

复杂条件下 Winkler 地基梁的解析解

李顺群^{1, 2, 3}, 郑刚¹

(1. 天津大学建筑工程学院, 天津 300072; 2. 天津城市建设学院土木工程系, 天津 300384;

3. 天津市软土特性与工程环境重点实验室, 天津 300384)

摘要: 基于梁的弯曲微分方程、有限元理论和最小势能原理(虚功原理), 利用梁单元间的位移、转角、弯矩和剪力协调条件, 地基梁的整体平衡条件, 给出了复杂条件下 Winkler 地基梁的一种计算方法。此方法能对 Winkler 地基梁在受集中力、集中力偶和任意形式的分布荷载共同作用时进行解析求解, 而且地基梁的截面和弹性模量、地基的基床系数可以分段不同。此方法能得到各梁单元和整个地基梁的沉降位移表达式, 且这一表达式与简单条件下的 Winkler 地基梁经典解有相同的结构形式; 根据与沉降位移表达式之间的导数关系, 可以进一步得到转角、弯矩和剪力表达式。算例表明, 计算结果与一般有限元方法的计算结果完全吻合。另外, 此方法虽然在概念上属于有限元方法的一种, 但单元划分方法与一般有限元方法存在本质差别, 单元个数也远远少于一般有限元方法的单元个数。

关键词: Winkler 地基梁; 最小势能原理; 有限元原理; 复杂条件

中图分类号: TU471

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2008)06-0873-07

作者简介: 李顺群(1971-), 男, 博士, 副教授, 主要从事土力学和基础工程基本理论的研究与教学工作。E-mail: lishunqun@sina.com。

Analytic solution of beams on Winkler foundation under complex conditions

LI Shun-qun^{1, 2, 3}, ZHENG Gang¹

(1. School of Civil and Architectural Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China; 2. Department of Civil Engineering, Tianjin

Institute of Urban Construction, Tianjin 300384, China; 3. Tianjin Key Laboratory of Soft Soil Characteristics and Engineering

Environment, Tianjin 300384, China)

Abstract: Based on the differential equation for curvature of beams, the theory of finite element and the principle of minimum potential energy, a method for beams on Winkler foundation under complex conditions was deduced with compatibility conditions of displacement, angular rotation, moment and shear of adjacent beam elements. The method could be used to compute beams on Winkler foundation under complex conditions, such as variable Young's modulus and section, complex foundation conditions, namely variable bedding modulus, and complex load consisting of concentrated force, moment and randomly distributed load. The displacement equations both for beam elements and for the whole beam, which had the same structure with the classic solution by Winkler, could be derived from the proposed method. Therefore, the equations for angular rotation, moment and shear of the beams could also be obtained from their differential relationship with displacement equation. It was shown by the computation of an example that the results obtained by the proposed method were consistent with those by the classic finite element method when the elements were small enough. Furthermore, the element partition in the proposed method was thoroughly different from that in the classic finite element method.

Key words: beam on Winkler foundation; principle of minimum potential energy; theory of finite element; complex condition

0 引言

钢筋混凝土条形基础在工程中应用非常广泛, 如多跨框架结构(框架-剪力墙结构)的条形基础、格式梁基础等都可以作为条形基础进行计算^[1-2]。条形基础内力的计算方法, 主要有简化计算法和弹性地基梁法两类。简化计算法可分为静定梁法和倒梁法, 这两种方法均认为基底反力满足直线分布。因此, 与地基

相比, 条形基础本身必须具有足够的相对刚度才能采用简化算法。而且, 静定梁法只考虑了整体弯曲, 倒梁法只考虑了局部弯曲。

为了准确确定条形基础的内力和沉降, 弹性地基

基金项目: 天津市科技攻关计划重点项目(06YFSZSF04000); 天津市高等学校科技发展基金计划项目(20071005)
收稿日期: 2007-06-14

梁法受到越来越广泛的关注。另外,弹性地基梁法还经常被用来分析盖挖逆作中地下连续墙、桩锚支护中的桩体等构件的内力和变形^[3-4]。弹性地基梁法包括解析方法^[5]、有限差分法和有限元方法^[1, 6]等。解析方法从梁的微分方程出发,利用边界条件和平衡方程得出梁的挠屈曲线,并通过微分关系进一步得到转角、弯矩和剪力。而一般的有限元方法在确定刚度矩阵时大致有两种途径:一种途径是梁和地基刚度分别计算;另一种途径是梁和地基刚度统一计算。

传统解析法有比较明显的缺点,比如无法考虑梁的自重、难以在基础上施加多种类型荷载、难以考虑梁的特性(截面形状和弹性模量等)沿梁长的变化、难以考虑基床系数的变化等。而一般有限元方法在建立方程时只利用了梁单元的弯矩连续性条件,没有利用剪力连续性条件,所以是一种近似方法,且无法直接得到梁的沉降位移表达式。

