

考虑剪切刚度系数变化的单桩弹塑性解

王旭东^{1,2}, 刘宇翼², 宰金珉², 诸宏博²

(1. 河海大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210098; 2. 南京工业大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210009)

摘要: 以桩侧土和桩端土分别采用弹性-全塑性和双线性硬化荷载传递函数为基础, 推导了轴向荷载作用下考虑桩侧极限摩阻力和剪切刚度系数随深度线性变化的单桩弹塑性解析解, 得到了荷载-沉降、桩身位移、轴力等计算公式。该方法能更好地反映摩擦桩和端承摩擦桩的荷载传递规律, 并可通过试桩资料的反分析, 以及结合土工试验和地质勘察资料确定合理的计算参数, 计算结果与工程试桩结果间良好的一致性验证了该方法的合理性。

关键词: 单桩; 荷载传递函数; 极限摩阻力; 剪切刚度系数; 弹塑性解

中图分类号: TU473 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-4548(2007)12-1758-05

作者简介: 王旭东(1963-), 男, 江苏武进人, 博士研究生, 教授, 主要研究方向为桩基工程, 基坑工程。E-mail: cewxd@njut.edu.cn。

Elastic-plastic solution for axially loaded single pile considering variation of shear stiffness coefficient

WANG Xu-dong^{1,2}, LIU Yu-yi², ZAI Jin-min², ZHU Hong-bo²

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Institute of Geotechnical Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)

Abstract: Based on elastic - perfectly plastic and bilinear load transfer functions for soil surrounding the pile shaft and under the pile tip respectively, a closed analytical solution was presented for predicting nonlinear response of axially loaded piles, considering that the limited shaft resistance and the shear stiffness coefficient varied linearly with depth. The load and settlement responses, the distribution of displacements, axial load and shaft resistance were obtained, and the performance of load transfer behavior of a single pile was determined. The reasonable model parameters could be determined by the back analysis of single pile loading tests and soil tests. The rationality of the proposed method was proved by the good agreement between the computed results and the measured data of load tests on in situ piles.

Key words: single pile; load transfer function; limited shaft resistance; shear stiffness coefficient; elastic-plastic solution

0 引言

轴向荷载下单桩的荷载-沉降分析方法通常有基于半无限均质弹性体的 Mindlin 解、剪切位移法、荷载传递函数法、有限单元法等四种。其中, 荷载传递函数法是采用最广泛的一种分析方法, 它可以考虑桩土的非线性和非均质性。许多研究学者根据桩的现场实测试验提出了不同荷载传递函数, 但绝大多数函数较复杂, 无法由桩的荷载传递基本微分方程求得问题的解析解, 需要采用位移协调法求解, 给工程应用带来诸多不便。Kezdi、佐藤悟等提出了将荷载传递函数简化为某种简单方程, 直接求解平衡微分方程的方法。目前, 常用的传递函数有双折线函数、双曲线函数、指数函数等^[1], 其中, 双折线模型由于比较简单得到了国内外学者的广泛研究。曹汉志提出了用桩尖位移等值法来计算桩的荷载-沉降曲线^[2]; 罗惟德提出了

模拟桩周土约束的全深度-变深度剪切弹簧模型, 并推导了荷载-沉降曲线方程^[3]; Motta 以超长摩擦桩为研究对象, 提出了考虑桩侧极限摩阻力随深度线性变化, 而桩侧土体的剪切刚度系数是常数的弹性全塑性解析解^[4]; 陈龙珠假设桩侧土和桩端土为双折线硬化模型, 推导出一组计算桩的荷载-沉降曲线的解析式^[5]; 陈明中研究了桩侧土和桩端土采用不同传递函数时, 考虑桩侧极限摩阻力随深度线性变化, 而剪切刚度系数为常数时的解析解^[6]; 洪鑫等人进一步提出了考虑软化的双线性荷载传递函数单桩荷载沉降关系统一解^[7]。然而, 根据土的基本性质以及大量的现场试验发现, 土在正常固结或超固结条件下, 其强度和刚

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50478005)

