\{\Phi\}_m^{k+1} - \{\Phi\}_m^k}{\Delta t} \quad (21)$$

若时间 k 和 $k+1$ 间的降深采用加权平均表示, 则

$$\{\Phi\}_m^{k+\theta} \approx \theta \{\Phi\}_m^{k+1} + (1-\theta) \{\Phi\}_m^k, \quad (22)$$

式中, $\{\Phi\}_m^k$ 和 $\{\Phi\}_m^{k+1}$ 分别为 k 时刻和 $k+1$ 时刻的值, t 为时间步长。 θ 为加权因子, 取值为 $0 \sim 1$ 。

将式 (21) 和式 (22) 代入式 (20) 可得有限层方程的差分格式:

$$(\theta [G]_m + \frac{1}{\Delta t} [B]_m) \{\Phi\}_m^{k+1} = (\frac{1}{\Delta t} [B]_m - (1-\theta) [G]_m) \{\Phi\}_m^k - \{Q\}_m^k \quad (23)$$

因初始降深为 0, 故 $\{\Phi\}_m^0 = 0$ 。同时取 $0.5 \leq \theta \leq 1$, 以保证差分格式的无条件稳定。通过求解式 (23) 可得未知系数 $\Phi_{mj}(t)$, 并由式 (2) 计算 $k+1$ 时刻的降深。

4 算例验证

为了验证地下水非稳定流有限层法的正确性, 探讨有限层法在层状非均质各向异性承压含水层、越流承压含水层、不完整井等条件下模拟地下水流动的能力。根据有限层方程编制了相应的计算程序, 实现了经典算例的计算分析, 计算参数如表 1 所示。

4.1 承压含水层和越流承压含水层水位降深

图 4, 5 分别给出了承压含水层和越流承压含水层中完整井抽水时的水位降深有限层解, 与解析解的对比分析表明, 因有限域解析解^[11-12]和有限层法采用了相同的边界条件, 有限层法得到的水位降深与有限域解析解具有非常好的一致性, 从而验证地下水非稳定流有限层法的正确性。

图 6 给出了有限区域定水头边界条件下有限层解与无限域解析解的对比, 对于地下水流动计算中广泛采用的无限域解析解^[13], 抽水初期, 地下水流动基本不受边界的影响, 无限域解析解与有限层解之间一致性良好。但随着抽水时间的延长, 地下水流动逐渐受到边界影响, 有限层解开始逐渐偏离无限域解析解,

表 1 计算参数

Table 1 Calculating parameters

参数	含水层厚 c/m	贮水率 $S_s/(m^{-1})$	渗透系数 $K_r, K_z/(m \cdot d^{-1})$	抽水量 $Q/(m^3 \cdot d^{-1})$	计算区域 R/m	滤管长度 c_s/m	时间步长 t/d	加权因子	层元数 L	边界条件
完整井	60	0.33×10^{-4}	5.0, 5.0	2000	2000	60	0.010	0.8	1	定水头、隔水
不完整井	50	0.20×10^{-4}	5.0, 5.0; 5.0, 1.0	1000	3000	20/50	0.001	0.8	50	定水头

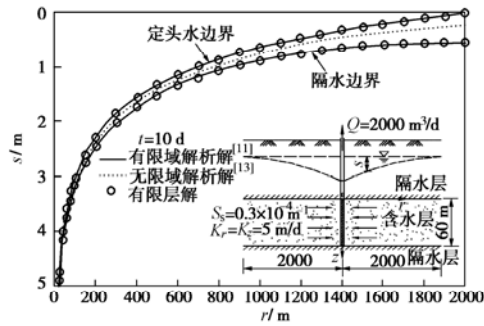


图4 承压含水层水位降深曲线

Fig. 4 The drawdown curves in confined aquifers

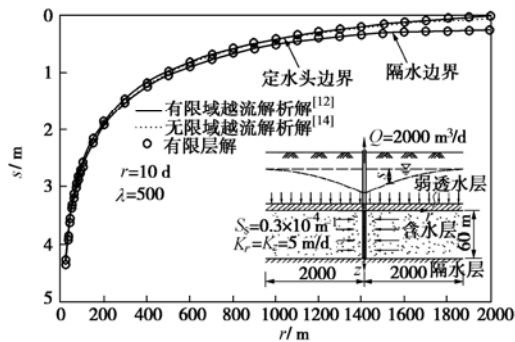


图5 越流承压含水层水位降深曲线

Fig. 5 The drawdown curves in leaky confined aquifers

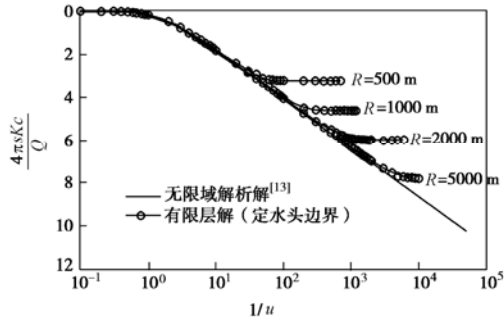


图6 标准化水位降深曲线(距井 100 m)