本文利用梁的微分方程,建立了复杂条件下 Winkler 地基梁的解析方法。这些复杂条件体现在三个方面:第一是复杂的荷载条件,可以同时施加集中力、集中力偶和多种形式的分布荷载;第二是复杂的梁条件,包括梁截面和弹性模量的分段变化等;第三是复杂的地基条件,指基床系数可以沿梁长分段不同。此方法虽然在概念上属于有限元方法的一种,但是单元划分与一般有限元方法存在本质不同,且能得到复杂条件下地基梁沉降位移的解析表达式。另外,此方法可以用来计算盖挖逆作中的地下连续墙、桩(墙)锚支护结构中的桩(墙)等类似构件的变形和内力计算。

1 模型建立

图1所示为作用在 Winkler 地基上的弹性地基梁 AB,该梁受多个集中力、集中力偶以及若干局部分布荷载的共同作用,当然各类型荷载也可以部分或全部为零。

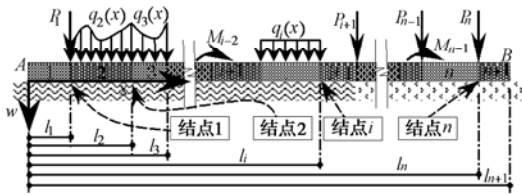


图1 本文的 Winkler 地基梁计算模型

Fig. 1 The proposed model for beams on winkler foundation

对于 Winkler 地基模型,任意一点的压力强度 p 与该点的沉降量 s 成正比,即

$$p = ks \quad , \tag{1}$$

其中, k 是基床系数。在图1中,梁长方向为 x ,梁沉降位移(等于地基压缩变形)为 $\tilde{w}$ 。根据梁和地基的变形协调条件得到

$$s = \tilde{w} \quad . \tag{2}$$

以集中力和集中力偶在梁上的作用点、分布荷载的起始和终止位置、梁宽改变截面、梁抗弯刚度的变化截面、地基基床系数改变处为结点划分单元。比如,在图1所示系统中共有 n 个结点,结点将梁分成 $n+1$ 个梁单元。各梁单元的抗弯刚度、梁宽及其对应的地基基床系数分别定义为 EI_i , b_i 和 k_i ,具体编号见表1。因此,除了结点之外,各梁单元在自身长度范围内不受集中力和集中力偶作用。

下面建立在集中力荷载、集中力偶荷载和分布荷载以及地基反力共同作用下, Winkler 地基梁沉降位移方程的普遍形式。

弯矩与位移曲线的二阶导数之间存在关系式

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M \quad , \tag{3}$$

连续两次求导得到

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = -bp + q(x) \quad , \tag{4}$$

即

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\lambda^4 w = \frac{q(x)}{EI} \quad , \tag{5}$$

表1 与梁单元对应的相关参量定义

Table 1 Construction of beam elements and corresponding parameters for beams on Winkler foundation

结点编号		1	2	...	i		...	n		
结点荷载	力	P_2	P_2	...	P_i		...	P_n		
	力偶	M_2	M_2	...	M_i		...	P_n		
单元编号		1	2	3	...	i	$i+1$	...	n	$n+1$
单元长度		l_1	l_2-l_1	L_3-l_2	...	$l_{i+1}-l_i$	$l_{i+2}-l_{i+1}$	...	l_n-l_{n-1}	$l_{n+1}-l_n$
基床系数		k_1	k_2	k_3	...	k_i	k_{i+1}	...	k_n	k_{n+1}
抗弯刚度		EI_1	EI_2	EI_3	...	EI_i	EI_{i+1}	...	EI_n	EI_{n+1}
梁宽		b_1	b_2	b_3	...	b_i	b_{i+1}	...	b_n	b_{n+1}
分布荷载		$q_1(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	...	$q_i(x)$	$q_{i+1}(x)$	...	$q_n(x)$	$q_{n+1}(x)$

其中, λ 为柔度特征值, $\lambda = \sqrt{\frac{kb}{4EI}}$ 。微分方程 (5)

的解由以下两部分相加得到: 一部分是与微分方程 (5) 对应的齐次方程的通解; 另一部分是微分方程 (5) 的一个特解。对应的齐次方程的特征方程为

$$r^4 + 4\lambda^4 = 0 \quad (6)$$

由式 (6) 得到

$$(r^2 + 2\lambda r + 2\lambda^2)(r^2 - 2\lambda r + 2\lambda^2) = 0 \quad (7)$$

所以

$$\left. \begin{aligned} r_{1,2} &= \lambda(1 \pm i) \\ r_{3,4} &= \lambda(-1 \pm i) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

因此, 微分方程 (5) 对应的齐次方程的通解为

$$w = e^{\lambda x} (a_1 \cos \lambda x + a_2 \sin \lambda x) + e^{-\lambda x} (a_3 \cos \lambda x + a_4 \sin \lambda x) \quad (9)$$

微分方程 (5) 的特解由式 (9) 和 $\frac{q(x)}{EI}$ 共同确

定。只要给出 $q(x)$ 的具体表达式, 比较 $q(x)$ 与式 (9) 后, 可以给出特解形式, 将其代入式 (5) 后即可确定特解。考虑到多项式可以拟合任意形式的函数, 因此, 为了寻求统一的解法, 这里以多项式作为函数 $q(x)$ 的统一表达式。多项式的次数越高, 其拟合精度也越高。选择三次多项式作为分布荷载的统一表达式, 其原因主要有两个: 一是如果选用四次以上的多项式, 则特解形式比较复杂; 如果多项式次数小于 3, 则精度较低。