收稿日期: 2006-11-07

度都随深度的增加而提高, 现场桩基的荷载试验也反映了桩侧极限摩阻力和剪切刚度系数随深度而变化的特性^[8-9]。因此在考虑桩侧极限摩阻力随深度变化的同时, 尚需考虑桩侧土体剪切刚度系数随深度的变化, 从而能更加合理地反映不同深度处桩侧摩阻力的发挥过程, 有效地模拟单桩荷载传递规律。

本文在上述研究工作的基础上, 考虑了桩侧极限摩阻力和剪切刚度系数分别随深度线性变化, 推导了基于桩侧土和桩端土分别采用弹性-全塑性和双折线硬化荷载传递函数的单桩弹塑性解析解, 以期更好地模拟单桩的荷载传递工作性状。

1 桩的荷载传递模式

对于摩擦桩和端承摩擦桩, 一般情况下桩身上部土层的侧摩阻力先于下部土层发挥, 且桩侧摩阻力先于桩端阻力发挥, 故认为桩侧土体塑性区由上而下逐渐发展。

基本假设:

(1) 桩体为弹性, 桩身截面为常数, 不随深度变化而变化。

(2) 桩侧土采用弹性-全塑性模型, 图 1 (a) 给出了不同深度处的 $\tau-w$ 曲线, 其中, τ_{fi} 为深度 z_i 处桩身的极限摩阻力, w_{ui} 为 z_i 处桩侧摩阻力完全发挥所需的桩身极限位移, k_{si} 为 z_i 处剪切刚度系数。

(3) 桩端土采用双折线硬化模型, 见图 1 (b), k_{b1} 为桩端土体弹性阶段的抗压刚度系数, k_{b2} 为硬化阶段的抗压刚度系数, w_{ub} 为桩端土体弹性极限位移。

(4) 桩侧极限摩阻力随深度线性增加, 见图 1 (c), 其中, τ_0 为桩顶处桩侧极限摩阻力, α 为桩侧极限摩阻力随深度变化系数。

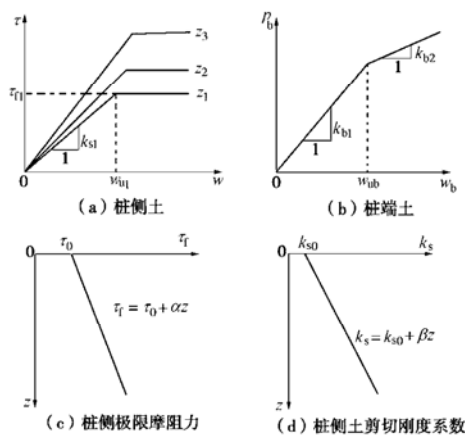


图 1 桩土体系简化力学模型

Fig. 1 Simplified mechanical model of pile-soil system

(5) 桩侧土的剪切刚度系数随深度线性增加, 见图 1 (d), 其中, k_{s0} 为桩顶处桩侧土剪切刚度系数, β 为剪切刚度系数随深度变化系数。

桩在竖向荷载作用下, 荷载通过桩侧摩阻力向土中传递, 桩产生竖向位移。若桩顶位移小于桩顶处桩侧极限摩阻力完全发挥所需位移——极限位移 w_u , 则桩侧土体都处于弹性状态; 随着荷载的增加, 当桩身位移大于相应的桩侧土体极限位移时, 从桩顶开始桩侧部分区域 (a-b) 土体进入塑性状态, 并随着荷载的增加而不断向下发展。图 2 表示了在桩顶轴向荷载 P_t 作用下, 桩侧土体塑性区 (a-b) 和弹性区 (b-c) 沿桩身的分布, b 点表示塑性区和弹性区的分界点。 z_{cr} 为塑性区的分布范围, 随 P_t 的增加而扩大。

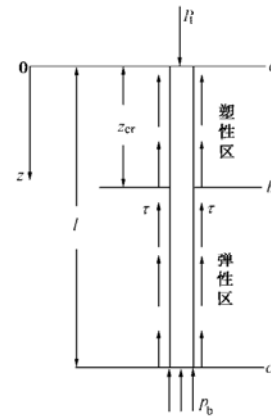


图 2 桩侧土塑性区和弹性区

Fig. 2 Plastic state and elastic state in soil

根据桩侧极限摩阻力和剪切刚度系数随深度线性变化的特点, 桩侧荷载传递函数取为

$$\tau = \begin{cases} (k_{s0} + \beta z)w & (w \leq w_u) \\ \tau_0 + \alpha z & (w \leq w_u) \end{cases} \quad (1)$$

