

黏土非线性模型的改进切线模量

王伟¹, 卢廷浩², 周干武^{2,3}

(1. 绍兴文理学院土木工程系, 浙江 绍兴 312000; 2. 河海大学岩土工程研究所, 江苏 南京 210098; 3. 南京水利科学研究院岩土工程研究所, 江苏 南京 210024)

摘要: 切线模量描述是土体非线性模型中的一个基本问题。首先, 引入“半值强度指数”概念建立了土体应力应变曲线的数学特征方程, 分析了双曲线应力应变模型的数学缺陷。接着, 根据试验数据分析提出了土体应力应变曲线的控制微分方程, 建立了土体应力应变曲线的3参数新模型, 新模型克服了双曲线模型的缺陷; 证明了双曲线模型是该新模型的特例。最后, 在3参数新模型的基础上, 改进了土体的切线模量表达, 给出了参数确定方法, 并对三轴试验结果进行了模拟。

关键词: 土体非线性模型; 3参数应力应变模型; 改进切线模量; 数学特征方程; 控制微分方程

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2007)03-0458-05

作者简介: 王伟(1977-), 男, 安徽太和人, 博士, 主要从事土体基本性质、土与结构共同作用等方面的研究。E-mail: wellsking@tom.com。

Improved tangent modulus of nonlinear soil model

WANG Wei¹, LU Ting-hao², ZHOU Gan-wu^{2,3}

(1. Department of Civil Engineering, Shaoxing College of Art and Science, Shaoxing 312000, China; 2. Research Institute of Geotechnical Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 3. Department of Geotechnical Engineering, Nanjing Hydraulic Research Institute, Nanjing 210024, China)

Abstract: Tangent modulus was essential to nonlinear soil model, and it was necessary to understand it properly during numerical simulation. First, a new concept namely half strength index was introduced to build the mathematic properties equations of stress-strain relationship, then the deficiency of hyperbolic expression of the relationship was indicated in terms of it. Second, according to laboratory test data, differential control equation of soil stress-strain relationship was presented and a new 3-parameter stress-strain expression was established. It was shown that the hyperbolic expression was the simplified type of the 3-parameter expression. Third, an improved tangent modulus of soil was obtained based on the new stress-strain expression, and methods to determine its parameters were discussed. Finally, simulation of triaxial test data using the improved tangent modulus was conducted.

Key words: nonlinear model of soil; 3-parameter model of stress and strain; improved tangent modulus; mathematic properties equation; differential control equation

0 引言

岩土工程数值计算结果是否可靠和符合实际, 与计算所选用的土体本构模型密切相关, 而土体应力应变行为的描述及切线模量的表征又是土体本构模型的核心问题^[1-3]。基于双曲线应力应变曲线描述的邓肯非线性土体模型由于简洁直观, 并能较好的反映土体的非线性特性, 且参数易于通过试验直接获得, 因而最为常用^[4-9]。但该模型采用简单双曲线描述应力应变曲线有时存在很大误差, 导致切线模量的模拟结果与实际情况存在较大的差异^[10-11]。本文基于微分方程建立了土体3参数应力应变新模型, 改进了非线性切线模

量的表达, 为进一步研究土体本构模型奠定了基础。

1 双曲线应力应变模型分析

1.1 双曲线模型简述

通过三轴试验数据规律统计, Kondner 等采用双曲线描述土体的偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 与轴向应变 ε 的关系, 记作 $f(\varepsilon)$, 其标准形式为^[1-3]

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{A + B\varepsilon}, \quad (1)$$

其中 σ_3 为围压, $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 为偏应力, ε 为轴向应变, A, B 是待定参数, 均为正值。

对式(1)求极限和一阶导数, 得到反应土体强度的极限偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_u$ 及土体的初始切线模量 E_i

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \sigma_3)_u = (\sigma_1 - \sigma_3)|_{\varepsilon \rightarrow \infty} = 1/B, \\ E_i = \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 1/A. \end{cases} \quad (2)$$

所以参数 A, B 有较为明确的物理意义, A 是初始切线模量的倒数, B 是极限偏应力的倒数, 见图1。此曲线形式简洁, 参数少, 得到了广泛应用。

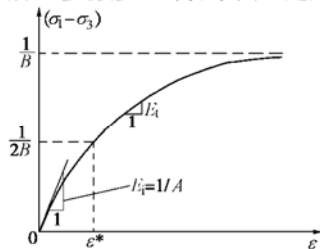


图1 土的应力应变关系曲线

Fig. 1 Stress-strain curve of soil

1.2 数学特征方程及双曲线模型缺陷分析

大量试验数据表明双曲线并不能很好的模拟三轴试验的应力应变关系, 有时存在很大误差。这种误差的根本原因在于双曲线的局限性, 下面引入应力应变曲线的另一个特征量“半值强度指数”分析此问题。

