

复变函数分析盾构隧道施工引起的地基变形

王立忠¹, 吕学金^{1, 2}

(1. 浙江大学岩土工程研究所, 浙江 杭州 310027; 2. 浙江省环境保护科学设计研究院, 浙江 杭州 310007)

摘 要: 半无限空间中孔洞受均布位移作用下的问题已由 Verruijt 采用复变函数解答, 而本文中给定椭圆化位移边界条件下的解答尚无文献报导。本文应用 Verruijt 的基本解法, 采用共形映射方法, 把包括一个圆形孔洞的半无限空间区域映射为圆环域。然后把这个区域内的解析函数展成 Laurent 级数的形式。利用 Muskhelishvili 的复变函数解法, 求得隧道洞周给定位移条件下的应力场和位移场。分析了不同埋深、不同泊松比对位移场的影响、不同埋深对应力场的影响。最后分析了 5 个盾构隧道实测数据与 4 种不同位移边界条件解的对比情况。分析结果表明: 笔者给出的第三、四边界条件的精确解对盾构隧道的设计有重要的实践意义。

关键词: 共形映射; 半无限空间; 洞周给定位移条件; 应力场与位移场

中图分类号: TU470

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2007)03-0319-09

作者简介: 王立忠(1969-), 男, 浙江奉化人, 教授, 博士生导师。E-mail: dzipan@tom.com。

A complex variable solution for different kinds of oval deformation around circular tunnel in an elastic half plane

WANG Li-zhong¹, LÜ Xue-jin^{1,2}

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China; 2. Environmental Science Research & Design

Institute of Zhejiang Province, Hangzhou 310007, China)

Abstract: Using the conformal mapping, the region of exclusion of a hole in a half plane was transferred into a cirque. Then the analytic functions could be expanded as Laurent series in this region. The stresses and displacements under given displacement could be solved by the complex method founded by Muskhelishvili. The influence of the displacements due to different depth and different Poisson's ratio was discussed, and the influence of the stresses due to different depth was discussed too. It was shown that the exact solutions of the third boundary condition suggested by the author was important in the designing of shield tunneling after the comparison of the solutions under four different conditions with the data observed in five different tunnels.

Key words: conformal mapping; a half plane with a hole; oval deformation around the hole; stress and displacement

0 引 言

众所周知, 软土中盾构隧道将引起地表沉降和地基侧向变形, 由于问题的复杂性, 历史上主要采用实测经验分析的方法, 如 Peck 的沉降正态分布曲线图等。对隧道开挖引起的桩基侧向变形的分析最近国际上也逐渐引起重视。带孔洞半空间的性状分析是弹性力学的基本课题之一, 历史上曾采用双极坐标法(Jeffery^[1]、Mindlin^[2-3])和复变函数方法进行求解。双极坐标法一般只求应力场, 未能给出位移场。而且孔洞距离地表较近时, 双极坐标法往往给出错误的数值计算结果。1987年 Sagaseta C^[4]采用镜像法给出了半无限空间隧道在土体缺失不排水条件下位移场的简洁公式, 但存在缺点: ①把孔洞周边的均匀变形作为了问题的边界条件, 而实际隧道变形具有椭圆化性; ②当镜像法的边界条件作修正时, 直接将其边界反力

作用在没有孔洞的半空间上, 当隧道浅埋时, 采用布新耐斯克解的误差可想而知; ③土体是不可以压缩的材料。1996年 Verruijt A 和 Booker J R^[5]改进 Sagaseta^[4]的两个假设, 即土体为可压缩材料和隧道变形可椭圆化, 但 Sagaseta 方法的固有缺陷仍然存在。1998年 Loganathan N 和 Poulos H G^[6]把 Verruijt A 和 Booker J R^[5]的工作进行了拓展, 以土体缺失函数替代了土体缺失常数。这个工作非常有意义: 经验性的土体缺失函数有了空间的分布。尽管理论结果与实测比较吻合, 但必须指出, 采用镜像理论求解该问题的缺陷仍然存在。2001年 Antonio Bobet^[7]从隧道衬砌与隧道周边土体两种不同介质相互作用的组合问题入手, 试图解决隧道孔洞周边变形模式的不确定性。但在隧道衬砌与

土体的变形协调条件中无形地采用了特定变形路径的假设(先是土体均匀变形,与衬砌接触后共同变形),这种假定违背了他的初衷。2004 年、2005 年, Kyung-Ho Park^[8-9]给出盾构隧道孔洞周边 4 种径向变形模式,但对应力函数的简化似乎没有说服力。可喜的是, Park 认真研究了隧道洞边的可能位移形态,为本文进一步研究奠定了基础。其实,解决给定位移下半空间包含一个孔洞的问题还有另外一种更重要的方法——复变函数。20 世纪以来,复变函数理论^[10]已被广泛地应用在弹性力学领域,如徐芝纶^[11]、Timoshenko^[12]、Muskhelishvili^[13]、路见可^[14]等人的力学专著中都有相关的论述。复变函数在推导平面弹性静力问题的最大优点在于:能把某些复杂几何构形的单连通域共形映射为几何构形较为简单的单连通域(例如单位圆内域或外域);能把包含一个孔洞的半无限空间共形映射为圆环域,然后在这些区域内运用解析函数理论,将待求的解析函数就由该区域的边值条件来确定。本文利用复变函数求解孔洞周边给定位移条件下包含圆形孔洞的半无限空间问题,避免了双极坐标法计算上的困难,也避免了镜像法中关于奇点假设的不足,而且在给出应力场的同时还直接给出位移场。均布位移条件下带有圆形孔洞的半无限空间问题已由 Verruijt A^[15-16]采用复变函数解得。然而隧道周边的径向变形并非是均匀的,将会有椭圆化的变形发生,如图 1 所示。Park^[8-9]总结了以往一些学者研究的隧道变形模式,简化出 4 种用三角级数表示的径向变形模式。作为问题的探讨,笔者参考文献[15]的做法,获得了相应其他三种非均匀变形条件下的精确解答。