则桩身任一深度 z 处的极限位移

$$w_u = \frac{\tau_f}{k_s} = \frac{\tau_0 + \alpha z}{k_{s0} + \beta z} \quad (2)$$

当 $\alpha k_{s0} - \beta \tau_0 = 0$ 时, $w_u = \tau_0 / k_{s0}$, 为常数; 当 $\alpha k_{s0} - \beta \tau_0 > 0$ 时, w_u 随深度增加而增大。本文方法在上述两种情况下适用。

由式 (2) 可知, 在 $z = z_{cr}$ 处, $w_{cr} = \frac{\tau_0 + \alpha z_{cr}}{k_{s0} + \beta z_{cr}}$ 。

2 桩弹塑性解

2.1 桩身位移微分方程

在桩身上任取一微段, 由静力平衡条件建立的桩身位移微分方程为

$$\left. \begin{aligned} E_p A \frac{d^2 w}{dz^2} &= u_p (\tau_0 + \alpha z) & (0 \leq z \leq z_{cr}) \\ E_p A \frac{d^2 w}{dz^2} &= u_p (k_{s0} + \beta z) w & (z_{cr} < z \leq l) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中, w 为桩身位移, E_p 为桩身弹性模量, u_p 为桩截面周长, A 为桩身截面积。

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} -E_p A \frac{dw}{dz} \Big|_{z=0} &= P_t \\ w \Big|_{z=z_{cr}} &= w_{cr} \\ -E_p A \frac{dw}{dz} \Big|_{z=l} &= k_{b1} A w \Big|_{z=l} \quad (w \leq w_{ub}) \\ -E_p A \frac{dw}{dz} \Big|_{z=l} &= k_{b1} A w_{ub} + k_{b2} A (w \Big|_{z=l} - w_{ub}) \quad (w > w_{ub}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

结合边界条件, 求解位移微分方程便可得到单桩弹塑性解。

2.2 桩侧土、桩端土均处于弹性状态

当桩顶荷载较小时, 桩侧土和桩端土都处于弹性状态, 由式 (3), (4) 可以求得桩身的位移 w 、轴力 N 、侧阻力 τ 的表达式为

$$w(z) = -\frac{P_t}{\zeta} \cdot \frac{m \text{Ai}(k_{s0}^* + \beta^* z) + \text{Bi}(k_{s0}^* + \beta^* z)}{m \text{Ai}'(k_{s0}^*) + \text{Bi}'(k_{s0}^*)} \quad (5a)$$

$$N(z) = P_t \cdot \frac{m \text{Ai}'(k_{s0}^* + \beta^* z) + \text{Bi}'(k_{s0}^* + \beta^* z)}{m \text{Ai}'(k_{s0}^*) + \text{Bi}'(k_{s0}^*)} \quad (5b)$$

$$\tau(z) = (k_{s0} + \beta z) w(z) \quad (5c)$$

其中, $\eta = (u_p / E_p A \beta^2)^{1/3}$, $\zeta = E_p A \beta \eta$, $\beta^* = \eta \beta$, $k_{s0}^* = \eta k_{s0}$, Ai , Bi 为第一类和第二类 Airy 函数^[10], Ai' , Bi' 为 Ai , Bi 的一阶导数,

$$m = -\frac{\zeta \text{Bi}'(k_{s0}^* + \beta^* l) + A k_{b1} \text{Bi}(k_{s0}^* + \beta^* l)}{\zeta \text{Ai}'(k_{s0}^* + \beta^* l) + A k_{b1} \text{Ai}(k_{s0}^* + \beta^* l)}$$

由 (5a) 式可得, 桩顶位移 w_t 与桩顶荷载 P_t 的关系为

$$w_t = -\frac{P_t}{\zeta} \cdot \frac{m \text{Ai}(k_{s0}^*) + \text{Bi}(k_{s0}^*)}{m \text{Ai}'(k_{s0}^*) + \text{Bi}'(k_{s0}^*)} \quad (6)$$