在实际计算中, 如果认为三次多项式拟合某一梁单元上的分布荷载时存在较大误差, 则可以将该梁单元进一步细分, 并再次以三次多项式分别拟合细分后梁单元上的分布荷载, 直到得到满意的拟合结果为止。比如在图 1 中, 第一个分布荷载的形式比较复杂, 用一个三次多项式拟合可能存在较大误差, 因此可以将这个分布荷载分成 $a_2(x)$ 和 $a_3(x)$ 两部分, 分别用两个三次多项式进行拟合, 故与该分布荷载对应的梁段需要划分为两个梁单元。所以说, 以三次多项式作为拟合分布荷载的多项式具有普遍意义。设梁单元上的分布荷载

$$q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \quad (10)$$

结合式 (9), 可以得到微分方程 (5) 的特解

$$w^* = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3}{kb} \quad (11)$$

因此, 梁单元 i 的沉降位移曲线可以由式 (9) 和式 (11) 叠加得到, 即

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i &= w_i + w_i^* = e^{\lambda_i x} (a_{i1} \cos \lambda_i x + a_{i2} \sin \lambda_i x) + \\ &e^{-\lambda_i x} (a_{i3} \cos \lambda_i x + a_{i4} \sin \lambda_i x) + \frac{q_i(x)}{k_i b_i} \end{aligned} \quad (12)$$

这里 $q_i(x)$ 是整体坐标系里的函数。当梁单元长度范围内没有分布荷载作用时, 梁单元的沉降位移曲

线蜕化为经典解答, 即

$$w_i = e^{\lambda_i x} (a_{i1} \cos \lambda_i x + a_{i2} \sin \lambda_i x) + e^{-\lambda_i x} (a_{i3} \cos \lambda_i x + a_{i4} \sin \lambda_i x) \quad (13)$$

因此式 (12) 可以写为

$$\tilde{w}_i = w_i + \frac{c_{i0} + c_{i1}x + c_{i2}x^2 + c_{i3}x^3}{k_i b_i} \quad (14)$$

所以, 梁单元总沉降位移曲线可以表示为两部分: 第一部分为梁单元在结点力、结点力偶和对应的地基反力作用下的变形部分, 第二部可以看作是在单元范围内作用分布荷载时地基的弹性变形部分。当然这两部分变形是耦合的。这里 a_{ij} 为 4 个待定系数, $j=1, 2, 3, 4$ 。

根据连续性条件, 第 i 梁单元 (长度范围内有 $q_i(x)$ 作用) 和第 $i+1$ 梁单元 (长度范围内有 $q_{i+1}(x)$ 作用) 在结点 i 处, 即在 $x=l_i$ 处, 应该满足挠度 w 、转角 θ 、弯矩 M 和剪力 V 共 4 个协调条件, 即

$$\tilde{w}_i = \tilde{w}_{i+1} \quad (15a)$$

或

$$w_i + \frac{q_i(x)}{k_i b_i} = w_{i+1} + \frac{q_{i+1}(x)}{k_{i+1} b_{i+1}} \quad (15b)$$

$$\frac{dw_i}{dx} = \frac{dw_{i+1}}{dx} \quad (16)$$

$$EI_i \frac{d^2 w_i}{dx^2} = EI_{i+1} \frac{d^2 w_{i+1}}{dx^2} + M_i \quad (17)$$

$$EI_i \frac{d^3 w_i}{dx^3} = EI_{i+1} \frac{d^3 w_{i+1}}{dx^3} - P_i \quad (18)$$

从整体平衡的角度考虑, 各梁单元受到的地基反力之和应该等于所有集中力和分布荷载之和, 即

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} k_i b_i \tilde{w}_i dx &= \sum_{i=1}^n P_i + \\ \sum_{i=1}^{n+1} (c_{i0} + c_{i1}x + c_{i2}x^2 + c_{i3}x^3)(l_i - l_{i-1}) \end{aligned} \quad (19a)$$

将式 (14) 代入式 (19a) 得到

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} k_i b_i w_i dx = \sum_{i=1}^n P_i \quad (19b)$$

另外, 地基反力对梁 AB 左端的矩必须与集中力、集中力偶和分布荷载对梁左端的矩相平衡, 即

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} k_i b_i \tilde{w}_i x dx &= \sum_{i=1}^n P_i l_i + \sum_{i=1}^n M_i + \\ 0.5 \sum_{i=1}^{n+1} (c_{i0} + c_{i1}x + c_{i2}x^2 + c_{i3}x^3)(l_i^2 - l_{i-1}^2) \end{aligned} \quad (20a)$$

将式 (14) 代入式 (20a) 得到

$$\sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} k_i b_i w_i x dx = \sum_{i=1}^n P_i l_i + \sum_{i=1}^n M_i \quad (20b)$$