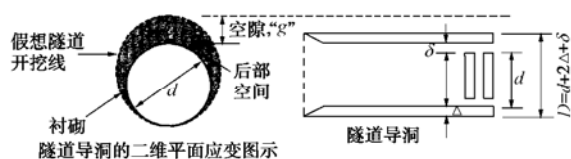


图 1 二维空隙参数 g 的定义

Fig. 1 Definition of gap g in 2D

本文的第 1~3 部分是推导过程,第 4 部分是理论结果的性状分析,第 5~7 部分是 4 种不同边界条件下理论解与 5 个不同隧道实测值的比较。如图 1 所示,在与实测值的比较中,有一个很重要的参数——空隙 g 需要重新说明。空隙 g 由 1982 年 Lo 和 Rowe、1983 年 Rowe 和 Kack、1992 年 Lee 等人引入,定义为“当量土体缺失”参数,由物理空隙、隧道掌子面引起的三维空间弹塑性变形和工人操作因子三部分组成,其实质为拱顶径向位移,具体计算详见 Loganathan N 和 Poulos H G 文献[5]的附录一。另外,4 种不同变形模式的比较是建立在相同土体缺失体积的条件之上。数

据分析表明:第三、四种边界条件的解更具有很好的实践意义。

1 问题的描述

在 z 平面(直角坐标系),图 2 给出了半无限空间孔洞的构形。 r_0 为隧洞半径, h 为孔洞中心到水平地表的距离, L 为 A 、 C 两点的距离。 A 为坐标原点, C 为孔洞内周线顶点, D 为孔洞内周线最低点。 R 区域为半无限空间除孔洞以外的区域。

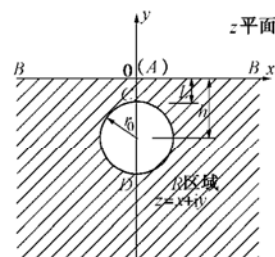


图 2 半无限空间的一个孔洞

Fig. 2 A half space with a circular cavity

引用 Muskhelishvili 平面问题的复变函数解法^[13],各应力、位移分量可通过两个在 R 区域内的解析函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 表达出来。应力公式如下

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\{\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}\}, \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\{z\phi''(z) + \psi'(z)\}, \quad (2)$$

即

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2\operatorname{Re}(\phi'(z)) - \operatorname{Re}(z\phi''(z) + \psi'(z)), \\ \sigma_y &= 2\operatorname{Re}(\phi'(z)) + \operatorname{Re}(z\phi''(z) + \psi'(z)), \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Im}(z\phi''(z) + \psi'(z)); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

位移公式如下:

$$2G(u + iv) = \kappa \cdot \phi(z) - z \cdot \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \quad (4)$$

其中 $G = E/(2 + 2\mu)$ 为剪切模量,对于平面应变问题 $\kappa = 3 - 4\mu$, μ 为泊松比。

在 z 平面,边界条件为

$$z = \bar{z} : \phi(z) + z \cdot \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} = 0, \quad (5)$$

$$|z + hi| = r : 2G(u + iv) = \kappa \cdot \phi(z) - z \cdot \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (6)$$

2 复变函数解法

2.1 共形映射

在 ζ 平面,图 3 给出了半无限空间孔洞构形映射后的表示。斜线标注部分为 γ 区域,是图 1 中 R 区域经共形映射后的区域。共形映射公式为

$$z = \omega(\zeta) = -ih \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}. \quad (7)$$

R 区域中的洞周线 $|z + hi| = r_0$ 、水平线 $z = \bar{z}$ 、点

A, B, C, D 分别映射为 γ 区域中的 $|\zeta| = \alpha, |\zeta| = 1$, 点 A', B', C', D' 。确定 α ($0 < \alpha < 1$) 的公式为

$$\frac{r_0}{h} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \quad (8)$$

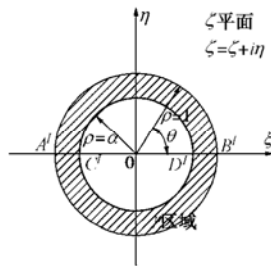


图3 共形映射区域

Fig. 3 Plane of conformal transformation

2.2 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在 ζ 平面的 Laurent 级数展开

$\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在 R 区域内是解析函数。映射函数 $\omega(\zeta)$ 是解析函数, 因此由复变函数理论得出, $\phi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 在 γ 区域内都是解析函数。 $\phi(\zeta)$ 和 $\psi(\zeta)$ 可以展成 Laurent 级数的形式:

$$\phi(z) = \phi(\omega(\zeta)) = \phi(\zeta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k}, \quad (9)$$

$$\psi(z) = \psi(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \zeta^{-k}, \quad (10)$$

同时 $\overline{z\phi'(z)} = \overline{\omega(\zeta) \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}}$, 令 $\zeta = \rho\sigma$ 且 $|\sigma| = 1$, 则

$$\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = -\frac{1}{2} \frac{(1 + \rho\sigma)(\sigma - \rho)^2}{\sigma^2(1 - \rho\sigma)}. \quad (11)$$

2.3 按 ζ 平面上的边界条件求级数系数

边界条件式 (5) 改写为

$$|\zeta| = 1: \phi(\zeta) + \omega(\zeta) \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = 0, \quad (12)$$

把式 (9) ~ (11) 代入式 (12) 解得

$$c_0 = -\bar{a}_0 - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}\bar{b}_1, \quad (13)$$

$$c_k = -\bar{b}_k + \frac{1}{2}(k-1)a_{k-1} - \frac{1}{2}(k+1)a_{k+1}, \quad k=1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

$$d_k = -\bar{a}_k + \frac{1}{2}(k-1)b_{k-1} - \frac{1}{2}(k+1)b_{k+1}, \quad k=1, 2, 3, \dots, \quad (15)$$