式中, ζ , k_{s0}^* , m 均为常数, 故可知 w_t 与 P_t 成线性关系。

2.3 桩侧土部分进入塑性状态, 桩端土处于弹性状态

在一定荷载作用下, 桩身位移大于相应的 w_u 时, $0 \leq z \leq z_{cr}$ 段, 桩侧土进入塑性状态; 而 $z_{cr} < z \leq l$ 段, 桩侧土体仍处于弹性状态, 如图 2 所示。

由式 (3), (4) 可分别求得塑性区的桩身位移 w_1 、轴力 N_1 、侧阻力 τ_1 , 以及弹性区桩身位移 w_2 、轴力 N_2 、侧阻力 τ_2 的表达式为

$$\begin{aligned} w_1(z) &= \frac{u_p \alpha}{6 E_p A} (z^3 - z_{cr}^3) + \frac{u_p \tau_0}{2 E_p A} (z^2 - z_{cr}^2) - \\ &\quad \frac{P_t}{E_p A} (z - z_{cr}) + w_{cr} \quad (7a) \end{aligned}$$

$$N_1(z) = -\frac{u_p \alpha}{2} z^2 - u_p \tau_0 z + P_t \quad (7b)$$

$$\tau_1(z) = \tau_0 + \alpha z \quad (7c)$$

$$w_2(z) = w_{cr} \cdot \frac{m \text{Ai}(k_{s0}^* + \beta^* z) + \text{Bi}(k_{s0}^* + \beta^* z)}{m \text{Ai}(k_{s0}^* + \beta^* z_{cr}) + \text{Bi}(k_{s0}^* + \beta^* z_{cr})} \quad (8a)$$

$$N_2(z) = -\zeta w_{cr} \cdot \frac{m \text{Ai}'(k_{s0}^* + \beta^* z) + \text{Bi}'(k_{s0}^* + \beta^* z)}{m \text{Ai}'(k_{s0}^* + \beta^* z_{cr}) + \text{Bi}'(k_{s0}^* + \beta^* z_{cr})} \quad (8b)$$

$$\tau_2(z) = (k_{s0} + \beta z) w_2(z) \quad (8c)$$

由式 (7a) 可得, 桩顶位移和桩顶荷载的关系为

$$w_t = \frac{P_t}{E_p A} z_{cr} - \frac{u_p \tau_0}{2 E_p A} z_{cr}^2 - \frac{u_p \alpha}{6 E_p A} z_{cr}^3 + w_{cr} \quad (9)$$

根据 b 点处的轴力平衡条件, $N_1(z_{cr}) = N_2(z_{cr})$, 化简可得

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{u_p \alpha}{2} z_{cr}^2 + u_p \tau_0 z_{cr} - \zeta \frac{\tau_0 + \alpha z_{cr}}{k_{s0} + \beta z_{cr}} \cdot \\ &\quad \frac{m \text{Ai}'(k_{s0}^* + \beta^* z_{cr}) + \text{Bi}'(k_{s0}^* + \beta^* z_{cr})}{m \text{Ai}(k_{s0}^* + \beta^* z_{cr}) + \text{Bi}(k_{s0}^* + \beta^* z_{cr})} \quad (10) \end{aligned}$$

上式即为 z_{cr} 与 P_t 的关系式。在已知一定的轴向荷载下, 可求得 z_{cr} , 然后将 z_{cr} 代入上述计算公式, 便可求得任一深度处的桩身位移、轴力、侧阻力。

