

建立土体屈服函数的方法研究

施维成¹, 朱俊高²

(1. 常州工学院土木建筑工程学院, 江苏 常州 213002; 2. 河海大学岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098)

摘要: 总结了建立土体屈服函数的6种方法, 并以剑桥模型和修正剑桥模型为例, 详细说明了使用应力剪胀关系法、热力学方法得到屈服函数的具体步骤。分析了这6种方法的优缺点, 发现应力剪胀关系法、塑性应变增量法和热力学方法本质上都是由屈服函数的“等价物”来得到屈服函数, 只是“等价物”的形式不同, 分别为代数、几何和能量形式的等价关系。最后使用破坏函数类比法, 在粗粒土常规三轴试验及真三轴试验结果的基础上, 建立了一个粗粒土剪切屈服准则。

关键词: 弹塑性模型; 屈服函数; 塑性势; 粗粒土

中图分类号: TU43 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2010)04-0624-06

作者简介: 施维成(1982-), 男, 江苏盐城人, 博士, 讲师, 主要从事土的强度理论与本构关系等方面的研究。E-mail: shiweicheng2008@yahoo.com.cn。

Methods for establishing yield function of soils

SHI Wei-cheng¹, ZHU Jun-gao²

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213002, China; 2. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Six methods for establishing the yield function of soils are summarized, and taking Cambridge Model and Modified Cambridge Model as examples, the approaches of the stress-dilatancy method and the thermodynamics method are explicated. The advantages and disadvantages of these methods are analyzed. It is found that the stress-dilatancy method, the plastic strain increment method and the thermodynamics method are the same in nature and all of the three methods need to establish yield functions from their “equivalents”. The forms of the “equivalents” are the equivalent relations of algebraic, geometrical and energy aspects, respectively. Finally using the sixth method, a shear yield criteria for coarse-grained soils is proposed based on the results of conventional triaxial and true triaxial tests on these soils.

Key words: elasto-plastic model; yield function; plastic potential; coarse-grained soils

0 引言

弹塑性模型在土工数值模拟中广泛使用, 而符合土体性质的合理的屈服函数是建立弹塑性模型的重要环节。几十年来人们一直在对屈服函数进行研究, 沈珠江院士^[1]曾对五种不同的屈服函数从数值计算的角度进行比较。

学者们曾从不同的角度出发, 提出了不少建立屈服函数的方法, 因此, 有必要对这些方法进行总结分析。本文在大量文献阅读的基础上, 对土体屈服函数的建立方法进行总结, 并对这些方法的优缺点进行分析, 最后使用其中的一种方法, 在常规三轴试验及真三轴试验的基础上, 建立了粗粒土的剪切屈服准则。

1 建立土体屈服函数的6种方法

1.1 应力剪胀关系法

这种方法通过应力剪胀关系式求得屈服函数。依

据的是弹塑性基本理论及微积分计算, 如下所述:

设塑性势函数为

$$g(p, q) = 0 \quad , \quad (1)$$

等式两端求全微分得

$$\frac{\partial g}{\partial p} dp + \frac{\partial g}{\partial q} dq = 0 \quad , \quad (2)$$

两端同乘塑性因子 dI 得

$$dI \frac{\partial g}{\partial p} dp + dI \frac{\partial g}{\partial q} dq = 0 \quad . \quad (3)$$

根据流动法则, 有

基金项目: 国家自然科学基金项目(50579014); 国家自然科学基金委员会、二滩水电开发有限责任公司雅砻江水电开发联合基金项目(50639050); 江苏省高校自然科学研究项目(09KJD560003); 江苏省自然科学基金项目(BK2007582)

收稿日期: 2008-12-19

$$de_v^p = dI \frac{\partial g}{\partial p} , \quad (4)$$

$$de_s^p = dI \frac{\partial g}{\partial q} , \quad (5)$$

从而可以将式(3)改写为

$$de_v^p dp + de_s^p dq = 0 . \quad (6)$$

令应力比

$$h = \frac{q}{p} , \quad (7)$$

两端求微分可得

$$dh = \frac{p dq - q dp}{p^2} , \quad (8)$$

移项整理可得

$$dq = \frac{1}{p} (p^2 dh + q dp) = p dh + h dp . \quad (9)$$

将式(9)代入式(6), 有

$$de_v^p dp + de_s^p (p dh + h dp) = 0 , \quad (10)$$

两端同时除以 de_s^p , 得

$$\left(\frac{de_v^p}{de_s^p} + h \right) dp = -p dh . \quad (11)$$

令

$$d = \frac{de_v^p}{de_s^p} , \quad (12)$$

则式(11)成为

$$(d + h) dp = -p dh , \quad (13)$$

将 p , h 分别放在等式的两边, 得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dh}{d + h} . \quad (14)$$