边界条件式 (6) 改写为

$$|\zeta| = \alpha: \left[\kappa \cdot \phi(\zeta) - \omega(\zeta) \cdot \frac{\phi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} \right]_{\zeta=\alpha\sigma} = 2G(u + iv) = f(\zeta) = f(\alpha\sigma). \quad (16)$$

令 $f^*(\alpha\sigma) = (1 - \alpha\sigma) \cdot f(\alpha\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \sigma^k$, 把式 (9) ~

(11)、(13) ~ (15) 代入式 (16) 解得

$$(1 - \alpha^2)(k+1)\bar{a}_{k+1} - (\alpha^2 + \kappa\alpha^{-2k})b_{k+1}$$

$$= (1 - \alpha^2)k\bar{a}_k - (1 + \kappa\alpha^{-2k})b_k + A_{-k}\alpha^{-k}, \quad k=1, 2, 3, \dots, \quad (17)$$

$$(1 + \kappa\alpha^{2k+2})\bar{a}_{k+1} + (1 - \alpha^2)(k+1)b_{k+1} = \alpha^2(\alpha^2 + \kappa\alpha^{2k})\bar{a}_k + (1 - \alpha^2)kb_k + \bar{A}_{k+1}\alpha^{k+1}, \quad k=1, 2, 3, \dots, \quad (18)$$

$$(1 - \alpha^2)\bar{a}_1 - (\kappa + \alpha^2)b_1 = A_0 - (\kappa + 1)a_0, \quad (19)$$

$$(1 + \kappa\alpha^2)\bar{a}_1 + (1 - \alpha^2)b_1 = \bar{A}_1\alpha + \alpha^2(1 + \kappa)\bar{a}_0. \quad (20)$$

注意: 公式 (18) 修正了 Verruijt A^[15] 文献中公式 (31) 中的加减符号错误。

3 洞周 4 种给定径向位移条件下的解答

3.1 边界条件的给出

如图 4 所示, Park^[8] 简化出了隧道周边四种径向位移边界条件。采用图 5 极坐标 (原点在 O') 的表述如下:

$$\text{BC-1: } u_r(r=r_0) = -u_1, \quad (21)$$

$$\text{BC-2: } u_r(r=r_0) = -u_2(1 + \sin\theta'), \quad (22)$$

$$\text{BC-3: } u_r(r=r_0) = -u_3(1 + \sin\theta' - \frac{1}{2}\cos^2\theta'), \quad (23)$$

$$\text{BC-4: } u_r(r=r_0) = -\frac{u_4}{4}(5 + 3\sin\theta' - 3\cos^2\theta'). \quad (24)$$

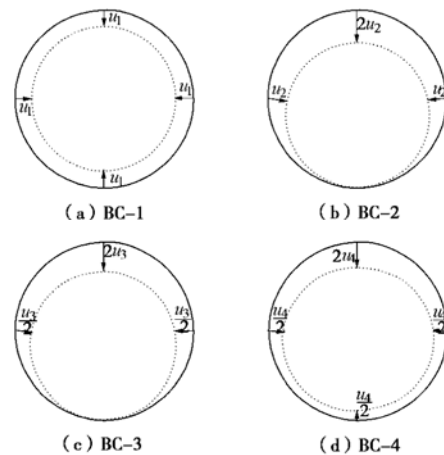


图4 4种径向位移边界条件

Fig. 4 Four boundary conditions of radial deformation

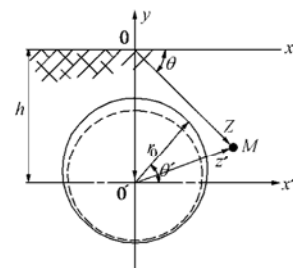


图5 边界条件的极坐标表示

Fig. 5 Boundary condition in polar coordinate

3.2 相同沉降体积下各最大位移关系

当 $u_i (i=1 \dots 4) \ll r_0$, 有以下关系

$$\text{BC-1: } S_1 = 2\pi r u_1, \quad (25)$$

$$\text{BC-2: } S_2 = 2\pi r u_2, \quad (26)$$

$$\text{BC-3: } S_3 = \frac{3}{4}(2\pi r u_3), \quad (27)$$

$$\text{BC-4: } S_4 = \frac{7}{8}(2\pi r u_4). \quad (28)$$

建立相同土体缺失体积的条件: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ 。得出

$$u_1 = u_0, u_2 = u_0, u_3 = \frac{4}{3}u_0, u_4 = \frac{8}{7}u_0. \quad (29)$$

3.3 边界条件的变换

由于 Verruijt^[15]采用复变函数建立的 xoy 坐标系与 Park^[8]采用 $o'x'$ 极坐标不同, 因此隧道周边的位移边界条件要进行变换。令 M 为 xoy 坐标系中的任意一点, 点位表示为 z ; 点 M 在 $x'o'y$ 坐标系中的点位表示为 z' , 两者之间的关系为

$$z = z' - ih. \quad (30)$$

当点 M 在隧道周边时, 在两坐标系中分别表示为 z_c 、 z'_c , 显然满足式 (30)。如图 5, 当点 M 在隧道周边时, 可建立关系:

$$\sin \theta' = \frac{z'_c - \bar{z}'_c}{2ir_0}; \quad \cos \theta' = \frac{z'_c + \bar{z}'_c}{2r_0}, \quad (31)$$

$$z_c = \omega(\alpha\sigma) = -ih \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} \frac{1+\alpha\sigma}{1-\alpha\sigma}. \quad (32)$$

从式 (30) ~ (32) 和式 (8) 推出

$$\sin \theta' = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha} - \frac{(1-\alpha^2)^2}{2\alpha} \frac{1}{(1-\alpha\sigma)(1-\alpha\sigma^{-1})},$$

$$\cos \theta' = \frac{i(1-\alpha^2)}{2} \frac{(\sigma^{-1}-\sigma)}{(1-\alpha\sigma)(1-\alpha\sigma^{-1})}. \quad (33)$$

