

关于随机场理论在土工可靠度计算中应用的研究

闫澍旺, 朱红霞, 刘 润

(天津大学建工学院, 天津 300072)

摘 要: 应用随机场理论进行可靠度分析时, 关键在于随机场理论求得的参数, 尤其是方差折减函数如何同可靠度理论结合起来。在土工可靠度计算中正确选取并且合理应用方差折减函数是一个非常关键但又很容易被忽略的问题。本文从随机场的基本理论出发, 对这一问题进行探讨和研究, 提出方差折减函数的确定原则; 并通过一个工程算例, 说明此折减原则较为合理, 且在实际工程中偏于安全。

关键词: 随机场; 可靠度; 方差折减函数; 相关距离; 相关函数

中图分类号: TU44

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2006)12-2053-07

作者简介: 闫澍旺(1950-), 男, 教授, 主要从事岩土工程专业的研究和教学工作。

Study on application of random field theory to reliability analysis

YAN Shu-wang, ZHU Hong-xia, LIU Run

(School of Constructional Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: The key to application of random field theory to reliability analysis is how to combine the parameters obtained by the random theory, especially the combination of the reduction function of variance with the reliability theory. It is very important to correctly choose the reduction function of variance and to reasonably apply it to the reliability analysis. The problem often neglected by people was studied based on the random field theory and the principle for determination of reduction function of variance was presented. It was proved with an example that the principle is reasonable and reliable in the engineering practices.

Key words: random field; reliability analysis; reduction function of variance; correlation distance; correlation function

0 引 言

岩土工程中存在着许多不确定性, 需要用概率论与统计学的方法去研究和解决工程问题。但是目前, 国内外对于地基可靠度规范的制定和执行情况进展缓慢, 原因是算得的可靠度指标过小, 使对应的失效概率太大, 常常超过 10%, 即使对已证明是安全稳定的工程也是如此。造成这种理论与实际情况背离的主要原因, 除了岩土性质本身离散性较大以外, 方差的估算方法是主要因素。

在早期的概率设计法中, 土工可靠度的分析与结构可靠度分析一样, 是利用土性剖面的均值和“点”标准方差来进行的, 但是对一些安全的土工结构物的验证性计算却表明: 建立在随机变量理论上的分析结果, 可靠度指标的量级与工程的实际安全程度并不匹配, 用“点”方差计算的结果使可靠度指标偏小很多, 也就是说, 计算所得的失效概率偏大。研究表明, 与人工材料不同, 由于地基中相邻两点的成因相似, 矿物成分接近, 土的性质既有变异性又有一定的相关性, 现在常用的数理统计方法忽略了岩土材料具有自相关

性的特点, 方差估算偏大是造成这一问题的主要原因。

为了解决这个问题, 考虑土的自相关性在概率分析中对土性的影响, Vanmarcke 和其他一些研究者, 将随机场理论引入岩土工程的可靠度分析之中, 建立了土性剖面随机场模型, 即将土性剖面看作在空间上分布的随机场^[1]。

随机场模型的作用, 在于它能够完成由点特性到空间平均特性的过渡。岩土结构物通常占有相当的范围, 它的功能常由土体中局部范围的平均特性来控制, 所以研究随机场中某一空间的平均特性很重要。但是, 土性指标的试验数据往往是对土的试样而言的, 试样的尺寸远远小于土层的某一范围土体的体积, 由此而得到的土性参数属于点特性。建立随机场模型后, 就可以通过方差折减函数, 将设计参数的点方差进行折减, 得到空间均值方差, 实现点特性到空间平均特性的过渡。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50379034); 教育部高校博士学科点专项科研基金资助课题(20020056012)

收稿日期: 2005-10-14

由此可见,在应用随机场理论进行可靠度分析时,关键在于方差折减函数的确定。很多学者对不同自相关函数对应的方差折减函数 $\Gamma^2(h)$ 进行了研究,得到 $\Gamma^2(h)$ 的不同表达式^[2]; Vanmarcke 也提出了 $\Gamma^2(h)$ 近似估算式^[1]。但是,如何将方差折减函数正确、合理地应用到可靠度计算中去,是一个非常关键但又很容易被人们忽略的问题。本文从随机场的基本理论出发,对这一问题进行探讨和研究,提出不同情况下方差折减函数的确定原则,并通过一个工程算例,进一步说明随机场理论求得的参数如何同可靠度理论结合起来,共同应用于土工可靠度分析。