根据以上连续性条件和平衡条件, 可以得到 $4n+2$ 个方程。而待定系数共有 $4n+4$ 个, 为此需要 2 个补

充方程。根据虚功原理, 图 1 所示系统的总势能

$$T = U_b + U_s + U_p, \quad (21)$$

其中, U_b 和 U_s 分别为梁和 Winkler 地基的变形能, U_p 为集中力、集中力偶和分布荷载的总势能。并且有

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^l EI (w'')^2 dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} EI_i (w'_i)^2 dx, \quad (22)$$

$$U_s = \int_0^l \frac{kbs^2}{2} dx = \int_0^l \frac{kbw^2}{2} dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} k_i b_i \tilde{w}_i^2 dx, \quad (23)$$

$$U_p = -\sum_{i=1}^n P_i \tilde{w}_{Ni} - \sum_{i=1}^n M_i w'_{Ni} - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{w}_i q_i(x) dx, \quad (24)$$

其中, $\tilde{w}_{Ni}$ 和 w'_{Ni} 为结点 i 的位移和转角。所以式 (21) 可以改写为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} EI_i (w'_i)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} k_i b_i \tilde{w}_i^2 dx - \sum_{i=1}^n P_i \tilde{w}_{Ni} - \sum_{i=1}^n M_i w'_{Ni} - \sum_{i=1}^{n+1} \int_{l_{i-1}}^{l_i} \tilde{w}_i (c_{i0} + c_{i1}x + c_{i2}x^2 + c_{i3}x^3) dx. \quad (25)$$

2 矩阵列式和算法

定义 4 个函数: $\alpha = e^{\lambda_i x} \cos \lambda_i x$, $\beta = e^{\lambda_i x} \sin \lambda_i x$, $\xi = e^{-\lambda_i x} \cos \lambda_i x$ 和 $\zeta = e^{-\lambda_i x} \sin \lambda_i x$ 。 α_{il} , α_{ir} , β_{il} , β_{ir} , ξ_{il} , ξ_{ir} 和 ζ_{il} , ζ_{ir} 分别为这 4 个函数在第 i 梁单元左侧截面和右侧截面的数值; α'_{il} , α'_{ir} , β'_{il} , β'_{ir} , ξ'_{il} , ξ'_{ir} 和 ζ'_{il} , ζ'_{ir} 分别为梁单元左侧截面和右侧截面的一阶导数; 类似的, 定义这 4 个函数的二阶和三阶导数。当各梁单元的长度确定后, 与各梁单元相对应的 α , β , ξ 和 ζ 以及它们的一阶、二阶和三阶导数可以计算得到。因此, 将式 (15) ~ (20) 写在一起得到

$$\{\mathbf{F}\} \{\mathbf{H}\} = \{\mathbf{E}\}, \quad (26)$$

其中, $\{\mathbf{F}\}$ 为 $(4n+2) \times (4n+4)$ 矩阵, $\{\mathbf{H}\}$ 为 $(4n+4)$ 列向量, $\{\mathbf{E}\}$ 为 $(4n+2)$ 列向量, 即

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ir} & -\mathbf{A}_{2l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{2r} & -\mathbf{A}_{3l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{ir} & -\mathbf{A}_{(i+1)l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{ir} & -\mathbf{A}_{(n+1)l} \\ \boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_2 & \boldsymbol{\psi}_3 & \dots & \boldsymbol{\psi}_i & \dots & \boldsymbol{\psi}_{n+1} \\ \boldsymbol{\Pi}_1 & \boldsymbol{\Pi}_2 & \boldsymbol{\Pi}_3 & \dots & \boldsymbol{\Pi}_i & \dots & \boldsymbol{\Pi}_{n+1} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\{\mathbf{H}\} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} & \dots & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & a_{(n+1)3} & a_{(n+1)4} \end{bmatrix}^T, \quad (28)$$

$$\{\mathbf{E}\} = \begin{bmatrix} -\frac{q_1(x)}{k_1 b_1} + \frac{q_2(x)}{k_2 b_2} & 0 & \frac{M_1}{EI_1} & -\frac{P_1}{EI_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{q_{n-1}(x)}{k_{n-1} b_{n-1}} + \frac{q_n(x)}{k_n b_n} & 0 & \frac{M_n}{EI_n} & -\frac{P_n}{EI_n} \end{bmatrix}^T, \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{q_2(x)}{k_2 b_2} + \frac{q_3(x)}{k_3 b_3} & 0 & \frac{M_2}{EI_2} & -\frac{P_2}{EI_2} & \dots \\ -\frac{q_{i-1}(x)}{k_{i-1} b_{i-1}} + \frac{q_i(x)}{k_i b_i} & 0 & \frac{M_i}{EI_i} & -\frac{P_i}{EI_i} & \dots \\ -\frac{q_{n-1}(x)}{k_{n-1} b_{n-1}} + \frac{q_n(x)}{k_n b_n} & 0 & \frac{M_n}{EI_n} & -\frac{P_n}{EI_n} & \dots \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n P_i & \sum_{i=1}^n P_i l_i & \sum_{i=1}^n M_i \end{bmatrix}^T. \quad (29)$$