(1) BC-1 的变换

BC-1 边界条件的变换已由 Verruijt^[15]完成。各项系数如下:

$$A_0 = -2iGu_1\alpha, A_1 = 2iGu_1,$$

$$A_k = 0(k \geq 2), A_{-k} = 0(k \geq 1). \quad (34)$$

(2) BC-2 的变换

把式 (21) 转化到如图 2 所示的 z 平面上, 当 $|z+ih|=r_0$ 时,

$$\bar{u}|_{|z_c+ih|=r_0} = -u_2 \left(1 + \frac{z_c - \bar{z}_c + 2ih}{2ir_0} \right) \cdot \frac{z_c + ih}{r_0}. \quad (35)$$

把式 (30) 转化到如图 3 所示的 ζ 平面上, 当 $|\zeta|=\alpha$ 时,

$$\bar{u}|_{\rho=\alpha} = -u_2 \left(\frac{(1+\alpha)^2}{2\alpha} - \frac{(1-\alpha^2)^2}{2\alpha} \cdot \frac{1}{(1-\alpha\sigma)(1-\alpha\sigma^{-1})} \right) i \cdot \frac{\alpha-\sigma}{1-\alpha\sigma}. \quad (36)$$

故

$$f^*(\alpha\sigma) = (1-\alpha\sigma) \cdot f(\alpha\sigma) = 2G\bar{u}|_{\rho=\alpha} \cdot (1-\alpha\sigma)$$

$$= A_0 + A_1\sigma + \sum_{k=2}^{\infty} A_k\sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_{-k}\sigma^{-k}, \quad (37)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -(1+\alpha)^2 Gu_2 i, A_1 = (2+3\alpha-\alpha^3) Gu_2 i, \\ A_k &= -(1-\alpha^2)^2 \alpha^{k-2} Gu_2 i, \quad (k \geq 2), \\ A_{-k} &= 0, \quad (k \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

(3) BC-3 的变换

式 (23) 的变换过程同 (2)。各项系数如下:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -(1+\alpha)^2 Gu_3 i, A_1 = \left(\frac{3}{2} + 3\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 - \frac{1}{2}\alpha^4 \right) Gu_3 i, \\ A_k &= -\frac{(\alpha^2-1)^2(4\alpha+3) + (\alpha^2-1)^3(k+1)}{4} \alpha^{k-3} Gu_3 i, \quad (k \geq 2), \\ A_{-k} &= \frac{(\alpha^2-1)^2}{4} \alpha^{k-1} Gu_3 i, \quad (k \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

(4) BC-4 的变换

式 (24) 的变换过程同 (2)。各项系数如下

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\left(\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\alpha + \frac{3}{4}\alpha^2 \right) Gu_4 i, \\ A_1 &= \left(\frac{7}{4} + \frac{9}{4}\alpha + \frac{3}{2}\alpha^2 - \frac{3}{4}\alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha^4 \right) Gu_4 i, \\ A_k &= -\frac{3(\alpha^2-1)^2(k\alpha^2+\alpha^2+2\alpha+2-k)}{8} \alpha^{k-3} Gu_4 i, \quad (k \geq 2), \\ A_{-k} &= \frac{3(\alpha^2-1)^2}{8} \alpha^{k-1} Gu_4 i, \quad (k \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

3.4 程序编制过程

根据问题的对称性, Verruijt^[15]假定所有系数均为纯虚数, 由初始常数 a_0 值代入式 (17), (18) 求得 a_k , b_k ; 因 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 是收敛级数, 故可以推出 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$, 因此可以求出 a_0 , 从而由式 (13) ~ (15), 式 (17) ~ (20) 求出 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的各项系数。

与 Verruijt 不同, 本文不采纳对称性假设, 直接迭代计算, 然后进行收敛判断, 过程如下:

(1) 对方程式 (17)、(18) 进行极限分析, 结合公式 (34)、(38)、(39)、(40) 可以看出, 当 A_k 、 $\overline{A_{k+1}}$ 趋向 0, $k \geq N_1$ (N_1 为某一整数) 时, 当 $k \geq N_2$ (N_2 为某一整数), $\overline{a_{k+1}} = -b_k$ 也趋向一固定值。若要使得 (9)、(10) 级数收敛, 则必须 $\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{a_{k+1}} = -\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$, 于是可求得 a_0 , 从而得出两个级数的各项系数 (迭代计算次数为 $\max(N_1, N_2)$) (注: 本程序中 N_1 由 $\alpha^k \leq 10^{-5}$ 确定, 本程序中 N_1 由 $\alpha^k \leq 10^{-5}$ 确定, N_2 由级数相邻项系数之差 $\leq 10^{-5}$ 确定)。

(2) 利用公式 (1) ~ (4) 可以得出土体的应力场和位移场 (由于无限远处的位移为零, 所以各点位移要减去无限远处位移)。

4 计算结果分析

各应力分量的计算见公式 (3), 文中计算结果“+”、“-”的规定: 拉应力为正, 压应力为负; 位移

u 沿 x 轴正向为正, 位移 v 沿 y 轴正向为正, 反之则为负。

4.1 平面应变位移场分析

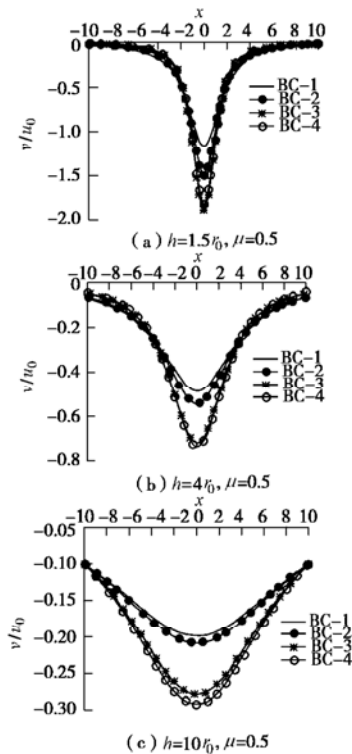


图 6 v/u_0 曲线

Fig. 6 The curves of v/u_0

平面应变问题位移计算公式为

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re} \left\{ \frac{(3-4\mu)(1+\mu)}{E} \phi(z) - \frac{(1+\mu)}{E} [z\phi'(z) + \overline{\psi(z)}] \right\}, \\ v = \operatorname{Im} \left\{ \frac{(3-4\mu)(1+\mu)}{E} \phi(z) - \frac{(1+\mu)}{E} [z\phi'(z) + \overline{\psi(z)}] \right\}. \end{cases} \quad (41)$$