1 随机场基本理论

1.1 随机场定义的简略描述

设 P 表示空间的一个点, P 有坐标 (x, y, z) , 随机函数 $Y(P) = Y(x, y, z)$ 称为三维空间的一个随机场。如果均值 $E[Y(P)]$ 是一个与 P 无关的常数, 令为 μ ; 相关函数 $R(P, P') = E[(Y(P) - \mu)(Y(P') - \mu)]$ 是一个仅依赖于向量 $\overline{PP'}$ 的函数, 即有 $R(P, P') = R(\overline{PP'})$, 则随机场 $Y(P)$ 称为是齐次的。

如果相关函数仅仅与 $\overline{PP'}$ 的长度有关, 称齐次随机场是各向同性的。显然, 如果空间是一条实直线, 即是一维实欧氏空间, 则一维齐次随机场和宽平稳过程的概念一致。下面讨论一维实的齐次随机场。

在直线上直接用 P 的坐标 z 来表示点 P , $Y(P)$ 用 $Y(z)$ 来表示。如果 $E[Y(z)]$ 是一个不为 0 的常数 μ , 总可以令 $Y'(z) = Y(z) - \mu$, 因而有 $E[Y'(z)] = 0$ 。所以不失一般性, 今后总假定 $E[Y(z)] = 0$ 。

显然, 平稳正态过程 $Y(z)$ 的所有一维分布与 z 无关, 都是 $N(0, \sigma)$ 分布。此时有 $R(\tau) = \sigma^2 \rho(\tau)$ 。

1.2 方差折减函数的定义

点特性 $Y(z)$ 的变异性是由标准差 $D[Y(z)] = \sigma$ 来度量的, 同样, 空间平均特性 $Y_h(z)$ 的标准差为 $D[Y_h(z)]$ 。用于平均的长度 h 越大, 在做空间平均运算中将会抵消的 $Y(z)$ 的波动也越大。这样, 用于平均的长度增大时, 将使空间平均特性的标准差 $D[Y_h(z)]$ 减小。 $D[Y_h(z)]$ 和 σ 的无因次比为

$$\Gamma(h) = \frac{D[Y_h(z)]}{\sigma} \quad (1)$$

由式 (1) 可知, 当 $h=0$ 时, 空间平均特性 $Y_h(z)$ 刚好是一点的点特性 $Y(z)$, 于是 $\Gamma(0)=1$; 当 h 较大时, 函数 $\Gamma(h)$ 反映了空间平均特性的标准差 $D[Y_h(z)]$ 相对于点特性的均方根 σ 的衰减, 因而称之为均方根衰减因子。均方根衰减因子的平方 $\Gamma^2(h)$ 叫做方差折减函数, 由式 (1) 得

$$\Gamma^2(h) = \frac{D^2[Y_h(z)]}{\sigma^2} = \frac{\text{Var}[Y_h(z)]}{\sigma^2} \quad (2)$$

方差折减函数反映了用于平均的尺寸增大时, 空间平均特性方差的衰减。因而, 只要确定出方差折减函数 $\Gamma^2(h)$, 就可以利用公式 $\text{Var}[Y_h(z)] = \sigma^2 \Gamma^2(h)$, 由点特性的方差求出空间平均特性的方差。

1.3 方差折减函数与相关函数的关系

根据随机场理论, 当土性剖面符合一维实的齐次正态随机场的要求, 即看作高斯平稳齐次随机场, 考虑一维齐次随机场在局部空间 $[z, z+h]$ 上的随机积分

$$Y_h(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} Y(z) dz \quad (3)$$

如果平稳过程 $Y(z)$ 又有下列形状的相关函数:

$$R(\tau) = ae^{-b|\tau|} \quad (4)$$

$$R(\tau) = ae^{-(b\tau)^2} \quad (5)$$

$$R(\tau) = ae^{-b|\tau|} \cdot \cos(b\tau) \quad (6)$$

$$R(\tau) = ae^{-b|\tau|} \cdot \cos(\omega\tau) \quad (7)$$

其中, $b>0$ $\omega>0$, 则可以证明随机积分 $Y_h(z)$ 必存在, 且当 $Y(z)$ 是正态过程时, $Y_h(z)$ 也是正态过程。

该随机积分的均值

$$E[Y_h(z)] = E\left[\frac{1}{h} \int_z^{z+h} Y(z) dz\right] = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} E[Y(z)] dz = 0 \quad (8)$$