定义三轴试验应力应变曲线的“半值强度指数”为: “当土体偏应力达到对应极限偏应力的 1/2 时, 对应的应变数值, 记作 ε^* ”。由此定义可知, 它是以应变的形式描述土体应力发展速度的又一特征量, 对按变形设计的现代岩土工程课题非常重要。半值强度指数 ε^* 越小, 土体应力相对发展速度越快, 参见图1。

根据此定义, 求解式(1)的半值强度指数为

$$\varepsilon^* = A/B. \quad (3)$$

综合应力应变曲线的特征量: 初始切线模量、极限强度、半值强度指数, 建立双曲线对应的应力应变特征方程为

$$\begin{cases} E_i = 1/A, \\ (\sigma_1 - \sigma_3)_u = 1/B, \\ \varepsilon^* = A/B. \end{cases} \quad (4)$$

上式中的 3 个特征方程只有两个未知数, 并不独立。当初始切线模量、极限偏应力确定后, 半值强度指数不可调。值得说明的是, 以式(1)为核心的双曲线族, 无论其有几个参数, 都存在特征方程不独立的缺陷^[11]。

由式(4)可见, 在双曲线模型中隐含了“半值强度指数在数值上等于极限偏应力与初始切线模量之比”这一冗余条件, 这是产生较大拟合误差的根本原因。实际上即使在极限强度与初始切线模量确定的情

况下, 半值强度指数还可能与土体自身性质、外界条件等因素有关。较为理想的应力应变模型应能保证 3 个特征方程独立, 在极限强度与初始切线模量确定的情况下仍能够强度的发展速度。

2 三参数应力应变模型

2.1 控制微分方程及模型求解

双曲线应力应变模型没有任何理论根据, 只是基于形状相似的角度对应力应变进行模拟, 存在较大的拟合误差, 有必要从事物发展的机理控制微分方程对应力应变进行研究, 寻求满意的应力应变模型。

根据实测试验数据分析, 切线模量 E_t 随偏应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 的增大逐渐减小至零, 如图2所示。基于此, 采用抛物线对偏应力-切线模量关系进行模拟, 建立控制微分方程如下:

$$\begin{aligned} E_t &= \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon} \\ &= k[a - (\sigma_1 - \sigma_3)] \cdot [b - (\sigma_1 - \sigma_3)], \end{aligned} \quad (5)$$

其中 a, b, k 为 3 个非负参数, 且 $a < b$ 。容易看出, 参数 a, b 是控制微分方程的两个零解。

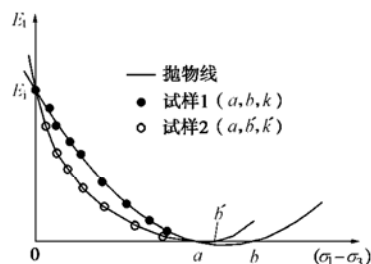


图2 偏应力-切线模量关系

Fig. 2 Deviatoric stress-tangent modulus curve of soil

由式(5)容易求得初始切线模量

$$E_i = abk. \quad (6)$$

对式(5)进行定积分得

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = F(\varepsilon) = \frac{ab \exp[k(a-b)\varepsilon] - ab}{a \exp[k(a-b)\varepsilon] - b}. \quad (7)$$

式(7)即为新的 3 参数土体应力应变模型, 下面对其数学性质进行分析。

2.2 模型数学性质

分别对式(7)求一阶导数和二阶导数分析各自正负号、分别对其求上下界得^[11]

$$\begin{cases} \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon} \geq 0, \\ \frac{d^2(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon^2} < 0, \\ (\sigma_1 - \sigma_3)|_{\varepsilon=0} = 0, \\ (\sigma_1 - \sigma_3)|_{\varepsilon=\infty} = a. \end{cases} \quad (8)$$

由式 (8) 可见, 3 参数土体应力应变模型式 (7) 单调递增, 且为凸函数, 具有极限值 a 。

2.3 数学特征方程

根据定义, 结合式 (8) 对式 (7) 求半值强度指数得

$$\varepsilon^* = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{2b-a}{b} \quad (9)$$