(1) 不同 h/r_0 和位移边界条件对沉降槽的影响

算例选用的计算参数为: 泊松比 μ 取 0.5, 孔洞半径 $r_0=1$, 孔洞中心距水平线 $h=1.5r_0, 4r_0, 10r_0$, $E=1$, $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=\frac{4}{3}$, $u_4=\frac{8}{7}$; $y=0$ 。

图 6 分别给出了不同隧道埋深 $h=1.5r_0, 4r_0, 10r_0$ 分别对应的 v/u_0 曲线图。结果表明:

a) 随着相对埋深的增加, 4 种边界条件分别对应的沉降槽最大深度均减小, 沉降盆曲率降低也很大。

b) $h \leq 4r_0$ 时, 4 种边界条件对应的沉降槽最大深度关系为: $v_{BC-3} < v_{BC-4} < v_{BC-2} < v_{BC-1}$ 。 $h > 4r_0$ 时, 4 者关系为: $v_{BC-4} < v_{BC-3} < v_{BC-2} < v_{BC-1}$, 且 $v_{BC-4} \approx v_{BC-3}$, $v_{BC-2} \approx v_{BC-1}$ 。

c) $h=1.5r_0$ 时, 4 种边界条件分别对应的沉降槽深度曲线在 $x=\pm 2r_0$ 附近有交点; $h=4r_0$ 时, 4 条曲线在 $x=\pm 4r_0$ 附近有交点; $h=10r_0$ 时, 4 条曲线在 $x=\pm 10r_0$ 附近有交点。交点位置与 h/r_0 有一定的对应

关系。

(2) 不同泊松比 μ 对沉降槽的影响

算例选用的计算参数为: 泊松比 μ 取 0.25, 0.5, 孔洞半径 $r_0=1$, 孔洞中心距水平线 $h=1.5r_0$, $E=1$, $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=\frac{4}{3}$, $u_4=\frac{8}{7}$, $y=0$ 。

以 BC-3, BC-4 为例, 图 7 分别给出了 $h=1.5r_0$ ($\mu=0.25, 0.5$), $1.5r_0$ ($\mu=0.25, 0.5$) 分别对应的 v/u_0 曲线图。结果表明:

a) 无论是埋设较深的隧道 ($h=10r_0$) 还是埋设较浅的隧道 ($h=1.5r_0$), 泊松比 μ 对隧道沉降槽深度的影响比较大。泊松比越小, 沉降槽深度越大。

b) 在 4 种不同边界条件下埋设较深隧道 ($h=10r_0$) 的沉降槽深度受泊松比的影响程度要比埋设较浅 ($h=1.5r_0$) 的少。

c) 在隧道埋设较深的情况下, 不管泊松比怎样变化总有: $v_{BC-4} \approx v_{BC-3}$ 。

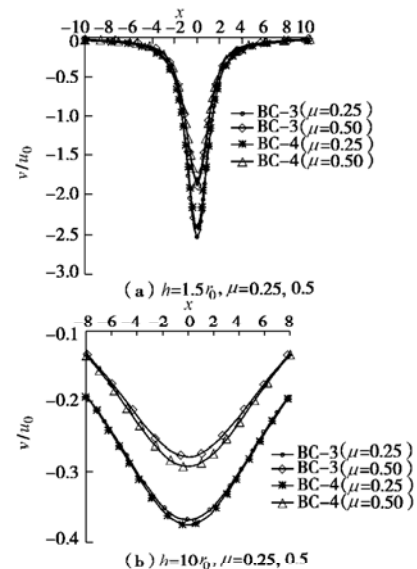


图 7 v/u_0 曲线

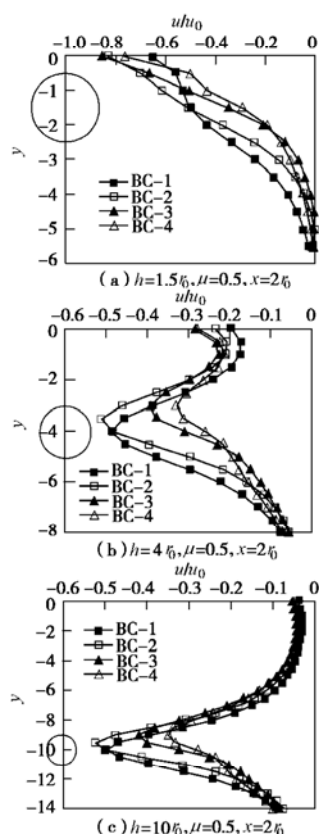
Fig. 7 The curves of v/u_0

(3) 不同位移边界条件和 h/r_0 对水平位移的影响

算例选用的计算参数为: 泊松比 μ 取 0.5, 孔洞半径 $r_0=1$, 孔洞中心距地表 $h=1.5r_0$, $h=4r_0$, $h=10r_0$, $x=2r_0$, $E=1$, $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=\frac{4}{3}$, $u_4=\frac{8}{7}$, $y=0$ 。