式(14)即为与式(1)所示的塑性势函数等价的增量关系式, 是塑性势面的法线方程。从试验得出(或者假设)应力剪胀关系式($d - \eta$ 关系式), 代入式(14), 再两边积分就可得到塑性势函数。

下面举例用此方法通过 $d - \eta$ 关系式分别得到剑桥模型和修正剑桥模型的塑性势函数(屈服函数)。

(1) 剑桥模型

设 $d \sim \eta$ 关系式为线性关系:

$$d = M - h , \quad (15)$$

式中, M 为 $p - q$ 平面上破坏线的斜率。

将式(15)代入式(14)得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dh}{M} . \quad (16)$$

设初始应力状态为 $(p, q) = (p_0, 0)$, 则由式(7)得

初始应力比 $h_0 = 0$ 。

对式(16)等式两边从初始应力状态 $(p_0, 0)$ 到任一时刻应力状态 (p, q) 求积分, 有

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^h \frac{dh}{M} , \quad (17)$$

求解可得

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{h}{M} . \quad (18)$$

将式(7)代入式(18)并整理可得

$$\ln p + \frac{q}{Mp} = \ln p_0 . \quad (19)$$

式(19)就是剑桥模型的塑性势函数, 使用相关联流动法则, 也就是屈服函数。

(2) 修正剑桥模型

设 $d - \eta$ 关系式为

$$d + h = \sqrt{d^2 + M^2} , \quad (20)$$

式中, M 为 $p - q$ 平面上破坏线的斜率。

将式(20)等式两边平方并整理得

$$d = \frac{M^2 - h^2}{2h} . \quad (21)$$

将式(21)代入式(14)得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{2h dh}{M^2 + h^2} . \quad (22)$$

设初始应力状态 $(p, q) = (p_0, 0)$, 则由式(7)得初始应力比 $h_0 = 0$ 。

对式(22)等式两边从初始应力状态到任一时刻应力状态求积分, 有

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_0^h \frac{2h dh}{M^2 + h^2} , \quad (23)$$

求解可得

$$\frac{p}{p_0} = \frac{M^2}{M^2 + h^2} . \quad (24)$$

将式(7)代入式(24), 并整理可得

$$\left(1 + \frac{q^2}{M^2 p_0^2} \right) p = p_0 . \quad (25)$$

式(25)就是修正剑桥模型的塑性势函数, 使用相关联流动法则, 也就是屈服函数。

1.2 塑性应变增量法

假设应力与应变、应变增量都同轴, 在应力空间直接从试验确定各种应力状态下塑性应变增量的方向。根据正交法则, 也就得到了塑性势面的法向, 绘制与这些塑性应变增量方向正交的曲线, 就是塑性势轨迹, 从而得出塑性势函数, 假设相关联流动法则, 即得到屈服函数。

黄文熙^[2-3]教授用此方法建立了著名的清华弹塑性模型, 李广信^[4]教授此后对该模型进行了较系统的

深入研究。

1.3 热力学方法

20世纪80年代Houlsby G T^[5]开始在热力学里发展适用于岩土材料的塑性理论,从假设自由能函数和耗散增量函数形式来发展本构模型,从而使建立的模型自动满足热力学第一、第二定律。Collins I F 和Houlsby G T^[6]论证了这些热力学函数与经典的塑性概念(屈服面,塑性势,各向同性和运动硬化,摩擦,剪胀)之间的关系。此后, Houlsby G T、Puzrin A M 以及 Collins I F 等人^[7-13]对使用热力学方法建立弹塑性模型的理论框架进行了论述,并称这种方法建立的模型为超塑性模型。后来,学者们将两个能量函数推广为能量泛函,从而将超塑性模型推广为连续超塑性模型^[14-18]。笔者曾使用热力学方法对双屈服面模型进行研究^[19]。