2.4 桩侧土全塑性, 桩端土处于弹性状态

当桩顶荷载增加到一定程度时, 桩侧土体全部达到极限状态, 可分别得到桩身位移 w 、轴力 N 、侧阻力 τ 的表达式为

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{u_p \alpha}{6 E_p A} (z^3 - l^3) + \frac{u_p \tau_0}{2 E_p A} (z^2 - l^2) - \\ &\quad \frac{P_t}{E_p A} (z - l) - \frac{u_p \alpha l^2}{2 k_{b1} A} - \frac{u_p \tau_0 l}{k_{b1} A} + \frac{P_t}{k_{b1} A} \quad (11a) \end{aligned}$$

$$N(z) = -\frac{u_p \alpha}{2} z^2 - u_p \tau_0 z + P_t \quad (11b)$$

$$\tau(z) = \tau_0 + \alpha z \quad (11c)$$

由式 (11a) 可得, 桩顶位移与桩顶荷载的关系为

$$\begin{aligned} w_t &= -\frac{u_p \alpha}{6 E_p A} l^3 - \left(\frac{u_p \tau_0}{2 E_p A} + \frac{u_p \alpha}{2 k_{b1} A} \right) l^2 + \\ &\quad \left(\frac{P_t}{E_p A} - \frac{u_p \tau_0}{k_{b1} A} \right) l + \frac{P_t}{k_{b1} A} \quad (12) \end{aligned}$$

2.5 桩侧土全塑性, 桩端土处于硬化阶段

当桩端位移 $w_b > w_{ub}$ 时, 桩端土进入塑性硬化状态, 可分别得到桩身位移 w 、轴力 N 、侧阻力 τ 的表达式为

$$w(z) = \frac{u_p \alpha}{6E_p A} (z^3 - l^3) + \frac{u_p \tau_0}{2E_p A} (z^2 - l^2) - \frac{P_t}{E_p A} (z - l) + \frac{P_t - u_p \alpha l^2 / 2 - u_p \tau_0 l - (k_{b1} - k_{b2}) A w_{ub}}{k_{b2} A}, \quad (13a)$$

$$N(z) = -\frac{u_p \alpha}{2} z^2 - u_p \tau_0 z + P_t, \quad (13b)$$

$$\tau(z) = \tau_0 + \alpha z. \quad (13c)$$

由式 (13a) 可得, 桩顶位移与桩顶荷载的关系为

$$w_t = -\frac{u_p \alpha}{6E_p A} l^3 - \left(\frac{u_p \tau_0}{2E_p A} + \frac{u_p \alpha}{2k_{b2} A} \right) l^2 + \left(\frac{P_t}{E_p A} - \frac{u_p \tau_0}{k_{b2} A} \right) l + \frac{P_t - (k_{b1} - k_{b2}) A w_{ub}}{k_{b2} A}. \quad (14)$$

2.6 临界荷载

桩侧土开始进入塑性区时的桩顶临界荷载 P_{cr1} ,

可取 $z_{cr}=0$, 由式 (10) 求得

$$P_{cr1} = -\frac{\zeta \tau_0}{k_{s0}} \cdot \frac{m \text{Ai}'(k_{s0}^*) + \text{Bi}'(k_{s0}^*)}{m \text{Ai}(k_{s0}^*) + \text{Bi}(k_{s0}^*)}. \quad (15)$$

桩侧土完全进入塑性区时的桩顶临界荷载 P_{cr2} ,

可取 $z_{cr}=l$, 由式 (10) 求得

$$P_{cr2} = \frac{u_p \alpha}{2} l^2 + u_p \tau_0 l - \frac{\zeta(\tau_0 + \alpha l)}{k_{s0} + \beta l} \cdot \frac{m \text{Ai}'(k_{s0}^* + \beta^* l) + \text{Bi}'(k_{s0}^* + \beta^* l)}{m \text{Ai}(k_{s0}^* + \beta^* l) + \text{Bi}(k_{s0}^* + \beta^* l)}. \quad (16)$$

由式 (11b) 可得桩端土进入塑性硬化阶段时的桩顶临界荷载

$$P_{cr3} = \frac{u_p \alpha}{2} l^2 + u_p \tau_0 l + k_{b1} w_{ub} A. \quad (17)$$

在已知桩顶轴向荷载 P_t 下, 首先根据 P_t 与 P_{cr1} , P_{cr2} , P_{cr3} 大小关系来判断桩所处的受力状态, 然后分别可采用 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 节给出的公式进行计算分析。