图 8 分别给出了 $h=1.5r_0, 4r_0, 10r_0$ 分别对应的 $x=2r_0$ 处水平位移 u/u_0 曲线图。结果表明:

a) 隧道埋设深度越浅, 同一纵断面隧道水平位移的最大值就越大; 当小于某一埋设深度, 水平位移最大值出现的位置趋向于地表面。当大于某一埋设深度, 水平位移最大值出现的位置趋向于隧道的腰线且各边界条件下水平位移的最大值略有回升。

图 8 u/u_0 曲线Fig. 8 The curves of u/u_0

b) BC-1 和 BC-2 的曲线很接近, BC-3 和 BC-4 的曲线很接近。当埋设深度较深 ($h=10r_0$) 时, 4 种不同边界条件对应的水平位移曲线比较一致, 但各曲线仍然有相互交叉的现象。

4.2 应力场分析

度量单位的规定: 孔洞周边的位移采用单位位移, 孔洞半径采用单位长度。计算的应力为由洞周位移引起的附加应力, 实际应力为附加应力与重力场的叠加。第一、第三主应力计算公式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

图 9 中纵坐标 $\frac{\sigma_1}{2G}(\frac{r_0}{u_0})$ 、 $\frac{\sigma_3}{2G}(\frac{r_0}{u_0})$ 无量纲的含义为: 第一、第三主应力单位同弹性模量, 大小正比于孔洞周边位移 u_0 。

算例选用的计算参数为: 泊松比 μ 取 0.25、0.5, 孔洞半径 $r_0=1$, 孔洞中心距水平线 $h=1.5r_0$, $E=1$, $u_1=1$, $u_2=1$, $u_3=\frac{4}{3}$, $u_4=\frac{8}{7}$, $y=0$ 。

图 9 分别给出了 $h=1.5r_0$ ($\mu=0.5$),

$h=10r_0$ ($\mu=0.5$), $h=1.5r_0$ ($\mu=0.25$), $h=10r_0$ ($\mu=0.25$) 分别对应 $\frac{\sigma_1}{2G}(\frac{r_0}{u_0})$, $\frac{\sigma_3}{2G}(\frac{r_0}{u_0})$ 曲线图。

结果表明:

(1) 水平面上满足应力边界条件, 受压区长度随隧道埋设深度的增加而增加, 受压区长度受泊松比的影响比较小。

(2) 隧道埋设深度较浅时 (如 $h=1.5r_0$) 时, 4 种边界条件对应的最大压应力的关系为: $(\sigma_3)_{BC-4} < (\sigma_3)_{BC-3} < (\sigma_3)_{BC-2} < (\sigma_3)_{BC-1}$ 。隧道埋设深度较深时 (如 $h=10r_0$) 时, 4 者关系为: $(\sigma_3)_{BC-4} \approx (\sigma_3)_{BC-3} < (\sigma_3)_{BC-2} \approx (\sigma_3)_{BC-1}$, 同沉降槽最大深度的变化规律比较一致。

(3) 随沉降槽深度的增加, 水平面上最大压应力也相应增加, 受压区长度变短。

5 沉降槽现场实测与理论计算的比较

Lo 和 Rowe^[17]采用了弹塑性有限元对盾构隧道固体的位移场进行了深入的分析, 该研究主要对拱顶位移做了性状分析, 未给出隧道周边位移变化的具体模式和数值 (如位移的径向和切向值)。本文采纳了 Lo 和 Rowe^[17]提供的拱顶位移值 g , 并假定隧道周边仅有径向位移且在相同的土体缺失条件 ($S=2\pi r_0 g$) 下, 分析了各种椭圆化位移边界条件下场地的变形。

表 1 给出了 5 个隧道的几何尺寸、土性参数等 (Loganathan 和 Poulos, 1998^[6])。现取参数如下: $E=E_u$, $\mu=0.5$, $u_0=g$ 。

图 10 分别给出了 Heathrow 快速火车隧道、Thunder Bay 隧道、绿色公园隧道、巴塞罗那网络延伸地铁隧道及 Bangkok 下水道的地表沉降实测资料与 4 种不同边界条件下理论解的对比图。规律如下:

(1) 边界条件 BC-3、BC-4 的解比 BC-1、BC-2 的解更加接近实测资料。BC-3、BC-4 的地表中轴线沉降与沉降槽深度的偏差为 5%~20%。

(2) 巴塞罗那网络延伸地铁隧道、Bangkok 下水道的理论曲线与实测曲线形状几乎相似, 数值的大小可能与弹性模量取值有关。绿色公园隧道的理论曲线与实测曲线主要部分几乎重合。

(3) 经与实测比较的 BC-3、BC-4 的理论曲线要优于 1996 年 Verruijt A 和 Booker J R^[5]、Park^[8-9]所得到的曲线。

6 水平侧移实测与理论计算的比较

图 11 分别给出了 Heathrow 快速火车隧道距中心线 6 m 纵断面处、Heathrow 快速火车隧道距中心线 9 m

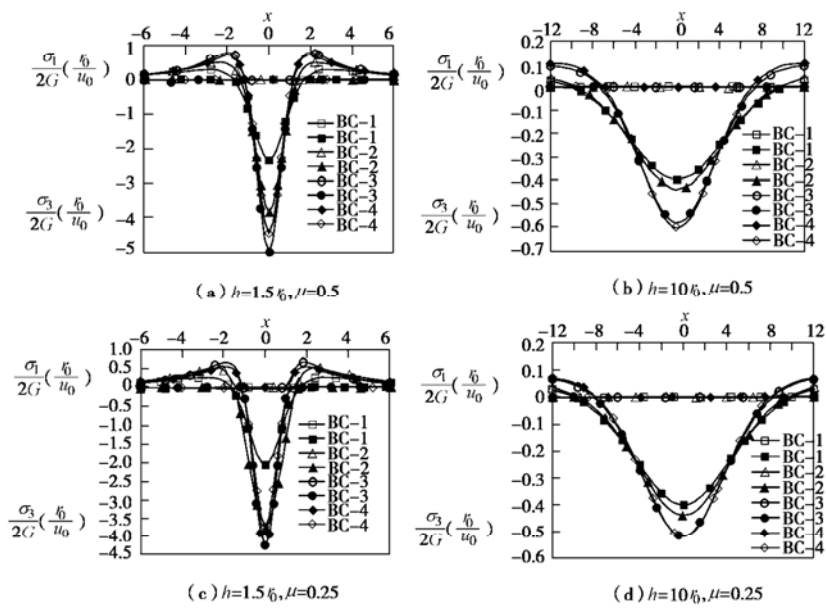


图 9 $\frac{\sigma_1}{2G}(\frac{r_0}{u_0})$, $\frac{\sigma_3}{2G}(\frac{r_0}{u_0})$ 曲线