式 (27) 中 $\mathbf{0}$ 为 4×4 方阵; $\mathbf{A}_{ir}$ 和 $\mathbf{A}_{(i+1)l}$ 分别为梁单元 i 右侧和梁单元 $i+1$ 左侧的变形矩阵, 即

$$\mathbf{A}_{ir} = \begin{bmatrix} \alpha_{ir} & \beta_{ir} & \xi_{ir} & \zeta_{ir} \\ \alpha'_{ir} & \beta'_{ir} & \xi'_{ir} & \zeta'_{ir} \\ \alpha''_{ir} & \beta''_{ir} & \xi''_{ir} & \zeta''_{ir} \\ \alpha'''_{ir} & \beta'''_{ir} & \xi'''_{ir} & \zeta'''_{ir} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\mathbf{A}_{(i+1)l} = \begin{bmatrix} \alpha_{(i+1)l} & \beta_{(i+1)l} & \xi_{(i+1)l} & \zeta_{(i+1)l} \\ \alpha'_{(i+1)l} & \beta'_{(i+1)l} & \xi'_{(i+1)l} & \zeta'_{(i+1)l} \\ \frac{EI_{i+1}}{EI_i} \alpha''_{(i+1)l} & \frac{EI_{i+1}}{EI_i} \beta''_{(i+1)l} & \frac{EI_{i+1}}{EI_i} \xi''_{(i+1)l} & \frac{EI_{i+1}}{EI_i} \zeta''_{(i+1)l} \\ \frac{EI_{i+1}}{EI_i} \alpha'''_{(i+1)l} & \frac{EI_{i+1}}{EI_i} \beta'''_{(i+1)l} & \frac{EI_{i+1}}{EI_i} \xi'''_{(i+1)l} & \frac{EI_{i+1}}{EI_i} \zeta'''_{(i+1)l} \end{bmatrix}; \quad (31)$$

$\boldsymbol{\psi}_i$ 为地基对梁单元 i 的反力行向量, 即

$$\boldsymbol{\psi}_i = \left[\int_{l_{i-1}}^{l_i} \alpha dx \quad \int_{l_{i-1}}^{l_i} \beta dx \quad \int_{l_{i-1}}^{l_i} \xi dx \quad \int_{l_{i-1}}^{l_i} \zeta dx \right]; \quad (32)$$

$\boldsymbol{\Pi}_i$ 为梁单元 i 的力矩行向量, 即与梁单元 i 对应的地基反力行向量在梁左端产生的力矩,

$$\boldsymbol{\Pi}_i = \left[\int_{l_{i-1}}^{l_i} \alpha x dx \quad \int_{l_{i-1}}^{l_i} \beta x dx \quad \int_{l_{i-1}}^{l_i} \xi x dx \quad \int_{l_{i-1}}^{l_i} \zeta x dx \right]. \quad (33)$$

方程组 (26) 共有 $4n+2$ 个方程, 未知数 a_{ij} 有 $4n+4$ 个, 因此通过求解方程组 (26) 可以将所有未知数表示为其中两个未知数的函数, 比如表示为 a_{11} 和 a_{12} 的函数, 即

$$a_{ij} = f_{ij}(a_{11}, a_{12}), \quad (34)$$

故式 (25) 可以表示为 a_{11} 和 a_{12} 的函数, 即

$$T = g(a_{11}, a_{12}). \quad (35)$$

根据最小势能原理得到

$$\frac{\partial T}{\partial a_{11}} = 0, \quad (36a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial a_{12}} = 0. \quad (36b)$$

求解方程组 (36) 可以得到未知数 a_{11} 和 a_{12} , 代回式 (34), 其余未知数 a_{ij} 可以求出。将 a_{ij} 代入式 (12), 可以得到沿梁长方向各梁单元的沉降位移曲线和地基沉降量分布; 乘以 $k_i b_i$ 可以得到地基反力分

布。然后, 对式 (12) 求关于 x 的一阶导数, 可以得到沿梁长方向各点的转角分布; 求二阶和三阶导数, 并乘以 $-EI_i$, 可以得到弯矩和剪力。

3 与一般有限元方法的比较

地基梁的一般有限元图式如图 2 所示。

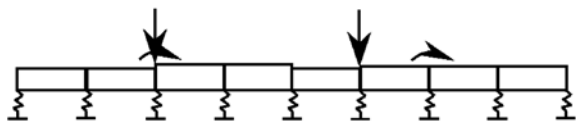


图 2 Winkler 地基梁的一般有限元法

Fig. 2 The common FEM for beams on Winkler foundation

第一步, 单元划分和结点编号。

第二步, 在每个结点下分别设置一根弹簧, 弹簧力代表该结点对应的基底总反力, 弹簧刚度为对应基底面积的集中基床系数, 弹簧压缩变形代表此处的地基沉降, 并等于梁上相应结点的竖向位移。

第三步, 根据位移法原理建立梁单元的刚度矩阵, 并按照对号入座的原则得到梁的总刚度矩阵, 设梁单元的长度为 l_e , 则梁单元的刚度矩阵为

$$[k]_e = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ 6l_e & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ -12 & -6l_e & 12 & -6l_e \\ 6l_e & 2l_e^2 & -6l_e & 4l_e^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

第四步, 将梁的刚度矩阵与弹簧的刚度矩阵组装成地基上梁的刚度矩阵, 在此过程中定义地基只能承受竖向集中力荷载而不能抵抗弯矩。

第五步, 根据结点力、集中基底反力和结点荷载之间的平衡关系, 建立方程组并求解, 从而可以直接得到各单元的变形量也即位移和转角。

第六步, 根据各梁单元杆端力与杆端位移的关系, 求杆端弯矩和剪力, 并进而可以求任意截面的内力。

与一般有限元方法比较后可以发现, 本方法有以下一些不同之处:

(1) 在建立平衡关系时充分利用了单元间的协调条件, 包括位移、转角、弯矩和剪力连续性条件; 一般有限元方法没有考虑剪力平衡条件。

(2) 一般有限元方法将地基反力等效为集中力施加于结点, 含糊了地基梁是一个连续弹性体的事实, 只能得到 $2n+4$ 个方程 (n 为结点数), 与本法得到的 $4n+2$ 个方程相比, 精度要低一些。

(3) 本文方法能施加多种类型荷载, 包括集中力荷载、集中力偶荷载和任意形式的分布荷载; 一般有限元方法在考虑分布荷载时, 只能将其转化为结点集中力荷载。

(4) 能直接得到位移、转角、弯矩和剪力的解析表达式; 一般有限元方法只能得到位移和转角的数值, 至于弯矩和剪力, 则需要根据杆端力与杆端位移的关系进一步计算。

(5) 由于依然将地基作为连续的弹性体, 因此只要在梁宽变化截面、梁刚度变化截面、基床系数变化截面、集中力或集中力偶作用点、分布荷载 (三次多项式形式) 的起始位置将梁划分为若干单元, 就能得到精确解; 一般有限元方法, 由于以弹簧刚度即所谓的集中基床系数来代替一定受压面积地基的基床系数, 所以其精度受单元划分粗细程度的控制, 即单元划分越细, 精度越高。

4 算例分析

某梁, 搁置在 Winkler 地基上, 如图 3 所示。

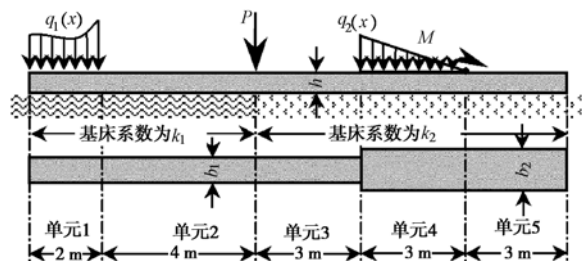


图 3 算例计算模型及单元划分

Fig. 3 Calculation model and its element construction for an example

该梁长 $l=15$ m。在 $0 \sim 9$ m 处, 梁宽 $b_1=1$ m; 在 $9 \sim 15$ m 处, 梁宽 $b_2=1.2$ m。梁高 $h=0.6$ m。弹性模量 $E=3 \times 10^{10}$ Pa。所以, 在 $0 \sim 9$ m 处, 梁的抗弯刚度 $EI_1=5.4 \times 10^8$ Pa·m⁴; 在 $9 \sim 15$ m 处, 梁的抗弯刚度 $EI_2=6.48 \times 10^8$ Pa·m⁴。在 $0 \sim 6$ m 处, 地基基床系数 $k_1=20$ MN·m⁻³; 在 $6 \sim 15$ m 处, 地基基床系数 $k_2=30$ MN·m⁻³。集中力 $P=1 \times 10^6$ N, 作用在 6 m 截面处; 集中力偶 $M=2 \times 10^6$ N·m, 作用在 12 m 截面处; 在 $(x_1, x_2)=(0, 2)$ 范围内, 作用有分布力荷载

$$q_1(x) = 50000x \cos(3x)e^x + 1000000 \quad (38)$$

在 $(x_3, x_4)=(9, 12)$ 范围内, 作用有三角形分布力荷载 q_2 , 其表达式为

$$q_2(x) = (36 - 3x) \times 10^5 \quad (39)$$

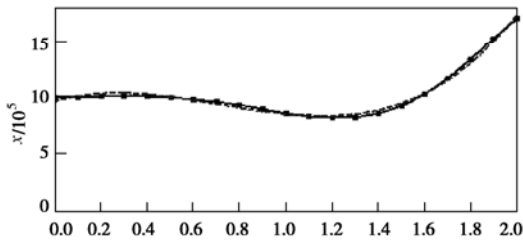
求此地基梁沉降、转角及受到的弯矩和剪力。

首先, 用三次多项式对式 (38) 进行拟合, 最小二乘法得到的拟合方程为

$$q_1^*(x) = (968 + 563x - 1270x^2 + 591x^3) \times 10^3 \quad (40)$$

方程 (38) 与拟合方程 (40) 的关系如图 4 所示。

实线和虚线分别表示方程 (38) 和 (40)。

图4 分布力荷载 q_1 及其三次多项式拟合Fig. 4 Distributing load of q_1 and corresponding cubic polynomial fitting

将结构划分为 5 个梁单元（如果采用一般有限元方法，则需要划分为更多单元），如图 3 所示。按照本文提出的方法，得到在图 3 所示复杂状态下，各梁单元的沉降位移分别为

单元 1: $0 \text{ m} \leq x < 2 \text{ m}$, $\lambda_1 = 0.3102$,

$$\tilde{w}_1 = w_1 + w_1^* =$$

$$e^{\lambda_1 x} (0.7104 \cos \lambda_1 x - 0.4414 \sin \lambda_1 x) + e^{-\lambda_1 x} (-0.7168 \cos \lambda_1 x - 1.1013 \sin \lambda_1 x) + 0.0484 + 0.0282x - 0.0635x^2 + 0.0296x^3; \quad (41a)$$