Fig. 6 Normalized drawdown curves (100 m from well location)

有限层解开始受边界影响的时间随计算区域的扩大而增大。图4、5同样也反映了由于边界条件的不同而引起有限域解与无限域解的差异。由此可见,对于有限区域的地下水流动问题,若采用无限域解析解进行计算,其结果将存在一定的误差。

4.2 完整井和不完整井水位降深

目前不完整井解析解较少,为了进行对比分析,引入均质各向同性承压含水层中顶部完整而底部不完整非稳定流解析解^[15]。由图7给出的计算结果表明,有限层解和解析解具有良好的一致性。对于给定抽水量 Q 的不完整井,不完整井滤管顶面和底面处的水位降深均比完整井中的水位降深大。

完整井中的地下水流线为水平线,竖直断面上各点水位降深相同。不完整井中,因地下水流向不完整井汇聚,使得流线偏转并加长,如图8所示。但在距

抽水井1.5~2.0倍含水层厚度范围以外,流线仍基本保持水平,不完整井的影响可以忽略,与解析解得到的相关结论一致。

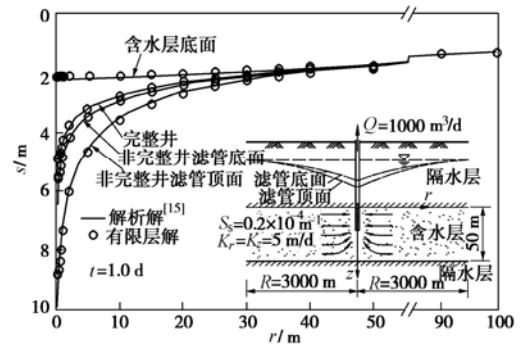


图7 不完整井水位降深曲线

Fig. 7 The drawdown curves of partially penetrating well

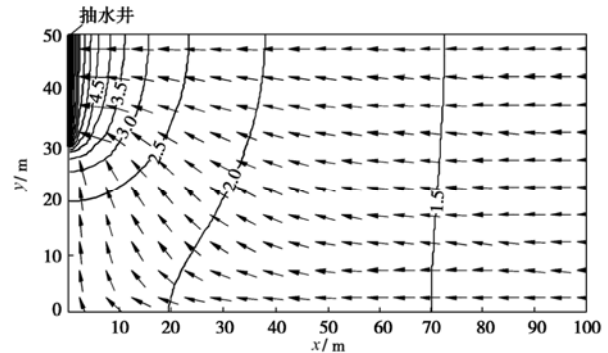


图8 不完整井降深等值图

Fig. 8 Drawdown contour of partially penetrating well

4.3 各向异性含水层中水位降深

在不完整井中,由于地下水存在竖向渗流,含水层的各向异性影响水位降深,图9分别给出了 $Kᵣ/Kₑ=1$ 和 $Kᵣ/Kₑ=5$ 时的有限层计算结果,对比分析表明,滤管顶面和底面处的水位降深随各向异性程度的增加而加大,特别是在不完整井影响范围内(1.5~2.0倍 $\sqrt{Kᵣ/Kₑ}$ 含水层厚度^[17])滤管顶面水位下降尤为明显,而含水层底面处的水位降深反而略有减少,不完整井的影响范围随 $\sqrt{Kᵣ/Kₑ}$ 的增大而扩大。

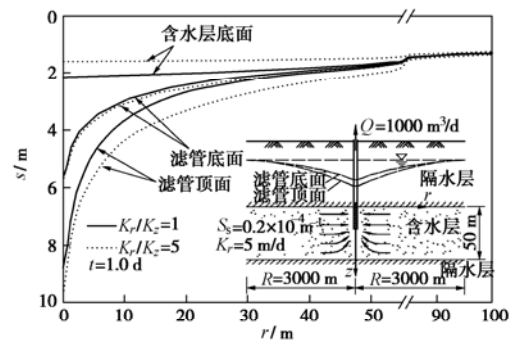


图9 各向异性含水层不完整井降深分布曲线

Fig. 9 The drawdown curves of partially penetrating well in anisotropic layered confined aquifers

各向异性含水层中地下水流动问题求解十分困难,对于平面内的均质各向异性问题,通常采用等效为均质各向同性含水层问题求解。目前还没有考虑水平向和竖向各向异性问题的解析解,只有采用数值法求解,针对含水层的层状特性,有限层法为求解层状非均质各向异性含水层问题提供了一种有效方法。

