

各向异性和非均质地基土上浅基础的极限承载力

徐干成¹, 李成学¹, 刘平²

(1. 空军工程设计研究局, 北京 100068; 2. 江苏省徐州市规划局勘察测绘研究院, 江苏 徐州 210007)

摘要:应用塑性极限分析法上限定理及变分原理, 确定非均质及各向异性地基土的极限承载力, 导出了确定非均质和各向异性地基土极限承载力的基本公式。利用编制的计算机程序分析了土非均质和各向异性参数对承载力的影响。将结果与其他学者结果进行了比较, 说明用本文提出的方法获得的承载力结果更为可靠。

关键词:各向异性; 非均质; 极限承载力; 极限分析法

中图分类号: TU470 文献标识码: A 文章编号: 1000-4548(2007)02-0164-05

作者简介:徐干成(1958-), 男, 浙江龙游人, 博士, 博士生导师, 主要从事地下防护工程研究设计。E-mail: xuganchg@public3.bta.net.cn。

Ultimate bearing capacity of shallow footing on anisotropic and nonhomogeneous clays

XU Gan-cheng¹, LI Cheng-xue¹, LIU Ping²

(1. Design and Research Bureau of Air Force Engineering, Beijing 100068, China; 2. Survey and Mapping Research Institute of Xuzhou Planning Agency, Xuzhou 210007, China)

Abstract: By use of the upper limit theorem of plastic limit analysis and variational principle, the ultimate bearing capacity of anisotropic and non-homogeneous foundation soils were ascertained, and the basic formulas were derived. It was analyzed with the computation program how the anisotropic and non-homogeneous parameters influenced the bearing capacity. The results were compared with other scholar's results. It was shown that the bearing capacity obtained by this method was more reliable.

Key words: anisotropy; non-homogeneous; ultimate bearing capacity; limit analysis

0 引言

实际工程中, 大多数地基土都是自然沉积而成, 具有各向异性和非均质性, 许多学者就地基土各向异性和非均质性对地基承载力的影响用各种方法作了研究, 如用滑移线场理论^[1]、极限分析理论, 但假定地基破坏机构为圆弧形^[2-3]或普朗得尔-太沙基破坏形式^[4]来获得非均质和各向异性地基的极限承载力, 由于滑移线场理论获得的解答既非真实承载力的上限, 也非其下限, 故给从事实际设计的工程师带来不便。文献^[2]假定破坏机构为圆弧形, 这与地基实际破坏情况不符, 文献^[4]虽然假定破坏形式为普朗得尔-太沙基形式, 但也有较大近似性。本文利用塑性极限分析法上限定理, 结合变分方法, 不必事先假定地基破坏形式, 确定出各向异性和非均质地基在外载作用下处于极限平衡状态时的临界滑动面和地基极限承载力, 该承载力是真实承载力的最小上限。

1 分析方法和基本方程

1.1 问题的描述

(1) 计算简图

图1为一半无限地基平面上的条形基础(D_0 为基础埋深)。假定地基土为刚塑性, 地基光滑的平面问题, 且地基破坏为整体剪切破坏, 故存在两条对称滑裂面曲线(图中仅示出一条), 滑裂各自从基底端点开始, 文章目的就是在给定地基土强度参数及基础几何尺寸前提下, 确定地基达到临界滑动状态时的极限承载力 Q_m 。

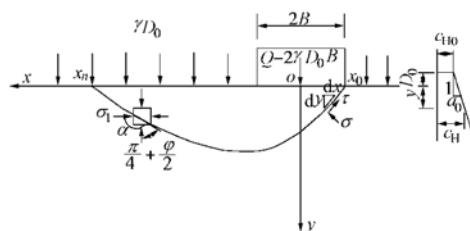


图1 条形浅基础极限承载力计算简图

Fig. 1 Ultimate bearing capacity of shallow strip foundation

(2) 地基土的非均质性和各向异性

如引言所述, 大多数地基土由于自然沉积而表现为非均质性和各向异性, 而且已有的研究试验表明, 对弱超固结土, 如果滑裂面平行于土沉积方向 (即垂直方向), 则土抗剪强度最高, 而滑裂面平行于水平方向时, 土抗剪强度最低, 土的抗剪强度随着滑裂面的方向不同而改变^[5], 文献^[6]根据现场和实验室试验, 提出了考虑土各向异性的黏结力的表达式, 本文根据文献^[6]的研究成果采用如下各向异性土黏结力的计算公式:

$$c_{\alpha} = c_H + (c_V - c_H) \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \alpha \right) \quad (1)$$