单元 2: $2 \text{ m} \leq x < 6 \text{ m}$, $\lambda_2 = 0.3102$,

$$\tilde{w}_2 = w_2 =$$

$$e^{\lambda_2 x} (0.0005742 \cos \lambda_2 x + 0.001490 \sin \lambda_2 x) + e^{-\lambda_2 x} (0.03990 \cos \lambda_2 x + 0.02205 \sin \lambda_2 x); \quad (41b)$$

单元 3: $6 \text{ m} \leq x < 9 \text{ m}$, $\lambda_3 = 0.3433$,

$$\tilde{w}_3 = w_3 =$$

$$e^{\lambda_3 x} (-0.000170 \cos \lambda_3 x + 0.000092 \sin \lambda_3 x) + e^{-\lambda_3 x} (-0.03301 \cos \lambda_3 x + 0.05682 \sin \lambda_3 x); \quad (41c)$$

单元 4: $9 \text{ m} \leq x < 12 \text{ m}$, $\lambda_4 = 0.3433$,

$$\tilde{w}_4 = w_4 + w_4^* =$$

$$e^{\lambda_4 x} (0.0001199 \cos \lambda_4 x - 0.0002094 \sin \lambda_4 x) + e^{-\lambda_4 x} (0.3611 \cos \lambda_4 x - 0.1044 \sin \lambda_4 x) + 0.1 - 0.0083x; \quad (41d)$$

单元 5: $12 \text{ m} \leq x < 15 \text{ m}$, $\lambda_5 = 0.3433$,

$$\tilde{w}_5 = w_5 =$$

$$e^{\lambda_5 x} (0.0000062 \cos \lambda_5 x - 0.0000133 \sin \lambda_5 x) + e^{-\lambda_5 x} (0.1768 \cos \lambda_5 x - 0.4304 \sin \lambda_5 x). \quad (41e)$$

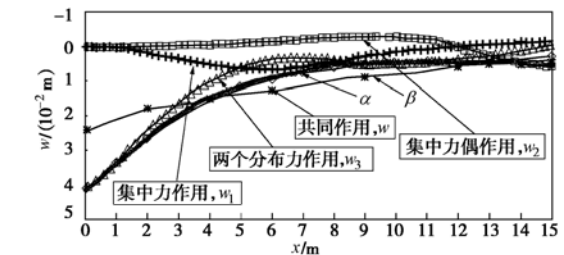
根据式 (41) 可以得到完整的沉降位移曲线，根据转角、弯矩和剪力与沉降位移曲线之间的导数关系，可以得到任意截面的转角、弯矩和剪力分布。计算结果如图 5 所示。

作为算例，图 5 还标注了图 3 所示结构在各荷载独自作用时的位移、转角、弯矩和剪力。其中，集中力 P 单独作用、集中力偶 M 单独作用、两个分布力 (q_1 、 q_2) 单独作用、以及所有荷载共同作用条件下，对应的沉降位移分布分别以 w_1 , w_2 , w_3 , w 表示。转角、弯矩和剪力也采用类似的标注办法。

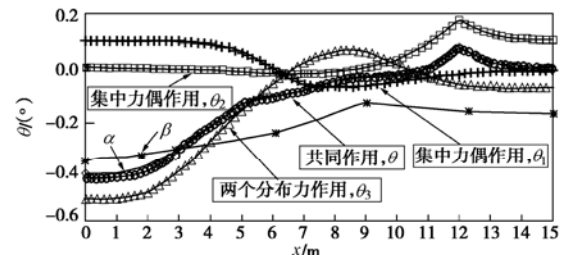
为了与一般普通有限元方法进行比较，笔者用图 2 所示方法对图 3 算例进行了计算。计算采用了两种

单元划分方法：方法 1 是将图 3 所示结构划分为 15 个等长的梁单元，每个梁单元长度为 1 m；方法 2 的单元划分方法与本单元划分方法一样，即划分为长度分别为 2, 4, 3, 3 和 3 m 的 5 个不等长度的单元。各弹簧等效刚度按式 $K_i = k_i f_i$ 确定，其中 f_i 为各弹簧对应的地基面积。计算时需要将两个分布荷载转换为等效结点力荷载。两种单元划分方法对应的结点荷载和弹簧刚度分别见表 2 中的对应部分。

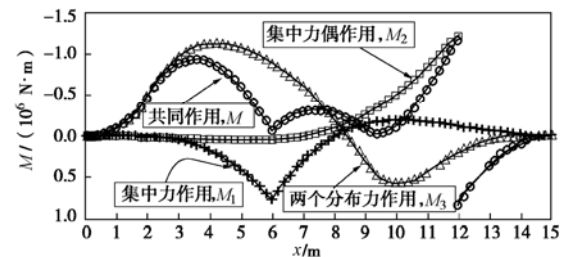
两种单元划分方法的一般有限元计算结果也表示在图 5 中，并以曲线“★---”表示。其中曲线 α 表示方法 1 单元划分方法得到的计算结果；曲线 β 为方法 2 单元划分方法得到的计算结果。这里只计算了沉降位移和转角沿梁长的分布，至于弯矩和剪力，则需要根据杆端力与杆端位移之间的关系进行求解。