5 结 论

(1) 构建了以贝塞耳函数和基函数为基础,满足地下水流动边界条件的试探函数,基于伽辽金法加权余量原理,推导了柱坐标下层状非均质各向异性越流承压含水层中地下水非稳定流有限层方程,并编制了相应的计算程序,实现了有限层方程的求解。

(2) 算例对比分析表明,有限层解和解析解具有良好的一致性,验证了有限层法求解地下水非稳定流动问题的正确性和有效性,为求解层状非均质各向异性越流承压含水层中地下水非稳定流问题提供了一条新的途径。

(3) 本文是有限层法应用于地下水流动问题求解的一次尝试,因试探解在径向采用连续解析函数表示,充分体现了有限层法在求解层状介质问题的特点,提高了计算效率,该方法对诸如固结、热传导等类似问题的求解有积极的借鉴意义。

参考文献:

- [1] 薛禹群, 谢春红. 地下水数值模拟[M]. 北京: 科学出版社, 2007. (XUE Yu-qun, XIE Chun-hong. Numerical methods of groundwater[M]. Beijing: Sciences Press, 2007. (in Chinese))
- [2] 陈文华, 王旭东. 二维非均质体中非稳定流问题的边界单元法[J]. 岩土工程学报, 1991, 13(3): 65 - 71. (CHEN Wen-hua, WANG Xu-dong. Boundary elements method of unsteady flow problems in 2D heterosphere[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1991, 13(3): 65 - 71. (in Chinese))
- [3] 薛禹群, 叶淑君, 谢春红, 等. 多尺度有限元法在地下水模拟中的应用[J]. 水利学报, 2004(7): 7 - 13. (XUE Yu-qun, YE Shu-jun, XIE Chun-hong, et al. Application of multi-scale finite element method to simulation of groundwater flow[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2004(7): 7 - 13. (in Chinese))
- [4] 王文科. 改进的时间差分有限分析法模拟地下水非稳定井流方程[J]. 水科学进展, 1996, 17(2): 112 - 118. (WANG Wen-ke. Finite method of modified time-difference modeling equation of unsteady well-flow[J]. Advances in Water Science, 1996, 17(2): 112 - 118. (in Chinese))
- [5] CHEUNG Y K. Finite strip method in structural mechanics[M]. New York: Pergamon Press, 1976.
- [6] SMALL J C, BOOKER J R. Finite layer analysis of primary and secondary consolidation[C]// Proceedings of the 4th International Conference of Numerical Methods in Geomechanics, Edmonton, 1982: 365 - 371.
- [7] 宰金珉, 梅国雄. 有限层法求解三维比奥固结问题[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(1): 31 - 33. (ZAI Jin-min, MEI Guo-xiong. Finite layer analysis of three-dimensional Biot consolidation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, 24(1): 31 - 33. (in Chinese))
- [8] SMITH Stanley S, ALLEN Myron b, PUCKETT Jay. The finite layer method for groundwater flow models[J]. Water Resources Research, 1992, 28(6): 1715 - 1722.
- [9] 宰金珉, 宰金璋. 高层建筑基础分析与设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1993. (ZAI Jin-min, ZAI Jin-zhang. Analysis and design of foundation of high-rises[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1993. (in Chinese))
- [10] 王旭东, 魏道堃, 宰金珉. 群桩—土—承台结果共同作用的数值分析[J]. 岩土工程学报, 1996, 18(4): 27 - 33. (WANG Xu-dong, WEI Dao-duo, ZAI Jin-min. Numerical analysis of pile groups-soil-pile cap interaction[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 18(4): 27 - 33. (in Chinese))
- [11] 王旭东, 殷宗泽, 宰金珉. 有限区域地下水非稳定流解析解[J]. 南京工业大学学报, 2008, 30(2): 45 - 50. (WANG Xu-dong, YING Zong-ze, ZAI Jin-min. Analytical solution of unsteady groundwater flow in limited areas[J]. Journal of Nanjing University of Technology, 2008, 30(2): 45 - 50. (in Chinese))
- [12] JACOB C E. Radial flow in a leaky artesian aquifer[J]. Trans Am Geophys Un, 1946, 27(2): 198 - 208.
- [13] THEIS C V. The relationship between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage[C]// American Geophysical Union Transactions, 16th Annual Meeting, 1935, 2: 519 - 524.
- [14] HANTUSH M S, JACOB C E. Non-steady radial flow in an infinite leaky aquifer[J]. Trans Am Geophys Un, 1955, 36(1): 95 - 100.
- [15] HANTUSH M S. Drawdown around a partially penetrating well[J]. J Am Soc Civ Engrs, 1961, 87(HY4): 83 - 98.
- [16] HANTUSH M S. Hydraulics of wells, in Advances in Hydrosience[M]. New York: Academic Press, 1964.