即随机场的局部平均 $Y_h(z)$ 的均值和原来的随机场 $Y(z)$ 的均值一样。

该随机积分的方差

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y_h(z)] &= \text{Var}\left[\frac{1}{h} \int_z^{z+h} Y(z) dz\right] \\ &= E\left[\frac{1}{h} \int_z^{z+h} Y(z) dz\right]^2 \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^h \int_0^h R(z_1 - z_2) dz_1 dz_2 \\ &= \frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\tau}{h}\right) R(\tau) d\tau \\ &= \frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\tau}{h}\right) \sigma^2 \rho(\tau) d\tau \\ &= \sigma^2 \left[\frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\tau}{h}\right) \rho(\tau) d\tau\right] \quad (9) \end{aligned}$$

令

$$\Gamma^2(h) = \frac{\text{Var}[Y_h(z)]}{\sigma^2} = \frac{2}{h} \int_0^h \left(1 - \frac{\tau}{h}\right) \rho(\tau) d\tau \quad (10)$$

$\Gamma^2(h)$ 即为方差折减函数。式 (10) 反映了方差折减函数与相关函数之间存在的关系。表 1 为几种典型的相关函数所对应的方差折减函数。

1.4 相关距离概念的引入

Vanmarcke 1977 年提出, 若存在

$$\lim_{h \rightarrow \infty} h \Gamma^2(h) = 2 \lim_{h \rightarrow \infty} \int_0^h \left(1 - \frac{\Delta z}{h}\right) \rho(\Delta z) d(\Delta z)$$

$$= 2 \int_0^h \rho(\Delta z) d(\Delta z) = \delta_u \quad , \quad (11)$$

则对充分大的 h , 有近似公式 $h\Gamma^2(h) \approx \delta_u$, 即 $\Gamma^2(h) \approx \frac{\delta_u}{h}$ 。

δ_u 称为相关距离, 在该距离内, 土性强烈相关, 大于该距离可认为基本不相关。同时 Vanmarcke 建议, 无论引用的相关函数是何种形式, 方差折减函数

$$\Gamma^2(h) = \begin{cases} 1 & (h \leq \delta_u) \quad , \\ \frac{\delta_u}{h} & (h \geq \delta_u) \quad . \end{cases} \quad (12)$$

表 1 典型的相关函数与方差折减函数的公式对应表
Table 1 Reduction function of variance corresponding to the typical correlation function

$\rho(\tau)$	$\Gamma^2(h)$
$e^{-b \tau }$	$\frac{2}{b^2 h^2}(bh + e^{-bh} - 1)$
$e^{-(b\tau)^2}$	$\frac{1}{b^2 h^2} \left\{ \sqrt{\pi} b h \left[2\Phi(\sqrt{2}bh) - 1 \right] + e^{-(bh)^2} - 1 \right\}$
$e^{-b \tau } \cdot \cos(b\tau)$	$\frac{1}{b^2 h^2} [bh - e^{-(bh)} \sin bh]$
$e^{-b \tau } \cdot \cos(\omega\tau)$	$\frac{2}{h^2(b^2 + \omega^2)^2} \{ bh(b^2 + \omega^2) + (\omega^2 - b^2) - e^{-bh} [2\omega b \sin(\omega h) + (\omega^2 - b^2) \cos(\omega h)] \}$

2 方差折减函数的确定

2.1 完全不相关距离的提出

在应用随机场理论进行可靠度计算时, 常常用 Vanmarcke 建议的式 (12) 确定方差折减函数。从式 (12) 中可见, 方差折减程度与用以平均的空间范围 h 及相关距离 δ_u 有关。若相关距离一定, h 越大, 折减的越多。那么, 如何确定用以平均的空间范围 h 呢? 有学者认为 h 相当于土力学计算中的有效影响深度, 对于极限承载力问题为滑动面的切割深度, 对于沉降计算则为压缩层厚度。这种取法是否合适呢?