式中, c_H , c_V 分别为水平和竖直方向的土黏聚力, c_{α} 为沿滑裂面方向上的土黏聚力, α 为滑裂面与 x 轴之间的夹角 (图 1), φ 为土内摩擦角, 且假定为常数。

土的非均质性假定为沿深度成线形变化,

$$c_H = c_{H0} + a_0(y + D_0) \quad (2)$$

式中, c_{H0} 为 $y = -D_0$ 处水平向黏聚力, a_0 为黏聚力随深度变化的系数。

将 $v' = \tan \alpha$ 代入式 (1) 并令 $k = \frac{c_V}{c_H}$, 则有

$$c_{\alpha} = c_H [1 + (k-1) \frac{(1 + K_p v')^2}{(1 + K_p^2)(1 + y'^2)}] \quad (3)$$

式中, $K_p = \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$ 。

(3) 破坏准则

假定土材料为理想塑性, 且遵循如下破坏准则:

$$\tau(x) = f(\sigma) = c_{\alpha} + \sigma(x) \psi_s \quad (4)$$

$$\psi_t = \frac{df}{d\sigma} = \psi_s + \sigma \frac{d\psi_s}{d\sigma} \quad (5)$$

式中, $\psi_s = \tan \varphi_s$, $\psi_t = \tan \varphi_t$, ψ_s , ψ_t 意义如图 2 所示, 式(4)是正应力与剪应力之间一般的非线性摩擦关系。

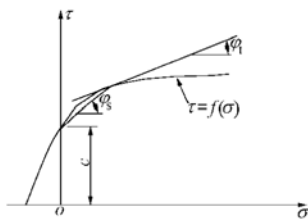


图 2 土材料破坏准则

Fig. 2 Damage rule of soil materials

1.2 平衡方程

由图 1, 容易得到竖直、水平方向力平衡方程和关于 o 点力矩平衡方程:

$$V = 2B\gamma D_0 + \int_{x_0}^{x_n} \{ \sigma(1 + \psi_s y') + c_H [1 + (k-1) \frac{(1 + K_p y')^2}{(1 + K_p^2)(1 + y'^2)}] y' -$$

$$\gamma(y + D_0) \} dx - Q \quad (6)$$

$$H = \int_{x_0}^{x_n} \{ \sigma(\psi_s - y') + c_H [1 + (k-1) \frac{(1 + K_p y')^2}{(1 + K_p^2)(1 + y'^2)}] y' \} dx \quad (7)$$

$$M = \int_{x_0}^{x_n} \{ \sigma[\varphi_s(y - y'x) - (x + y'y)] + c_H [1 + (k-1) \frac{(1 + K_p y')^2}{(1 + K_p^2)(1 + y'^2)}] (y - y'x) + \gamma(y + D_0)x \} dx \quad (8)$$

1.3 上限定理及承载力表达式

极限分析的上限定理可叙述为, 对系统中任意假定的滑动体, 当外力 (包含自重) 做功速率超过其内能耗散速率时, 地基将产生滑裂破坏。

根据上限定理, 整个地基系统中外荷载所做功的速率 $\dot{W}_{ex}$ 与其内能耗散速率 D 相等时, 即

$$\dot{W}_{ex} = D \quad (9)$$

便可得到地基极限承载力。

式 (9) 可写为

$$\dot{W} = \dot{W}_{ex} - D = 0 \quad (10)$$

式 (10) 为虚功原理的表达式, 即内外力所做虚功之和为 0。

对于图 1 所示的地基滑裂系统可求得 $\dot{W}$ 如下:

$$\dot{W} = \delta \dot{u}' H + \delta \dot{v}' V + \delta \dot{\Omega}' M = 0 \quad (11)$$

式中, $\delta \dot{u}'$, $\delta \dot{v}'$ 分别为潜在滑裂体水平和竖直方向虚位移速率, $\delta \dot{\Omega}'$ 为转动虚位移速率, 在式 (11) 中, 取 $\delta \dot{v}'$ 为单位 1, $\delta \dot{u}'$, $\delta \dot{\Omega}'$ 取相应的协调值, 则式 (11) 可写为

$$\delta \dot{u}' H + V + \delta \dot{\Omega}' M = 0 \quad (12)$$

将式 (6) ~ (8) 代入式 (12), 有

$$Q = V_1 + \delta \dot{u}' H + \delta \dot{\Omega}' M = \pi[y(x), \sigma(x)] \quad (13)$$