Fig. 9 The curves of $\frac{\sigma_1}{2G}(\frac{r_0}{u_0})$, $\frac{\sigma_3}{2G}(\frac{r_0}{u_0})$

表 1 隧道几何尺寸及土性

Table 1 Geometry and soil conditions of the tunnels (Loganathan and Poulos, 1998)

隧道名称	$h, d/\text{m}$	E_u/MPa	$\gamma/(\text{kN} \cdot \text{m}^{-3})$	空隙 g/mm	土质	参考资料
Heathrow 快速火车隧道	19, 8.5	35	19	58	伦敦硬黏土	Deane 和 Bassett(1995)
Thunder Bay 隧道	10.7, 2.47	10	18	164	淤泥质软黏土	Rowe 和 kack(1983)
绿色公园隧道	29.4, 4.14	40	19	34	伦敦黏土	Rowe 和 Kack(1983)
巴塞罗那网络延伸地铁隧道	10.0, 8.0	25	18	31	砂砾质硬黏土	Ledesma 和 Romero(1997)
Bangkok 下水道	18.5, 2.66	20	17	81	软黏土到硬黏土	Phienwej(1997);Ramasamy(1992)

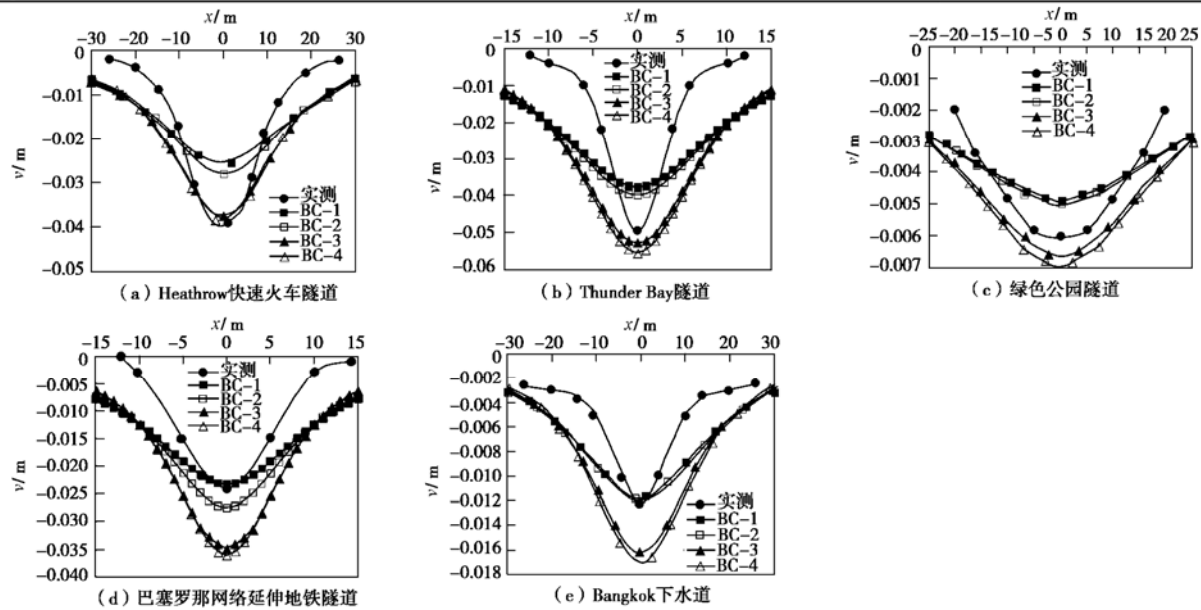


图 10 4 种边界条件地表沉降解的比较

Fig. 10 Comparison of solutions of surface settlement for four different boundary conditions

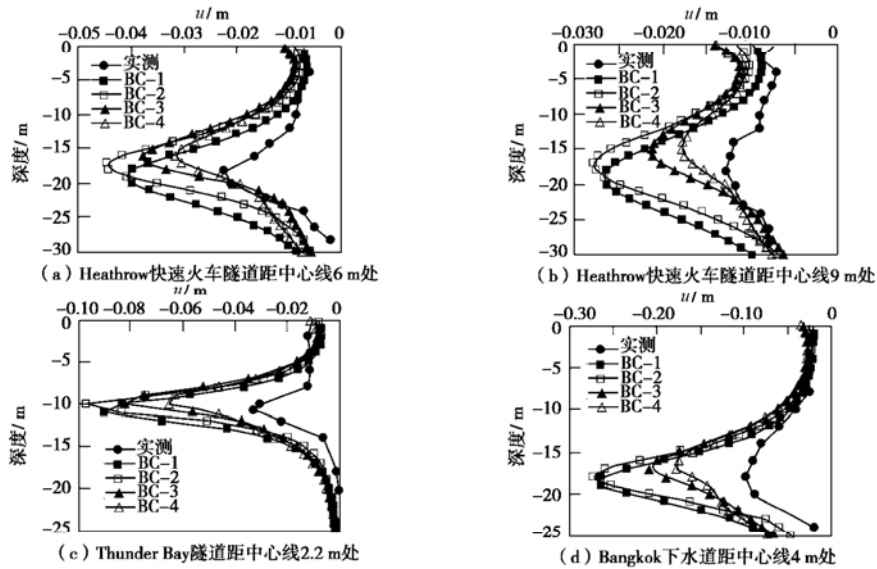


图 11 4 种边界条件水平位移解的比较

Fig. 11 Comparison of solutions of lateral displacement for four different boundary conditions