根据方差折减函数的定义式 (2), 方差折减函数为空间平均特性 $Y_h(z)$ 的方差与点特性 $Y(z)$ 的方差的无因次比。根据式 (3), 空间平均特性 $Y_h(z)$ 为齐次随机场在局部空间 $[z, z + h]$ 上的均值。因此, h 即为用以平均的空间范围, 其值的确定关系到方差折减函数 $\Gamma^2(h)$ 的取值。

将土力学计算中的有效影响深度记为 L , 通常, 土性指标的均值和方差在此深度范围内进行统计。若 $h = L$, 则在 L 范围内对土性指标进行平均, 得到

$$Y_L = \frac{1}{L} \int_0^L Y(z) dz \quad . \quad (13)$$

若所研究土层的厚度也为 L , 那么用以计算局部平均 $Y_h(z)$ 的均值和方差的样本数只有一个 Y_L , 显然, 这是不合理的。

此外, 若将有效影响深度 L 直接带入式 (12) 中计算, 还存在一个问题, 即方差折减函数随有效影响深度的增大而减小。对于地基极限承载力问题, 若土的内摩擦角一定, 有效影响深度 (即滑动面的切割深度) 与基础宽度成正比。也就是说, 基础宽度越大, 有效影响深度也越大, 则方差折减函数越小, 方差折减得越多。这也是不合理的, 因为理论上方差折减函数应该是土本身的性质, 不应随上部基础尺寸的变化而变化。

同时, 根据经验, 对多数土层, 垂直相关距离 δ_u 值大多介于 $0.3 \sim 1.5 \text{ m}$ ^[3]。国外有人专门研究得出 $0.5 \sim 1.75 \text{ m}$ 。高大钊等曾对上海地区典型土层的相关距离进行计算, 统计结果表明相关距离为 $0.19 \sim 1.93 \text{ m}$ ^[4]。若某土层垂直相关距离很小, 而土力学计算中的有效影响深度较大 (如桩基础有时超过 20 m), 根据式 (12) 计算所得的方差折减函数会很小, 方差折减过多, 造成计算所得的可靠度指标偏大, 在实际工程中是偏于危险的。

因此, h 值不能简单认为就是有效影响深度 L , 而是应该从土性指标的自相关性 & 方差折减函数的定义出发, 确定其合理的取值。

曾考虑将 h 值取为相关距离 δ_u 。根据 Vanmarcke 的理论, 在相关距离内, 土性强烈相关, 大于该距离可认为基本不相关。若将土性指标在 δ_u 范围内作平均, 意即将土性指标在其强烈相关的范围内作局部空间平均, 再求得的均值和方差即为空间均值和空间方差了。

当 h 值取为相关距离 δ_u 时, 带入式 (12), 求得 $\Gamma^2(\delta_u) = 1$, 意即方差不折减。这是因为, Vanmarcke 把土性剖面随机场 $Y(z)$ 的标准相关函数 $\rho(\Delta z)$ 近似地看成

$$\rho(\Delta z) = \begin{cases} 1 & (\Delta z \leq \delta_u) \quad , \\ 0 & (\Delta z \geq \delta_u) \quad . \end{cases} \quad (14)$$

式中并没有提供小间距内 ($\Delta z \leq \delta_u$) 的相关性衰减的细节, 因此方差折减函数都近似等于 1。若采用表 1 中相应于典型相关函数的方差折减函数计算 $\Gamma^2(\delta_u)$, 则可得到小于 1 的方差折减函数值。但这些值是不宜利用的, 因为实际工程中, 在小间距内的样本实测数据值很少, 很难确定相关函数的形式, 因而相应的方差折减函数也只是近似地估算。

不宜将 h 值取为相关距离 δ_u 的另一原因在于, 相关距离 δ_u 是一种等效意义上的相关尺度, 在 δ_u 之内视为强相关, 一旦超过 δ_u 则视为不相关, 这之间没有过

渡。实际上当两点间距 $\tau = \delta_u$ 时, 两点还是有一定相关性的。即 $\rho(\delta_u) \neq 1$, 及 $\rho(\delta_u) \neq 0$ 。因此, 本文认为 h 应在 δ_u 与 L 之间取值。

根据相关距离的定义, 对充分大的 h , $h\Gamma^2(h) \approx \delta_u$ 。此时, $\Gamma^2(h) \approx \frac{\delta_u}{h}$, 相当于把标准相关函数 $\rho(\Delta z)$ 近似地看成为 0。那么, h 多大才是充分大呢? 于是, 可以考虑取一下限值 h^* , 当 $h \geq h^*$ 时, $\Gamma^2(h) \approx \frac{\delta_u}{h}$ 且标准相关函数 $\rho(\Delta z)$ 可近似地看成为 0。

因此, 此下限值 h^* 可作为齐次随机场的另一种特征尺度, 即完全不相关距离, 大于该距离可视为完全不相关。用此距离作为空间平均的范围是合适的, 表示把土性在保持相关的范围内加以平均, 得到若干局部空间均值, 即可计算局部空间平均的均值和方差。