式中,

$$V_1 = 2B\gamma D_0 + \int_{x_0}^{x_n} [\sigma(1 + \psi_s y') + c_{\alpha} y' - \gamma(y + D_0)] dx \quad (14)$$

整理式 (13) 有

$$Q = \pi = 2B\gamma D_0 + \delta \dot{\Omega}' \int_{x_0}^{x_n} F dx \quad (15)$$

式中,

$$F = \sigma(\psi_s f_1 + f_2) + c_H [1 + (k-1) \frac{(1 + K_p y')^2}{(1 + K_p^2)(1 + y'^2)}] f_1 - \gamma f_3 \quad (16)$$

$$f_1 = \frac{\delta \dot{u}'}{\delta \dot{\Omega}'} + y + y' \left(\frac{1}{\delta \dot{\Omega}'} - x \right) \quad (17)$$

$$f_2 = \left(\frac{1}{\delta \dot{\Omega}'} - x \right) - y' \left(\frac{\delta \dot{u}'}{\delta \dot{\Omega}'} + y \right) \quad (18)$$

$$f_3 = \left(\frac{1}{\delta \dot{\Omega}'} - x \right) (y + D_0) \quad (19)$$

式 (15) 把地基承载力 Q 表示成滑裂面 $y(x)$ 及沿该曲线法向分布应力 $\sigma(x)$ 的泛函 π , 用变分原理求

解该泛函的驻值,即可求得极限承载力 Q_m , 根据上限定理, 这样获得极值 Q_m 必为真实承载力的最小上限。

2 地基极限承载力的计算方法

2.1 欧拉 (Euler) 方程

要使地基承载力 Q 表达式 (15) 取得极值, 则滑裂面曲线 $y(x)$ 及沿该曲线法向分布应力 $\sigma(x)$ 必为下列欧拉方程的解, 即满足

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma'} \right) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (21)$$

将式 (16) ~ (19) 代入式 (20) 并考虑式 (5) 有:

$$\psi_1 \left[\left(\frac{\delta \dot{u}}{\delta \dot{\Omega}} + y \right) + y' \left(\frac{1}{\delta \dot{\Omega}} - x \right) \right] + \left[\left(\frac{1}{\delta \dot{\Omega}} - x \right) - y' \left(\frac{\delta \dot{u}}{\delta \dot{\Omega}} + y \right) \right] = 0. \quad (22)$$

令

$$\left. \begin{aligned} y + \frac{\delta \dot{u}}{\delta \dot{\Omega}} &= r \cos \theta, \\ x - \frac{1}{\delta \dot{\Omega}} &= -r \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

注意到

$$y' = \frac{r \sin \theta - r' \cos \theta}{r' \sin \theta + r \cos \theta}, \quad (24)$$

式 (22) 成为

$$-\frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \psi_1. \quad (25)$$

式 (25) 是由正交流动法则得出, 几何意义如图 3 所示。同理式 (21) 可写为

$$\frac{d\sigma}{d\theta} - 2\psi_s \sigma + 2c_\alpha + \gamma r \sin \theta - G = 0, \quad (26)$$

式中,

$$G = \frac{a_0}{c_H} c_\alpha r \cos \theta + A_1 + A_2 + A_3, \quad (27)$$

$$c_\alpha = c_H \left[1 + \frac{\lambda(B_1 + K_p B_2)^2}{I_1} \right], \quad (28)$$

$$A_1 = \frac{2a_0 \lambda r^2 B_2 [K_p E_1 + (K_p^2 - 1) B_1 B_2]}{I_1^2}, \quad (29)$$

$$A_2 = \frac{2c_H \lambda r^2 I_2}{I_1^3} [(K_p^2 - 1)(4r'r \sin 2\theta + r'^2 D_1 + r^2 D_2) + \frac{2K_p B_2}{B_1^3} (r'^2 D_2 + r^2 D_1 - 4r'r \sin 2\theta)], \quad (30)$$

$$A_3 = \frac{4c_H I_2 \lambda r \sin \theta}{I_1^2} \left[\frac{K_p E_1}{B_1} + (K_p^2 - 1) B_2 \right], \quad (31)$$