热力学方法的基本概念如下所述。

假设土体的变形都是在等温条件下发生的,根据热力学第一定律可以得出下式关系

$$\delta W = \mathbf{d}\mathbf{y} + \delta f, \quad (26)$$

式中, $\delta W = \mathbf{s}'_{ij} \mathbf{d}\mathbf{e}_{ij}$ 为有效应力所做的功的增量。 ψ 为自由能函数,用来描述土体材料的历史效应,是状态变量的函数,与路径无关。 δf 为耗散增量函数,由热力学第二定律可得 $\delta f \geq 0$ 。

自由能函数 ψ 可以分为弹性自由能函数与塑性自由能函数之和,如下式所示

$$\psi = \psi_0(\mathbf{e}_{ij}^e) + \psi_p(\mathbf{e}_{ij}^p), \quad (27)$$

式中, $\psi_0(\mathbf{e}_{ij}^e)$ 、 $\psi_p(\mathbf{e}_{ij}^p)$ 分别为以 \mathbf{e}_{ij}^e 为自变量的弹性自由能函数和以 \mathbf{e}_{ij}^p 为自变量的塑性自由能函数。

将有效应力所做的功的增量 δW 分为弹性分量和塑性分量之和:

$$\delta W = \delta W^e + \delta W^p. \quad (28)$$

弹性功增量没有耗散,等于弹性自由能增量:

$$\delta W^e = \mathbf{d}\mathbf{y}_0(\mathbf{e}_{ij}^e) \mathbf{d}\mathbf{e}_{ij}^e. \quad (29)$$

塑性功增量等于塑性自由能增量与耗散能之和:

$$\delta W^p = \mathbf{d}\psi_p + \delta f, \quad (30)$$

其中

$$\mathbf{d}\mathbf{y}_p = \frac{\partial \mathbf{y}_p(\mathbf{e}_{ij}^p)}{\partial \mathbf{e}_{ij}^p} \mathbf{d}\mathbf{e}_{ij}^p, \quad (31)$$

根据齐次函数的欧拉法则,有

$$\delta f = \frac{\partial(\delta f)}{\partial(\mathbf{d}\mathbf{e}_{ij}^p)} \mathbf{d}\mathbf{e}_{ij}^p. \quad (32)$$

耗散增量函数与屈服函数是对材料屈服的两种不同描述方法,可以通过勒让德变换,用指定的耗散增量函数得到相应的屈服函数。

下面使用热力学方法,通过假设自由能函数和耗散增量函数,分别得到剑桥模型和修正剑桥模型的屈服函数。

(1) 剑桥模型

假设耗散增量函数为

$$df = M p_0 \mathbf{d}\mathbf{e}_s^p \exp\left(\frac{\mathbf{d}\mathbf{e}_v^p}{M \mathbf{d}\mathbf{e}_s^p} - 1\right), \quad (33)$$

则耗散应力分别为

$$p = p_0 \exp\left(\frac{\mathbf{d}\mathbf{e}_v^p}{M \mathbf{d}\mathbf{e}_s^p} - 1\right), \quad (34)$$

$$t = \left(M p_0 - \frac{p_0 \mathbf{d}\mathbf{e}_v^p}{\mathbf{d}\mathbf{e}_s^p}\right) \exp\left(\frac{\mathbf{d}\mathbf{e}_v^p}{M \mathbf{d}\mathbf{e}_s^p} - 1\right), \quad (35)$$

从而耗散应力空间中的屈服函数为

$$\ln \frac{\pi}{p_0} + \frac{t}{M\pi} = 0. \quad (36)$$

移动应力为

$$r = x = 0, \quad (37)$$

因此真实应力为

$$p = \pi; q = t, \quad (38)$$

代入式(36),得真实应力空间中的屈服函数

$$\ln \frac{p}{p_0} + \frac{q}{Mp} = 0. \quad (39)$$

整理上式即可得式(19)所示的剑桥模型屈服函数。

(2) 修正剑桥模型

假设自由能增量和耗散增量函数分别为

$$\mathbf{d}\mathbf{y} = \frac{1}{2} p_0 \mathbf{d}\mathbf{e}_v^p, \quad (40)$$

$$df = \frac{1}{2} p_0 \sqrt{(\mathbf{d}\mathbf{e}_v^p)^2 + (M \mathbf{d}\mathbf{e}_s^p)^2}. \quad (41)$$