2.2 完全不相关距离的确定

实际工程应用中, 完全不相关距离 h^* 的确定可用作图法。首先确定相关函数型式, 然后分别根据式(12)和表 1 中相应的方差折减函数公式绘制 $\Gamma^2(h) - h/\delta_u$ 曲线, 找到两曲线的交点, 其横坐标标记为 n^* , 则 $h^* = n^* \delta_u$ 。下面根据相关函数的不同型式进行讨论。

(1) 相关函数为单指数型, 即 $\rho(\tau) = e^{-b|\tau|}$, 对应的方差折减函数 $\Gamma^2(h) = \frac{2}{b^2 h^2} (bh + e^{-bh} - 1)$, 相关距离 $\delta_u = \frac{2}{b}$ 。

将相关函数和方差折减函数用 δ_u 表示, 得

$$\left. \begin{aligned} \rho(\tau) &= e^{-2\tau/\delta_u} \\ \Gamma^2(h) &= \frac{\delta_u}{h} + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta_u}{h} \right)^2 (e^{-2h/\delta_u} - 1) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

根据式(12)及(15)绘制的 $\Gamma^2(h) \sim h/\delta_u$ 曲线如图 1 所示。

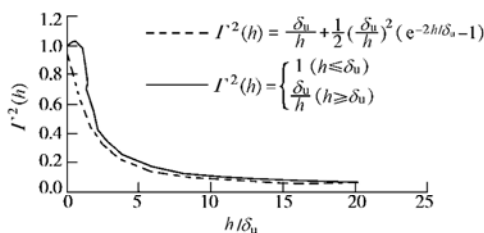


图 1 单指数型相关函数对应的方差折减过程

Fig. 1 Reduction of variance for the single-exponential correlation function

从图 1 中可得, 当 $n^* = h/\delta_u = 10$, 即 $h^* = 10\delta_u$ 时, 对应于式(12)计算的 $\Gamma^2(h^*) = 0.1$, 对应于式(15)计算的 $\Gamma^2(h^*) = 0.095$, 两条曲线的纵坐标值 $\Gamma^2(h)$ 可近似认为相等。此时, 根据式(15), $h^* \Gamma^2(h^*) = 0.95\delta_u \approx \delta_u$, 而 $\rho(h^*) = e^{-2h^*/\delta_u} = e^{-20} = 2.06 \times 10^{-9} \approx 0$,

因此, h^* 为使 $h\Gamma^2(h) \approx \delta_u$ 成立的 h 的下限值, 即完全不相关距离。

通过分析可见, 当相关函数型式为单指数型时, 用以平均的空间长度为 $h^* = 10\delta_u$, 此时, 方差折减函数为一固定值, 即 $\Gamma^2(h^*) = 0.095 \approx 0.1$ 。

(2) 相关函数为指数余弦型, 即 $\rho(\tau) = e^{-b|\tau|} \cos(b\tau)$, 相应的方差折减函数为 $\Gamma^2(h) = \frac{1}{b^2 h^2} [bh - e^{-bh} \sin bh]$, 相关距离 $\delta_u = \frac{1}{b}$ 。

将相关函数和方差折减函数用 δ_u 表示, 得

$$\left. \begin{aligned} \rho(\tau) &= e^{-\tau/\delta_u} \cos \frac{\tau}{\delta_u} \\ \Gamma^2(h) &= \frac{\delta_u}{h} - \left(\frac{\delta_u}{h} \right)^2 e^{-h/\delta_u} \sin \frac{h}{\delta_u} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

根据式(12)及式(16)绘制 $\Gamma^2(h) - h/\delta_u$ 曲线, 如图 2 所示。

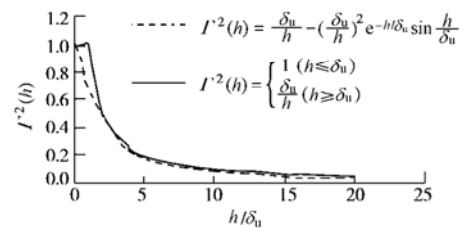


图 2 指数余弦型相关函数对应的方差折减过程

Fig. 2 Reduction of variance for the exponential cosine correlation function

从图 2 中可见, 当 $n^* = h/\delta_u = 4$, 即 $h^* = 4\delta_u$ 时, 对应于式(12)计算的 $\Gamma^2(h^*) = 0.25$, 对应于式(16)计算的 $\Gamma^2(h^*) = 0.251$, 两条曲线的纵坐标值 $\Gamma^2(h)$ 近似相等。根据式(16), $h^* \Gamma^2(h^*) = 1.004\delta_u \approx \delta_u$, $\rho(h^*) = e^{-h^*/\delta_u} \cos(h^*/\delta_u) = e^{-4} \cos 4 = -0.012 \approx 0$ 。