综合以上分析得 3 参数应力应变模型的数学特征方程为

$$\begin{cases} E_i = abk, \\ (\sigma_1 - \sigma_3)_u = a, \\ \varepsilon^* = \frac{1}{k(b-a)} \ln \frac{2b-a}{b}. \end{cases} \quad (10)$$

上式中的 3 个特征方程有 3 个未知数, 并且相互独立。在初始切线模量和极限强度确定的情况下, a 确定, b 与 k 的乘积确定, 但 b 、 k 只要在满足乘积一定的情况下仍然可以相对自由取值; 例如图 2 中的两个试样, 它们具有相同的初始切线模量和极限强度, 3 参数模型可以采用两组参数 (a, b, k) 、 (a, b', k') 分别对其进行模拟, 只需保证 $bk = b'k'$ 即可, 但双曲线模型却由于自身的缺陷无法有效模拟两个试样的力学行为。所以, 3 参数应力应变模型的半值强度指数 ε^* 可以相对自由, 能够充分反映土体强度的发展速度, 满足第一节分析中理想应力应变模型的要求。

3 双曲线模型与 3 参数模型关系

3.1 数学曲线比较

在 3 参数模型 $F(\varepsilon)$ 上任取一点 $(\varepsilon, F(\varepsilon))$ 。以 $(a-b)k\varepsilon$ 为自变量, 对 $\exp[(a-b)k\varepsilon]$ 进行麦克劳林级数展开

$$\begin{aligned} \exp[(a-b)k\varepsilon] \\ = 1 + (a-b)k\varepsilon + \dots + \frac{[(a-b)k\varepsilon]^j}{j!} + \dots \end{aligned} \quad (11)$$

其中 j 为自然数。对于给定的 ε , 当 $b \rightarrow a$ 时, $(a-b)k\varepsilon$ 为无穷小量, 对式 (11) 略去高阶无穷小, 取前两项得

$$\exp[(a-b)k\varepsilon] = 1 + (a-b)k\varepsilon \quad (12)$$

把上式代入式 (7) 得

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = F(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{a^2 k} + \frac{\varepsilon}{a}} \quad (13)$$

记 $A = (a^2 k)^{-1}$, $B = a^{-1}$, 比较式 (1)、式 (13) 有

$$F(\varepsilon) \Big|_{b \rightarrow a} = f(\varepsilon) \quad (14)$$

所以, 双曲线应力应变模型是 3 参数模型在参数 $b \rightarrow a$ 时的特例。

3.2 数学特征方程比较

在 $A = (a^2 k)^{-1}$ 、 $B = a^{-1}$ 的情况下, 双曲线模型的数学特征方程式 (5) 转化为

$$\begin{cases} E_i = a^2 k, \\ (\sigma_1 - \sigma_3)_u = a, \\ \varepsilon^* = (ak)^{-1}. \end{cases} \quad (15)$$

比较式 (15)、式 (10) 可知, 双曲线的数学特征方程是 3 参数模型数学特征方程在 $b \rightarrow a$ 的特例。

综合以上分析得, 双曲线模型本身、其数学特征方程均是 3 参数模型对应的特例, 所以它对土体应力应变关系模拟的精确性比 3 参数模型差。其本质在于图 2 中控制微分方程的两个零解相等时对应的应力应变模型即为双曲线模型, 此时的控制微分方程已经不能对偏应力~切线模量关系进行精确的模拟^[11]。

4 非线性切线模量改进

切线模量建立的主要工作就是确定参数应力应变模型中待定参数与土体基本参数的关系。以下采用 3 参数新应力应变模型对土体切线模量进行改进。

4.1 模型参数的确定

由以上分析可知, a 即为土体的极限偏应力。实际上 ε 不可能无穷大, 在达到一定值后土体就破坏了, 这时的偏应力为 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$, 它总是小于极限偏应力。试验数据的拟合表明, 对于初始状态相同的土体, 不同围压下参数 b 与 a 的比值基本不变, 即 $b = \lambda a$, 其中 λ 为不小于 1 的实数。