3 算 例

(1) 文献[9]给出了日本某桥梁基础工程采用的 $\phi 508 \times 9$ 的开口钢管桩的单桩实测结果。桩长 l 为 14.6 m, 桩身材料弹性模量 $E_p = 2.1 \times 10^5$ MPa, 考虑量测保护层后的净截面积 $A = 0.0164$ m², 外周长 $u_p = 2.2$ m。根据场地土层条件、不同深度的 $\tau - w$ 曲线以及拟合分析, 确定土层计算参数为: $\tau_0 = 85$ kPa, $\alpha = 2$ kPa/m, $k_{s0} = 2 \times 10^4$ kN/m³, $\beta = 100$ kN/m⁴, $k_{b1} = 4.9 \times 10^6$ kN/m³, $k_{b2} = 1.5 \times 10^6$ kN/m³, $w_{ub} = 8$ mm。

由于同时考虑了桩侧极限摩阻力和剪切刚度系数随深度线性变化, 合理地反映不同深度处桩侧摩阻力的发挥过程。由图 3~5 分别给出的荷载 - 沉降、桩身轴力和桩侧摩阻力的计算结果和实测结果对比可知,

两者间都具良好的一致性。

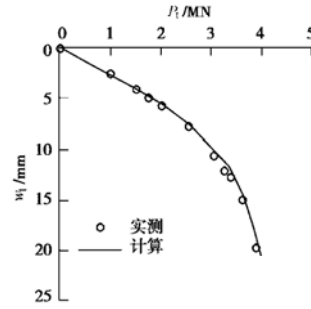


图 3 荷载 - 沉降曲线

Fig. 3 Load-settlement curve of piles

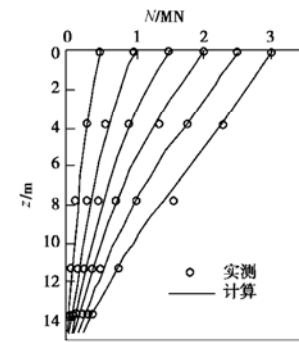


图 4 桩身轴力分布

Fig. 4 Load distribution with depth of piles

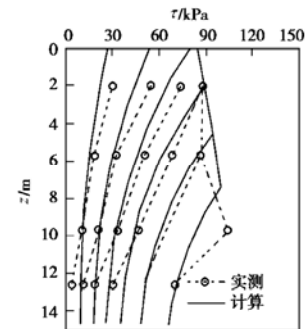


图 5 桩周侧阻力分布

Fig. 5 Distribution of lateral friction with depth of piles

(2) 文献[9]给出了日本关西地区软弱地基中开口钢管摩擦桩的试验资料。桩型分 A 型和 B 型两种, 桩径分别为 $\phi 500 \times 9$ 和 $\phi 355.6 \times 6.5$, 桩长 l 均为 32 m, 桩身材料弹性模量 $E_p = 2.1 \times 10^5$ MPa。考虑量测保护层后 A 型和 B 型桩的外周长分别为 2.17 m, 1.42 m, 由场地土层条件、不同深度处土层的 $\tau - w$ 试验曲线以及对 A 桩实测数据的拟合分析, 确定的土层计算参数如下: $\tau_0 = 0$ kPa, $\alpha = 3.7$ kPa/m, $k_{s0} = 1000$ kN/m³, $\beta = 1000$ kN/m⁴, $k_{b1} = 3.6 \times 10^6$ kN/m³, $k_{b2} = 7.2 \times 10^5$ kN/m³, $w_{ub} = 8$ mm。

图 6 和图 7 分别给出了按本文方法计算得到的 A 型桩、B 型桩荷载 - 沉降曲线和 A 桩轴力分布与实测结果的对比。除 A 型桩的计算结果与实测结果有良好

的一致性外,值得注意的是将 A 型桩的土层计算参数用于 B 型桩的模拟计算时,得到的荷载-沉降曲线与实测结果同样具有良好吻合程度,这表明在相同地质条件、同一桩型的情况下,可通过对一定数量试桩资料的反分析,并结合地质勘察资料为计算分析提供合理的计算参数。