$$\lambda = \frac{k-1}{1+K_p^2}, \quad (32)$$

$$r' = \frac{dr}{d\theta}, \quad (33)$$

$$B_1 = r' \sin \theta + r \cos \theta, \quad (34)$$

$$D_1 = 1 - 4 \cos^2 \theta, \quad (35)$$

$$B_2 = r \sin \theta - r' \cos \theta, \quad (36)$$

$$D_2 = 1 - 4 \sin^2 \theta, \quad (37)$$

$$I_1 = r^2 + r'^2, \quad (38)$$

$$I_2 = r r'' - 2r'^2 - r^2, \quad (39)$$

$$E_1 = (r^2 - r'^2) \cos 2\theta + 2r r' \sin 2\theta, \quad (40)$$

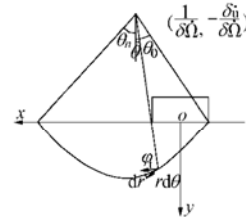


图 3 坐标转换

Fig. 3 Coordinate conversion

2.2 滑裂面端点的应力条件

曲线 $y(x)$ 沿 x 轴移动的动端点通过 $(x_n, 0)$ 的极值条件为^[6]

$$[(y_1' - y') \frac{\partial F}{\partial y'} + F]_{x=x_n} = 0 \quad (41)$$

式中, y_1 为 x 轴, 故 $y' = 0$, 将式 (16) ~ (19) 代入式 (41) 得

$$\left\{ (\sigma \psi_s + c_\alpha) \cos \theta + (\sigma - \gamma D_0) \sin \theta - \frac{2c_H \lambda r B_2 [K_p E_1 + (K_p^2 - 1) B_1 B_2]}{I_1^2} \right\} \bigg|_{\substack{r=r_n \\ \theta=\theta_n}} = 0. \quad (42)$$

2.3 边界几何条件

滑裂面与基础底面水平面有两个交点 x_0, x_n , 故有几何边界条件:

$$y(x)|_{x=x_0} = 0, \quad (43)$$

$$y(x)|_{x=x_n} = 0. \quad (44)$$

2.4 地基承载力的确定

上面导出的所有式子对各向异性、非均质地基, 且服从一般非线性破坏准则的土材料均适用, 为便于结果比较, 下面采用线性破坏准则, 此时 $\psi_s = \psi_t = \psi = \tan \varphi$ 为常数。积分式 (25) 得

$$r = r_0 e^{\psi(\theta_0 - \theta)}, \quad (45)$$

同时, 由式 (26) 有

$$\sigma = \mu e^{2\psi\theta} + e^{[2\psi\theta]} \int (G - 2c_\alpha - \gamma r \sin \theta) e^{-[2\psi\theta]} d\theta, \quad (46)$$

式中, μ 为积分常数。

故极限承载力 Q 可表示为

$$Q_m = \min_{(\mu, r_0, \theta_0, \theta_n, \delta \dot{\Omega}, \delta \dot{u})} \pi(\mu, r_0, \theta_0, \theta_n, \delta \dot{\Omega}, \delta \dot{u}), \quad (47)$$

由式 (47) 可看出, π 对 $\delta \dot{\Omega}, \delta \dot{u}$ 取极值, 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial \dot{u}} &= 0, \\ \frac{\partial \pi}{\partial \dot{\Omega}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

由式 (13), 式 (48) 即为

$$\left. \begin{aligned} H &= 0, \\ M &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

由式 (49) 及式 (12), 有:

$$V=0. \quad (50)$$

考虑到坐标转换 (23), 式 (43) 可写为

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{r_0 \sin \theta_0 - B}, \quad (51)$$

$$\delta \dot{u} = \frac{r_0 \cos \theta_0}{r_0 \sin \theta_0 - B}. \quad (52)$$

由此, 式 (47) 可简化为

$$Q_m = \min_{(\mu, r_0, \theta_0, \theta_n)} \pi(\mu, r_0, \theta_0, \theta_n), \quad (53)$$

式中, $\mu, r_0, \theta_0, \theta_n$ 4 参数由式 (42), (49), (50) 结合式 (45), (46) 确定。

3 数值计算与结果分析

方程组 (42) 及 (49)、(50) 属非线性方程组, 有许多方法可以求解, 本文采用如下计算步骤求解。

(1) 假设 r_0, θ_0 , 由式 (42) 及 (45)、(46) 求得 μ, r_n, θ_n 。

(2) 由 $r_0, \theta_0, \theta_n, r_n$ 及 μ , 根据式 (46) 求得 σ_0, σ_n 。

(3) 令 $\theta_{i+1} = \theta_i + \Delta\theta$, 由式 (45) 确定出可能滑动面, 由式 (46) 确定出沿该可能滑动面上法向应力分布。