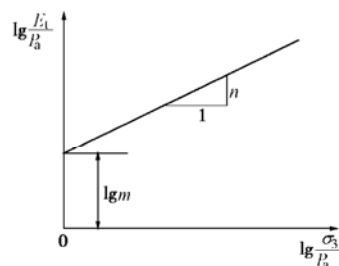


图 3 $\lg(E_i/P_a) - \lg(\sigma_3/P_a)$ 关系曲线

Fig. 3 Curve of $\lg(E_i/P_a) - \lg(\sigma_3/P_a)$

$$\text{令} \quad R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_u} \quad (16)$$

R_f 为破坏比。所以参数 a , b 可表示为

$$\begin{cases} a = (\sigma_1 - \sigma_3)_f / R_f, \\ b = \lambda (\sigma_1 - \sigma_3)_f / R_f. \end{cases} \quad (17)$$

试验数据同时表明: 初始切线模量 E_i 与 σ_3 在双对数坐标系中近似成图 3 所示的直线关系, 直线的截距为截距 $\lg m$, 斜率为 n , 其中标准大气压力 P_a 的引入是为了量纲统一的需要, 于是有

$$E_t = m \cdot \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \cdot P_a \quad , \quad (18)$$

对比式 (6)、式 (18) 得参数 k 的表达

$$k = \frac{R_f^2 m}{\lambda (\sigma_1 - \sigma_3)_f^2} \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad . \quad (19)$$

4.2 切线模量表达

把式 (17)、式 (19) 代入式 (5) 得土体切线模量的表达式为

$$E_t = \frac{R_f^2 m}{\lambda (\sigma_1 - \sigma_3)_f^2} \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{R_f} - (\sigma_1 - \sigma_3) \right] \times \left[\frac{\lambda (\sigma_1 - \sigma_3)_f}{R_f} - (\sigma_1 - \sigma_3) \right] \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n \quad . \quad (20)$$

根据莫尔库仑准则, 破坏偏应力与围压关系为^[1]

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad . \quad (21)$$

把上式代入式 (20) 得到切线剪切模量的最终表达为

$$E_t = \left[\frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{R_f (1 - \sin \varphi)} - (\sigma_1 - \sigma_3) \right] \times \left[\frac{\lambda (2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi)}{R_f (1 - \sin \varphi)} - (\sigma_1 - \sigma_3) \right] \times \frac{(1 - \sin \varphi)^2 R_f^2 m}{\lambda (2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi)^2} \left(\frac{\sigma_3}{P_a} \right)^n P_a \quad , \quad (22)$$

该非线性模型中有 6 个参数, 其中 c , φ 为土体强度指标, λ , m , n , R_f 根据试验数据按上述方法确定。

5 试验数据模拟

联立式 (7)、式 (17)、式 (19) 可以得到改进剪切模量对应的不同围压下的土体应力应变曲线。对文献[10]中的一组三轴试验数据进行模拟, 结果见图 4, 模型参数取值见表 1。由图 4 可见, 本文提出的改进模型能够很好的模拟土体应力应变曲线, 需要说明的是, 传统双曲线模型由于自身的局限性无法得到图 4 中理想的模拟结果。

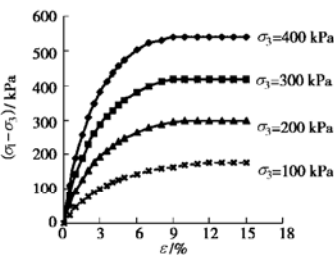


图 4 土体应力应变曲线模拟

Fig. 4 Simulation of soil stress-strain relationship

表 1 土体改进切线模量参数

Table 1 Parameters of improved tangent modulus of soil

c/kPa	$\varphi(^{\circ})$	λ	m	n	R_f
20.0	22.0	2.0	35.0	1.1	0.9

6 结 语

土体应力应变模型和切线模量的模拟是土体非线性模型的基本问题, 是岩土工程数值分析的前提条件, 本文对此作了较为详细的研究。

(1) 在传统初始切线模量、极限偏应力的基础上, 引入“半值强度指数”的概念, 建立了应力应变模型的数学特征方程, 分析了双曲线应力应变模型数学特征方程不独立的缺陷。

(2) 在试验数据分析的基础上, 提出了土体应力应变曲线的控制微分方程, 进一步建立了 3 参数新应力应变模型, 该模型数学性质与理想应力应变曲线吻合。

(3) 从数学上严格证明了双曲线模型是 3 参数新应力应变模型的特例。

(4) 在 3 参数新应力应变模型的基础上, 改进了非线性模型中土体切线模量的表达, 给出了确定参数的方法, 并采用改进的切线模量对 3 轴试验数据进行模拟。

参考文献:

[1] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理与计算[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1995.(QIAN Jia-huan, YIN Zong-ze. Soil mechanics theory and calculation [M]. Beijing: China Water Conservancy and Electricity Press, 1995.(in Chinese))

[2] 宰金珉, 宰金璋. 高层建筑基础分析与设计[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1993.(Zai Jin-min, Zai Jin-zhang. Analysis and design of tall buildings foundations [M]. Beijing: China Construction Industry Press, 1993.(in Chinese))

[3] TERZAGHI K, RALPH B P, GHOLAMERZA M. Soil mechanics in engineering practice[M]. New York: John Wiley & Sons, 1996.