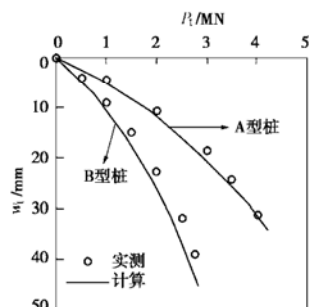


图 6 A 桩和 B 桩荷载-沉降曲线

Fig. 6 Load-settlement curve of A and B pile

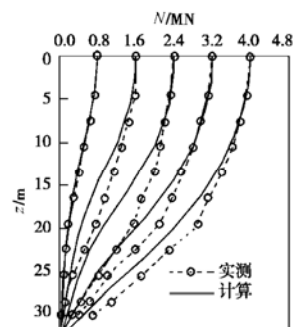


图 7 A 桩轴力分布

Fig. 7 Distribution load with depth of A pile

4 结 论

(1) 以桩侧土和桩端土分别采用弹性-全塑性和双线性硬化荷载传递函数为基础,推导了轴向荷载作用下考虑桩侧极限摩阻力和剪切刚度系数随深度线性变化的单桩弹塑性解析解,该方法可适用于摩擦桩和端承摩擦桩。

(2) 本文方法考虑了桩侧极限摩阻力和剪切刚度系数随深度的变化,体现了土体强度和刚度随深度增加而提高的特性,较好地反映不同深度处桩侧摩阻力的发挥过程,使得单桩荷载传递规律更加符合实际,为模拟单桩工作性状提供了一条有效途径。

(3) 实例分析表明,计算结果与实测结果间具有良好的一致性,验证了本文方法的合理性。

参考文献:

[1] 《桩基工程手册》编写委员会. 桩基工程手册[M]. 北京:

中国建筑工业出版社, 1995: 140 - 142. (Committee for Compiling the Pile Foundation Handbook. Pile foundation handbook[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 1995: 140 - 142. (in Chinese))

- [2] 曹汉志. 桩的轴向荷载传递及荷载-沉降曲线的数值计算方法[J]. 岩土工程学报, 1986, 8(6): 37 - 49. (CAO Han-zhi. Axial loading transfer of pile and numerical calculation method of loading-settlement curve[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1986, 8(6): 37 - 49. (in Chinese))
- [3] 罗惟德. 单桩承载力机理分析与荷载-沉降曲线的理论推导[J]. 岩土工程学报, 1990, 12(1): 35 - 44. (LUO Wei-de. Study on load-settlement equation for loaded pile-soil system[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1990, 12(1): 35 - 44. (in Chinese))
- [4] MOTTA Ernesto. Approximate elastic-plastic solution for axially loaded piles[J]. J Geotech Engrg Div, ASCE, 1994, 120(9): 1616 - 1623.
- [5] 陈龙珠, 梁国钱, 等. 桩轴向荷载-沉降曲线的一种解析算法[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(6): 30 - 38. (CHEN Long-zhu, LIANG Guo-qian. Analytical calculation of axial loading-settlement[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 16(6): 30 - 38. (in Chinese))
- [6] 陈明中, 龚晓南, 严平. 单桩沉降的一种解析解法[J]. 水利学报, 2000(8): 70 - 74. (CHEN Ming-zhong, GONG Xiao-nan, YAN Ping. An analytical solution for settlement of single pile[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2000(8): 70 - 74. (in Chinese))
- [7] 洪鑫, 雷国辉, 施建勇. 双线性荷载传递函数的单桩荷载沉降关系统一解[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(3): 428 - 431. (HONG Xin, LEI Guo-hui, SHI Jian-yong. Unified load-settlement solution of single piles based on bilinear load transfer[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, 26(3): 428 - 431. (in Chinese))
- [8] COYLE Harry M, REESE Lyman C. Load transfer for axially loaded piles in clay[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1966, 92(2): 1 - 26.
- [9] 佐藤悟. 基桩承载力机理[J]. 土木技术, 1965, 20: 1 - 5. (SATO Satoru. Loading mechanism of pile foundation[J]. Civil Engineering, 1965, 20: 1 - 5. (in Japanese))
- [10] 郭环, 华玉爱. Airy 函数——二阶微分方程 $f'' - zf=0$ 的特解[J]. 工科数学, 2000, 16(4): 69 - 73. (GUO Huan, HUA Yu-ai. Airy function — a solution of the second order differential equation $f'' - zf=0$ [J]. Journal of Mathematics for Technology, 2000, 16(4): 69 - 73. (in Chinese))