(4) 用辛卜生(Simpson)求积公式, 计算式(6)~(8)。

(5) 重复 (1) ~ (4), 直至式 (49) 及式 (50) 满足为止。

(6) 将求得的参数 $\dot{\Omega}, \delta \dot{u}$ 代入式 (15) 求得 Q_m 。

在上述计算原理与导出的公式基础上, 本文利用所编的计算机程序进行了例题计算, 并把结果与其他学者的结果进行了比较, 为方便起见, 引入了无量纲参数 $\nu = \frac{2a_0B}{c_{H0}}, d' = \frac{D_0}{2B}, q' = \frac{Q}{2Bc_{H0}}$ 及 $G' = \frac{2\gamma B}{c_{H0}}$, 从而将承载力表示为

$$q' = N_c + G'N_{\gamma q}, \quad (54)$$

式中, N_c 是由黏聚力 c 引起的承载力系数, $N_{\gamma q}$ 是由土自重及基底上部超载引起的承载力系数。

表 1 就 $G'=0, k=1$ 和 $\nu=0$ 的情况, 即各向同性情况下, 本文计算的 N_c 值与文献^[1-4]的结果进行了比较, 从表 1 可见, 本文结果大于文献^[1]的结果, 且与文献^[4]的结果比较接近。

表 1 N_c 值的比较 ($G'=0, k=1, \nu=0$)

Table 1 Comparison of N_c ($G'=0, k=1, \nu=0$)

$\varphi/(^\circ)$	文献[1]	文献[4]	本文结果
10	8.33	8.34	8.34
20	14.79	14.83	14.80
30	30.10	30.14	30.13
40	—	75.32	75.29

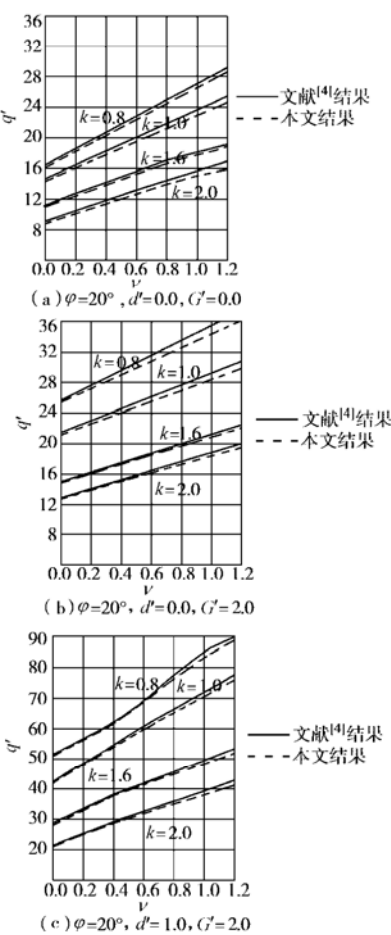
表 2 列出了本文及文献^[1-4]获得的均质情况 N_c 与非均质 N_c' 的比值。

表 2 均质情况下 N_c 与非均质 N_c' 的比值 ($\nu=1.2$)

Table 2 The ratio of N_c in homogenous state to N_c' in non-homogenous state ($\nu=1.2$)

$\varphi/(^\circ)$	文献[1]	文献[4]	本文结果
10	1.44	1.572	1.52
20	1.58	1.699	1.65
30	1.82	1.965	1.94
40	—	3.437	3.40

图 4 示出了 $\varphi=20^\circ, 30^\circ, q'$ 随各参数变化的情况, 由图可看出, 当黏聚力 c 随深度线性增加时, 承载力提高; 水平向黏聚力 c_v 相对竖向黏聚力 c_H 较大时, 承载力提高, 这是由于滑裂面的大部分水平向穿过地基的缘故, 故在实际中对自然沉积的地基, 可从增加水平向黏聚力的角度出发加固地基, 以提高地基承载力。此外, 本文用变分法确定临界滑裂面所得到的承载力系数对各种 k 情况均略小于假定滑裂面为普朗德 - 沙基破坏形式的情况。