移动应力和耗散应力分别为

$$r = \frac{1}{2} p_0; x = 0, \quad (42)$$

$$\pi = \frac{1}{2} p_0 \frac{\mathbf{d}\mathbf{e}_v^p}{\sqrt{(\mathbf{d}\mathbf{e}_v^p)^2 + (M \mathbf{d}\mathbf{e}_s^p)^2}}, \quad (43)$$

$$t = \frac{1}{2} p_0 \frac{M^2 \mathbf{d}\mathbf{e}_s^p}{\sqrt{(\mathbf{d}\mathbf{e}_v^p)^2 + (M \mathbf{d}\mathbf{e}_s^p)^2}}. \quad (44)$$

耗散应力空间中的屈服函数为

$$\pi^2 + \frac{t^2}{M^2} = \frac{1}{4} p_0^2. \quad (45)$$

真实应力空间中的屈服函数

$$\left(p - \frac{1}{2} p_0\right)^2 + \frac{q^2}{M^2} = \frac{1}{4} p_0^2. \quad (46)$$

整理上式即可得式(25)所示的修正剑桥模型屈服函数。

1.4 等塑性应变法

广义塑性力学^[20]采用分量理论, 塑性应变增量方向由3个塑性应变增量分量合成。3个塑性应变增量分量的方向分别由3个塑性势面决定, 大小则由3个屈服面确定。每个屈服面与相应的塑性势面相对应, 如取 s_1 , s_2 , s_3 为塑性势面, 则对应的3个屈服面分别为 e_1^p , e_2^p , e_3^p 的等值面。

通过试验得到屈服面^[21-22]的方法是: 通过不同的应力路径试验得到不同的应力-塑性应变关系曲线, 其中塑性应变是总应变减去弹性应变得到。在不同的应力-塑性应变关系曲线上取塑性应变相同的点, 将这些点的应力绘在应力坐标系中, 得到塑性应变等值面。这些塑性应变等值面即为以该塑性应变为硬化参数的屈服面。

1.5 应力路径法

虽然如今测量技术已越来越先进, 但总的来看, 在土工试验中测量应力还是比测量应变容易些而且精确度更高些。魏汝龙^[23-24]建议通过以下方法得到屈服轨迹: 由不排水三轴压缩试验的应力路径、根据饱和土在加载时物理状态(孔隙比)唯一地决定于应力状态而与应力路径无关的概念, 通过求得不同的等应力比线与屈服轨迹交点的横坐标 p , 得到屈服面形状。

该方法有以下假设条件:

(1) 不等向固结($\eta=q/p \neq 0$)加压及回弹时的 $e-\lg p$ 关系与等向固结($\eta=q/p=0$)加压及回弹时的 $e-\lg p$ 关系都是一组互相平行的直线, 如图1(b)所示。

(2) 通过试验得到不排水三轴压缩试验的应力路径, 即得到一条体积应变为0的应力路径, 如图1(a)的 ACE 线。

(3) 孔隙比只与应力状态有关, 与应力路径无关。

(4) 屈服轨迹上代表中性加载, 只有弹性体积应变。

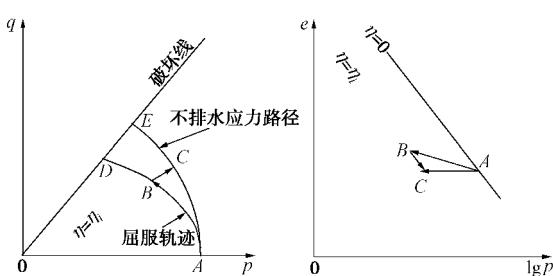


图1 应力路径法得到屈服函数示意图

Fig. 1 Stress path method for establishing yield functions

该方法的原理是: 考虑如图1(a)所示的 ABC 应力路径, 即从 A 点($p=p_0$, $q=0$, $\eta=0$)出发, 沿着屈服轨迹到 B 点($\eta=q/p=\eta_i$), 再从 B 点沿着等 η

线($\eta=\eta_i$)到 C 点。其中 A , C 两点在同一条不排水三轴压缩应力路径上, 体变为0, 根据体变只与应力状态有关而与应力路径无关的假定, 经历应力路径 ABC 后的体变也为0, 而 AB 的体变只有弹性应变, BC 的体变根据与等向固结的 $e-\lg p$ 平行的直线求得。