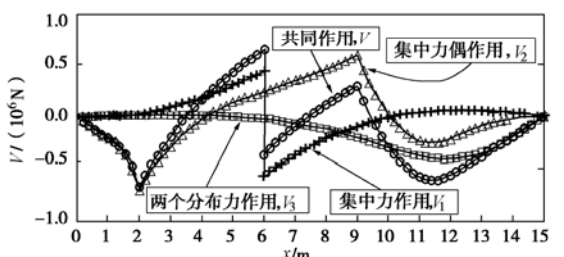
(a) 沉降位移沿梁长的分布



(b) 转角沿梁长的分布



(c) 弯矩沿梁长的分布



(d) 剪力沿梁长的分布

图5 复杂条件下 Winkler 地基梁计算示例及与一般有限元方法的比较

Fig. 5 Computed results of a beam on Winkler foundation under complex conditions

显而易见, 本文的单元划分方法仅仅由集中力的个数、集中力偶的个数、分布荷载的位置、地基梁的截面特征和弹性模量、以及地基基床系数变化与否确定。综合考虑这些因素, 进行单元划分, 就可以得到精确解答, 而无须过密的单元划分方案。一般有限元方法的计算精度, 则在很大程度上取决于单元划分的粗细程度, 一般来说, 网格越密, 结果越精确。

表 2 一般有限元方法的结点荷载和弹簧刚度计算

Table 2 Construction of beam elements and corresponding parameters for beams on Winkler foundation						
结点	结点力/(10 ⁵ N)		结点力偶/(10 ⁵ N·m)		K _i /(MN·m ⁻¹)	
	方法 1	方法 2	方法 1	方法 2	方法 1	方法 2
1	5.04	9.76			10	20
2	8.96	10.63			20	60
3	6.40	10.00			20	85
4		10.13		20	20	99
5		3.38			20	108
6					20	54
7	10.00				25	
8					30	
9					30	
10	4.13				33	
11	6.00				36	
12	3.00				36	
13	0.38		20		36	
14					36	
15					36	
16					18	

5 结 语

提出了计算 Winkler 地基梁的一种新方法。首先基于有限单元原理, 以集中力、集中力偶、任意分布荷载的起点和终点、梁抗弯刚度变化处截面、梁宽度改变处截面以及基床系数改变处截面将地基梁划分为若干梁单元。然后利用地基梁各单元间的位移和转角连续性条件、弯矩和剪力协调性条件, 地基梁在上部外加荷载和地基反力作用下的平衡方程, 建立了以变形矩阵、反力行向量和力矩行向量表达的连续性条件和平衡方程。最后用最小势能原理(虚功原理)确定未知参数。本文提出的方法虽然在概念上属于有限元方法的一种, 但划分单元的方法与一般有限元方法存在本质差别。

根据本文算法, 能同时考虑 Winkler 地基梁受多

种荷载类型作用, 包括集中力荷载、集中力偶荷载和任意形式的分布荷载; 能同时考虑梁截面沿梁长的变化、抗弯刚度沿梁长的变化、地基基床系数沿梁长的变化。并且能得到梁单元以至整个地基梁沉降位移的解析解答; 进一步地, 可以根据转角、弯矩和剪力与沉降位移曲线之间的导数关系, 得出各自相应的方程表达式。

参考文献:

[1] BOWLES Joseph E. Foundation analysis and design[M]. New York McGraw-Hill Companies, Inc, 1996.

[2] 顾晓鲁, 钱鸿缙, 刘惠珊, 等. 地基与基础[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2003. (GU Xiao-lu, QIAN Hong-jin, LIU Hui-shan, et al. Ground and foundation[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2003. (in Chinese))

[3] 刘红军, 齐 鑫, 王秀海, 等. 预应力锚杆肋梁在深基坑支护中的应用[J]. 工程地质学报, 2005, 13(4): 568 - 572. (LIU Hong-jun, QI Xin, WANG Xiu-hai, et al. Application of pre-stressed anchor-rod cross coupling in supporting deep foundation pit[J]. Journal of Engineering Geology, 2005, 13(4): 568 - 572. (in Chinese))

[4] 吴 文, 徐松林, 周劲松, 等. 深基坑桩锚支护结构受力和变形特性研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2001, 20(3): 399 - 402. (WU Wen, XU Song-lin, ZHOU Jin-song, et al. Studies of force and deformation properties considering pile-anchor-soil interaction in deep pits[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2001, 20(3): 399 - 402. (in Chinese))

[5] HETENYI M. Beams on elastic foundation[M]. Michigan Ann Arbor: University of Michigan Press, 1946.

[6] 张鸿儒, 阎贵平, 夏 禾, 等. 弹性地基梁单元的等效结点荷载[J]. 北方交通大学学报, 1996, 20(5): 522 - 526. (ZHANG Hong-ru, YAN Gui-ping, XIA He, et al. Equivalent nodal loads for winkler beams on elastic foundations[J]. Journal of Northern Jiaotong University, 1996, 20(5): 522 - 526. (in Chinese))