纵断面处、Thunder Bay 隧道距中心线 2.2 m 纵断面处、Bangkok 下水道距中心线 4 m 纵断面处水平位移实测资料与相同位置在 4 种不同边界条件下水平位移理论解的对比图。规律如下：

(1) 4 种不同边界条件下水平位移理论解的变化规律均同实测水平位移的变化规律。BC-3、BC-4 的解比 BC-1、BC-2 的解更加接近实测资料，BC-4 的解最好。

(2) BC-4 的解可以作为水平位移的保守估计。

7 中轴线处实测沉降数据与理论计算的比较

图 12 分别给出了 Heathrow 快速火车隧道距中心线处、Thunder Bay 隧道距中心线处、绿色公园隧道中心线处垂直位移实测资料与相同位置在 4 种不同边界条件下垂直位移理论解的对比图。规律如下：

(1) 4 种不同边界条件下垂直位移理论解的变化规律均同实测垂直位移的变化规律。BC-3、BC-4 解的曲线比较接近，数值上要比 BC-1、BC-2 的小，而 BC-1、BC-2 解的曲线更加接近实测资料（图 11 (a) 除外），这可能与工程实际非均一的土层有关。

(2) BC-3、BC-4 的解可以作为垂直位移的保守估计。

8 结 语

采用半无限空间孔洞问题的复变函数解法，考虑隧道周边变形的椭圆化分布，本文获得了洞周在第二、第三、第四位移边界条件下位移场和应力场的精确解答。然后对不同埋深、不同泊松比对位移场的影响，

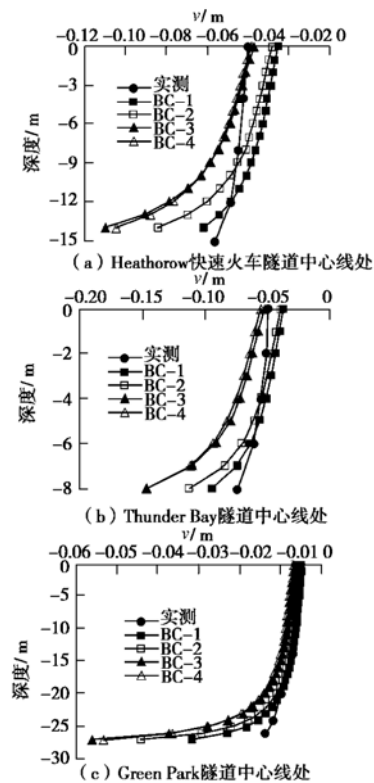


图 12 4 种边界条件垂直位移解的比较

Fig. 12 Comparison of solutions of vertical displacement for four different boundary conditions

不同埋深对应力场的影响进行了分析，总结出了一些很有意义的规律。最后分析了 5 个隧道实测数据与 4 种不同位移边界条件解的对比情况。从 4 种不同边界条件的解与实测的数据的对比分析及与 1996 年 Verruijt A 和 Booker J R^[5]、Park^[8-9]所得到的结果对比分析知，第三、第四位移边界条件下的解与实际情况比较吻合。但是一般地下隧道工程很少进行基底监测，

因此在实际工程中建议采用第三位移边界条件下的解。

综上所述, 本文一方面从理论上完善了半无限空间含一个孔洞在孔洞周边不同位移边界条件下的求解过程, 另一方面将对盾构隧道的具体设计具有重要的指导意义。

参考文献:

- [1] JEFFERRY G B. Plane stress and plane strain in bipolar co-ordinates, Transactions of the Royal Society, London, England, 1920.
- [2] MINDLIN Raymond D. Stress distribution around a tunnel[J]. ASCE. 1940.
- [3] MINDLIN Raymond D. Stress distribution around a hole near the edge of a plate under tension[C]// Proceedings of the Society of Experimental Stress Analysis, 1948.
- [4] SEGASETA C. Analysis of undrained soil deformation due to ground loss[J]. Geotechnique, 1987,37(4):301 - 326.
- [5] VERRUIJT A, BOOKER J R. Surface settlements due to deformation of a tunnel in an elastic half plane[J]. Geotechnique, 1996,46(4):753 - 756.
- [6] LOGANATHAN N, POULOS H G, Fellow. Analytical prediction for tunneling-induced ground movements in clay[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 1998.
- [7] BOBET Antonio. Analytical solution for shallow tunnels in saturated ground[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2001.
- [8] PARK Kyung-Ho. Elastical solution for tunneling-induced ground movement in clays[J]. International Journal of Geomechanics. 2004.
- [9] PARK Kyung-Ho. Analytical solution for tunneling-induced ground movement in clays[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2005,20:249 - 261.
- [10] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.(ZHONG Yu-quan. Theory of complex variable function[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004.(in Chinese))
- [11] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.(XU Zhi-lun. Teory of elasticity[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004.(in Chinese))
- [12] TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of Elasticity[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.(TIMOSHENKO S P, GOODIER J N. Theory of Elasticity[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)
- [13] MUSKHELISHVILI N I. Mathematical theroy of elasticity[M]. Leyden: International Publishing, 1954.
- [14] 路见可. 平面弹性复变方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.(LU Jian-ke. Plane elastic complex variable method[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2002.(in Chinese))
- [15] VERRUIJT A. A complex variable solution for a doforming circular tunnel in an elastic half plane[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1997,21:77 - 89.
- [16] VERRUIJT A. Deformations of an elastic half plane with a circular cavity[J]. Int J Solids Structures, 1998,35.
- [17] LEE K M, ROWE R K, LO K Y. Subsidence owing to tunnelling. 1: Estimating the gap parameter[J]. Can Geotech J, 1992,29:929 - 940.