根据下式求得一系列等应力比 η 线与屈服轨迹交点的横坐标 p , 就可得到屈服轨迹形状。

$$p_B = p_C \left(\frac{p_C}{p_A} \right)^{\frac{k}{1-k}}, \quad (47)$$

式中, λ 、 κ 分别为加压和回弹时 $\varepsilon_v-\lg p$ 关系曲线的斜率。

1.6 破坏函数类比法

根据试验得到的大量破坏应力状态, 推出破坏准则, 然后假设屈服面形状与破坏面形状相似, 即可由破坏准则得到屈服函数。

2 6种方法的比较分析

第一种方法(应力剪胀关系法)由 $d-\eta$ 关系式得到屈服函数, 依据的是塑性势函数与应力剪胀关系式之间的等价关系, 理论上较为明确。缺点是: 假设了 d 与 η 的一一对应关系, 即应力比 η 一定, 则 d 一定, 也就是说塑性应变增量方向仅仅与应力比有关, 这与土体的性质不符。

第二种方法(塑性应变增量法)由塑性应变增量方向确定屈服面, 依据的是塑性势面与塑性应变增量方向之间的正交关系, 也就是几何上的等价关系。该方法主要有两个缺陷: 第一是试验中对变形的测量精度要求较高; 第二是假设了在某一应力状态下的塑性应变增量方向是固定不变的, 与应力路径无关, 而实际上, 在同一种应力状态下, 不同的应力增量会引起不同的塑性应变增量, 塑性应变增量方向不仅仅与应力有关, 还与应力增量有关。

第三种方法(热力学方法)由能量函数通过勒让德变换得到屈服函数, 依据的是能量函数与屈服函数的等价关系。该方法理论上较为完善, 自动满足热力学定律, 难点在于找到合适的能量函数或能量泛函。

上述3种方法虽然表面上看起来是从完全不同的角度建立土体屈服函数, 但究其本质, 这3种方法具有一个共同点, 即都是通过屈服函数的“等价物”来求得屈服函数的, 不同的仅是“等价物”的形式, 分别为代数、几何和能量的等价关系。

第四种方法(等塑性应变法)根据广义塑性力学原理, 通过试验得到塑性应变相等的应力状态, 连接这些应力状态点, 得到屈服面。该方法的优点是采用分量理论, 从而塑性应变增量方向不仅仅与应力状态

有关, 还与应力增量有关; 缺点是通过试验拟合屈服面, 对试验中各个方向变形的量测精度要求较高。

第五种方法(应力路径法)通过一些合理的假设及推导, 由等向固结加压试验及不排水三轴压缩试验得到屈服面。在对细粒土的研究中该方法思路清晰, 较为适用; 而用于粗粒土则有一定缺陷, 由于粗粒土等向加压试验中存在的橡皮膜嵌入等因素很难避免, 导致测得的体变有较大误差, 最终得到的屈服面形状也会因此产生偏差。

第六种方法(破坏函数类比法)认为破坏面就是最终的屈服面, 通过试验得到破坏面, 也就得到了屈服面。该方法假设合理, 且使用起来较为简便。

3 粗粒土剪切屈服准则的建立

近几十年来, 对于细粒土的本构模型研究已经很多, 但针对粗粒土的这方面研究还很少, 尤其是考虑三维应力状态下变形特性的模型更是罕见报道。本文作者曾在砾石料真三轴试验结果基础上提出粗粒土三维破坏准则^[25]:

$$\frac{I_1^3 + 4I_1I_2}{I_3} = \text{const} \quad (48)$$

这里使用上文所述建立屈服函数的第六种方法, 假设粗粒土的屈服面与破坏面形状相似, 即认为屈服函数与破坏函数形式一致, 为式(48)的左端表达式。

通过对粗粒土常规三轴试验^[26]及笔者使用河海大学新型真三轴仪所做的粗粒土真三轴试验数据进行整理分析, 发现 $(e_s^p)^2 / \frac{I_1^3 + 4I_1I_2}{I_3} - (e_s^p)^2$ 之间成较好的线性关系, 如图 2(a)~(b) 所示。其中, e_s^p 的单位为%, 如图中横坐标为 100 时, 相应的 e_s^p 为 10%。