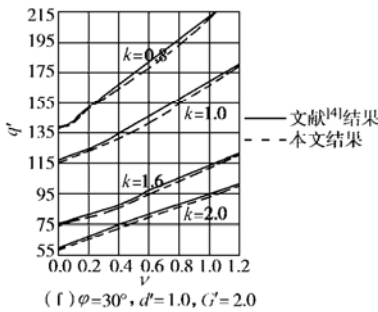
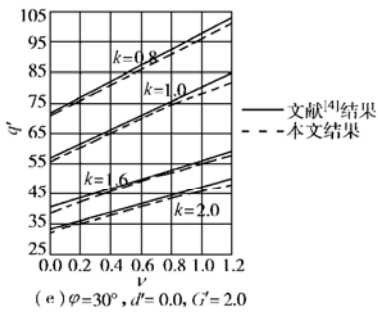
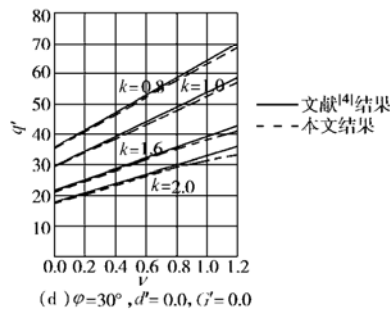


图 4 q' 随各参数变化的情况

Fig. 4 Variation of q' with the parameters

图 5 示出了 $k=0.8, 1.0, 1.2, \varphi=20^\circ, \bar{c} = \frac{c}{\gamma B} = 0.5$,

$\nu = \frac{2a_0 B}{c_{H0}} = 0.01$ 时, 滑裂面的形状及沿该滑裂面

$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\gamma B}$ 的分布情况。

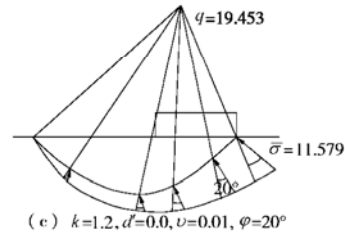
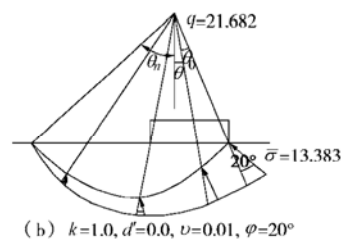
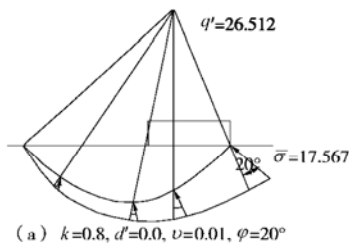


图 5 极限滑裂面及极限应力分布

Fig. 5 The ultimate sliding surface and the distribution of ultimate stress

4 结 语

本文叙述了应用塑性极限分析法上限定理结合变分法确定非均质及各向异性地基土的极限承载力的原理, 导出了基本公式。利用编制的计算机程序分析了土非均质和各向异性参数对承载力的影响。本文得到的结果略小于假定破坏机构为普朗德尔-太沙基形式的结果, 说明用本文提出的方法确定各向异性和非均质地基极限承载力是可行的。

参考文献:

- [1] 陈希有, 龚晓南, 曾国熙. 具有各向异性和非均质性的 $c-\varphi$ 土上条形基础的极限承载力[J]. 土木工程学报, 1987, 20(4): 74 - 82. (CHEN Xi-you, GONG Xiao-nan, ZENG Guo-xi. Ultimate bearing capacity of strip foundation on anisotropic and non-homogeneous $c-\varphi$ clays[J]. China Civil Engineering Journal, 1987, 20(4): 74 - 82. (in Chinese))
- [2] CHEN W F. Limit analysis and soil plasticity[M]. New York: American Elsevier Scientific Publ Comp, 1975: 287 - 294.
- [3] MURFF J D, et al. Foundation stability on non-homogeneous clays[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1977, 103(10): 1083 - 1095.
- [4] REDDY A S, et al. Bearing capacity of strip footing on $c-\varphi$ soils exhibiting anisotropy and non-homogeneity in cohesion[J]. Soils and Foundations, 1982, 22(1): 49 - 60.
- [5] DUNCAN J M, et al. Anisotropy and stress reorientation in clay[J]. Journal of the Soil Mech and Found Div, ASCE, 1966, 92(5): 21 - 50.
- [6] LO K Y. Stability of slopes in anisotropic soils[J]. Journal of the Soil Mech and Found Div, ASCE, 1965, 91(4): 85 - 106.
- [7] 钱伟长. 变分法及有限元(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 1980: 116 - 122. (QIAN Wei-chang. The variational principle and finite element method[M]. Beijing: Science Press, 1980: 116 - 122. (in Chinese))
- [8] 李庆扬. 等. 非线性方程组的数值解法[M]. 北京: 科学出版社, 1987: 83 - 118. (LI Qing-yang, et al. The numerical solution of nonlinear equations[M]. Beijing: Science Press, 1987: 83 - 118. (in Chinese))