[4] DUNCAN J M, BYRNE P, WONG K S, et al. Stress-strain and bulk modulus of parameters for finite element analysis of stress and movements in soil[R]. San Francisco: University of California Berkeley, 1980.

[5] LI J, DING D W. Nonlinear elastic behavior of fiber-reinforced soil under cyclic loading[J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2002, 22 (9): 977-983.

[6] Al-Shayea N, ABDULJAUWAD S, BASHIR R, Al-Ghamedy

- H. Determination of parameters for a hyperbolic model of soils[J]. Geotechnical Engineering, 2003, **156**(2):105-117.
- [7] SANCHAI Mitaim, EMMANUEL Detournay. Determination of ground reaction curve for hyperbolic soil model using the hodograph method[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2005, **42**(3):964-968.
- [8] HABIBAGAH G, MOKHBERI M. Hyperbolic model for volume change behavior of collapsible soils[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1998, **35**(2):264 - 272.
- [9] 何昌荣, 杨桂芳, 邓肯 - 张模型参数变化对计算结果的影响 [J]. 岩土工程学报, 2002, **24**(2):170 - 174.(HE Chang-rong, YANG Gui-fang. Effects of parameters of Duncan-Chang model on calculated results[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002, **24**(2):170 - 174.(in Chinese))
- [10] 王晓妮, 卢廷浩, 王伟. 土体非线性模型的分段剪切模量 [J]. 河海大学学报, 2006, **34**(2):204 - 207.(WANG Xiao-ni, LU Ting-hao, WANG Wei. Two-line-segment tangent modulus of soil nonlinear model[J]. Journal of Hohai University, 2006, **34**(2):204 - 207.(in Chinese))
- [11] 王伟. 基于能量耗散原理的土与结构接触面模型研究及应用[D]. 南京: 河海大学, 2006.(WANG Wei. Study on soil-structure interface model based on potential energy dissipating principle and its application[D]. Nanjing: Hohai University, 2006.(in Chinese))

上接第 451 页

《岩土工程学报》2006 年第 28 卷增刊被 EI 收录论文 (123 篇)

论文题目	作者	页码
北京某深基坑开挖监测实例	高华东	1853~1857
坑外搅拌桩加固对基坑变形的影响分析	胡承军, 刘 燕, 刘 涛	1858~1860
大面积深基坑开挖对在建公寓楼的影响分析	李伟强, 罗文林	1861~1864
超深圆形基坑的半逆筑法施工与监测	陈越峰, 张庆贺, 周 健, 王 义	1865~1869
风载作用下深基坑开挖对邻近高层建筑物的变形影响	潘军刚, 李大勇, 赵少飞	1870~1873
基坑开挖坑壁土压力原位监测与分析	姜晨光, 贺 勇, 刘 波, 朱佑国, 吴晓峰	1874~1876
深基坑内基础工程桩对软土强度影响试验分析	易念平, 张信贵	1885~1888
基坑变形监测及预警技术	宋建学, 郑 仪, 王原嵩	1889~1891
深基坑开挖引起的建筑物破坏风险评估	边亦海, 黄宏伟	1892~1896
地铁深基坑变形数据的挖掘分析与风险识别	廖少明, 刘朝明, 王建华, 彭芳乐	1897~1901
上海某轨道交通深基坑工程施工风险评估	周红波, 姚 浩, 卢剑华	1902~1906
上海典型地质条件变异性引起的基坑工程失效风险分析	陈 晖, 孙 莉, 李 韬, 许丽萍, 顾国荣	1907~1911
上海某深基坑工程风险识别与模糊评估	何锡兴, 周红波, 姚 浩	1912~1915
基坑工程风险的定量分析初探	李 韬, 许丽萍, 陈 晖, 顾国荣	1916~1920

(《岩土工程学报》编辑部)