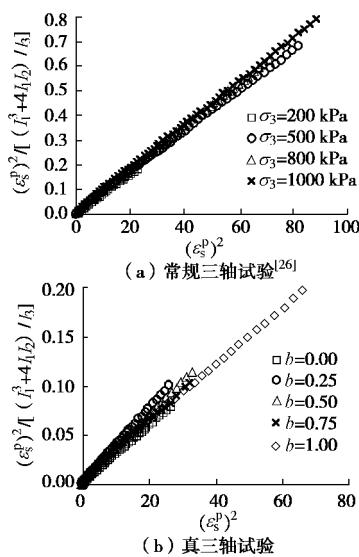


图 2 粗粒土试验结果

Fig. 2 Experimental results for coarse-grained soils

不妨令该线性关系为

$$\left(e_s^p \right)^2 / \frac{I_1^3 + 4I_1I_2}{I_3} = \frac{1}{K_f} \left(e_s^p \right)^2 + \frac{a}{K_f},$$

整理可得 $\frac{I_1^3 + 4I_1I_2}{I_3} = \frac{K_f \left(e_s^p \right)^2}{a + \left(e_s^p \right)^2}$ 。

上式显示: $\frac{I_1^3 + 4I_1I_2}{I_3}$ 与 $\left(e_s^p \right)^2$ 之间是双曲线关系

(笔者整理的试验数据显示两者的增量之间也存在这种双曲线关系), 从而建立粗粒土的剪切屈服准则如下式所示

$$f = \frac{I_1^3 + 4I_1I_2}{I_3} = \frac{K_f \left(e_s^p \right)^2}{a + \left(e_s^p \right)^2} \quad (49)$$

4 结 语

本文首先总结了土体屈服函数建立的 6 种途径, 并以剑桥模型和修正剑桥模型为例, 详细说明了使用应力剪胀关系法、热力学方法得到屈服函数的具体步骤。然后分析了这 6 种方法的优缺点, 发现应力剪胀关系法、塑性应变增量法和热力学方法这 3 种方法本质上相同, 都是由屈服函数的“等价物”得到屈服函数, 不同的是“等价物”的形式分别为代数、几何和能量形式的等价关系。最后使用第六种方法, 在粗粒土常规三轴试验及真三轴试验的基础上, 建立了粗粒土的剪切屈服准则。

因篇幅所限, 对粗粒土剪切屈服准则的验证将在后续研究中展开。

参 考 文 献:

- [1] 沈珠江. 几种屈服函数的比较[J]. 岩土力学, 1993, 14(1): 41~50. (SHEN Zhu-jiang. Comparison of several yield function[J]. Rock and Soil Mechanics, 1993, 14(1): 41~50. (in Chinese))
- [2] 黄文熙. 硬化规律对土的弹塑性应力—应变模型影响的研究[J]. 岩土工程学报, 1980, 1: 1~11. (HUANG Wen-xi. The influence of the hardening law on the formulation of the elasto-plastic model of soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1980, 1: 1~11. (in Chinese))
- [3] 黄文熙, 濮家骝, 陈愈炯. 土的硬化规律和屈服函数[J]. 岩土工程学报, 1981, 2(3): 19~26. (HUANG Wen-xi, PU Jia-liu, CHEN Yu-jiong. Hardening rule and yield function for soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1981, 2(3): 19~26. (in Chinese))
- [4] 李广信. 土的清华弹塑性模型及其发展[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(1): 1~10. (LI Guang-xin. Characteristics and development of Tsinghua elasto-plastic model for soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28(1): 1~10. (in Chinese))

- 10. (in Chinese))
- [5] HOULSBY G T. A study of plasticity theories and their applicability to soils[D]. Cambridge: University of Cambridge, 1981.
- [6] COLLINS I F, HOULSBY G T. Application of thermomechanical principles to the modelling of geotechnical materials[J]. Proceedings of the Royal Society of London A, 1997, **453**: 1975 - 2001.
- [7] HOULSBY G T, PUZRIN A M. A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials[J]. International Journal of Plasticity, 2000, **16**: 1017 - 1047.
- [8] PUZRIN A M, HOULSBY G T. Fundamentals of kinematic hardening hyperplasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, **38**: 3771 - 3794.
- [9] PUZRIN A M, HOULSBY G T. A thermomechanical framework for rate-independent dissipative materials with internal functions[J]. International Journal of Plasticity, 2001, **17**: 1147 - 1165.
- [10] COLLINS I F, HILDER T. A theoretical framework for constructing elastic/plastic constitutive models of triaxial tests[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, **26**: 1313 - 1347.
- [11] COLLINS I F, KELLY P A. A thermomechanical analysis of a family of soil models[J]. Geotechnique, 2002, **52**(7): 507 - 518.
- [12] COLLINS I F, HILDER T. A theoretical framework for constructing elastic/plastic constitutive models of triaxial tests[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2002, **26**: 1313 - 1347.
- [13] COLLINS I F. A systematic procedure for constructing critical state models in three dimensions[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, **40**: 4379 - 4397.
- [14] EINAV I, PUZRIN A M, HOULSBY G T. Numerical studies of hyperplasticity with single, multiple and a continuous field of yield surfaces[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2003, **27**: 837 - 858.
- [15] EINAV I, PUZRIN A M, HOULSBY G T. Continuous hyperplastic models for overconsolidated clays[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2003, **37**: 515 - 523.
- [16] LIKITLERSUANG S. A hyperplasticity model for clay behaviour: an application to bangkok clay[D]. Oxford: University of Oxford, 2003.
- [17] EINAV I, PUZRIN A M. Continuous hyperplastic critical state (CHCS) model derivation[J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, **41**: 199 - 226.
- [18] LIKITLERSUANG S, HOULSBY G T. Development of hyperplasticity models for soil mechanics[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2006, **30**: 229 - 254.
- [19] 施维成, 朱俊高. 土体双屈服面模型的塑性功方程[J]. 武汉大学学报(工学版), 2008, **41**(3): 77 - 81. (SHI Wei-cheng, ZHU Jun-gao. Plastic work equation of double-yield-surface model for soils[J]. Engineering Journal of Wuhan University, 2008, **41**(3): 77 - 81. (in Chinese))
- [20] 郑颖人, 沈珠江, 龚晓南. 广义塑性力学——岩土塑性力学原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002. (ZHENG Ying-ren, SHEN Zhu-jiang, GONG Xiao-nan. Generalized plastic mechanics—the principles of geotechnical plastic mechanics[M]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2002. (in Chinese))
- [21] 张鲁渝, 孔亮, 郑颖人. 偏平面上屈服曲线的实验拟合[J]. 岩土力学, 2002, **23**(4): 406 - 410. (ZHANG Lu-yu, KONG Liang, ZHENG Ying-ren. The research of experimental fitting of the yield surface curve on the plane π [J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, **23**(4): 406 - 410. (in Chinese))
- [22] 陈瑜瑶, 王敬林, 郑颖人. 由试验数据拟合重庆红粘土的屈服条件[J]. 岩土力学, 2001, **22**(4): 443 - 450. (CHEN Yu-yao, WANG Jing-lin, ZHENG Ying-ren. Fitting the yield criterion of Chongqing red clay by experimental data[J]. Rock and Soil Mechanics, 2001, **22**(4): 443 - 450. (in Chinese))
- [23] 魏汝龙. 正常压密粘土的塑性势[J]. 水利学报, 1964(6): 9 - 20. (WEI Ru-long. The plastic potential of normally consolidated clays[J]. Journal of Hydraulics Engineering, 1964(6): 9 - 20. (in Chinese))
- [24] 魏汝龙. 正常压密粘土的本构定律[J]. 岩土工程学报, 1981, **3**(3): 10 - 18. (WEI Ru-long. Constitutive laws for normally consolidated clay[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1981, **3**(3): 10 - 18. (in Chinese))
- [25] 施维成, 朱俊高, 刘汉龙. 中主应力对砾石料变形和强度的影响[J]. 岩土工程学报, 2008, **30**(10): 1449 - 1453. (SHI Wei-cheng, ZHU Jun-gao, LIU Han-long. Influence of intermediate principal stress on deformation and strength of gravel[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, **30**(10): 1449 - 1453. (in Chinese))
- [26] 翁厚洋. 粗粒料缩尺效应试验研究[D]. 南京: 河海大学, 2008. (WEN Hou-yang. Experimental study on scale effect of coarse-grained materials[D]. Nanjing: Hohai University, 2008. (in Chinese))