因此, 当相关函数型式为指数余弦型时, 完全不相关距离, 即用以平均的空间长度为 $h^* = 4\delta_u$ 。与相关函数为单指数型时类似, 方差折减函数为一固定值, 即 $\Gamma^2(h^*) = 0.251 \approx 0.25$ 。

(3) 相关函数仍为指数余弦型, 但相关函数中有两个待定参数, $\rho(\tau) = e^{-b|\tau|} \cos(\omega\tau)$, 对应的方差折减函数为

$$\Gamma^2(h) = \frac{2}{h^2(b^2 + \omega^2)^2} \{ bh(b^2 + \omega^2) + (\omega^2 - b^2) - e^{-bh} [2b\omega \sin(\omega h) + (\omega^2 - b^2) \cos(\omega h)] \} \quad (17)$$

相关距离 $\delta_u = 2b/(b^2 + \omega^2)$ 。由于有两个待定参数 b 和 ω , 若要用 δ_u 直接表示相关函数和方差折减函数, 首先需要确定这两个参数的关系。下面讨论几种特定情况下完全不相关距离 h^* 的确定, 如表 2 所示。

根据式 (12) 及表 2 中不同 ω/b 值对应的 $\Gamma^2(h)$ 公式绘制 $\Gamma^2(h) \sim h/\delta_u$ 曲线, 如图 3 和 4 所示。

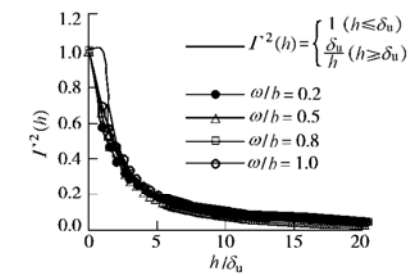


图 3 $\omega/b \leq 1$ 时对应的方差折减过程
Fig. 3 Reduction of variance ($\omega/b \leq 1$)

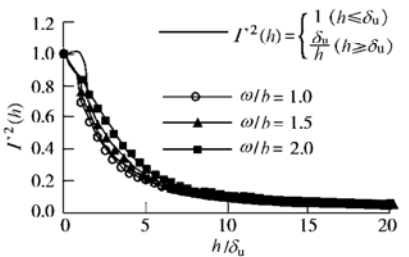


图 4 $\omega/b \geq 1$ 时对应的方差折减过程
Fig. 4 Reduction of variance ($\omega/b \geq 1$)

从图 3 中可见, 当 $\omega/b \leq 1$ 时, h^* 随 ω/b 的增大而减小; 当 $\omega/b \geq 1$ 时, h^* 随 ω/b 的增大而增大; 当 $\omega/b = 1$ 时, h^* 为最小值。此时, 相关函数型式即为 (2) 中讨论的单参数指数余弦型。

在具体工程应用中, 可按照求相关距离的相关函数法, 首先确定相关函数中的参数 b 和 ω , 求出相关距离 δ_u , 然后可作 $\Gamma^2(h) \sim h/\delta_u$ 曲线, 找到完全不相

关距离 h^* , 进而求出方差折减函数 $\Gamma^2(h^*)$ 。

以上分析假定有效影响深度 $L \geq h^*$, 那么当 $L < h^*$ 时, 应根据相关函数的具体型式, 将 L 带入相应的方差折减函数公式中计算。

2.3 方差折减函数的确定原则

综上所述, 可得出在用随机场理论进行可靠度计算时, 方差折减函数的确定原则, 如表 3 所示。

3 工程算例

以天津新港北港池地区上一条形基础为例, 基础埋置深度 0 m, 受垂直中心荷载 Q 作用。在工程实践中, 对饱和软粘土地基承载力, 一般采用 $\varphi = 0$ 分析法, 其值取决于它的不排水抗剪强度 c_u 。对于软土 $\varphi = 0$, Prandtl 提出地基极限承载力 $p = (\pi + 2)c_u = 5.14c_u$, 此时极限状态方程为 $X = 5.14c_u - Q$ 。

方程中, 基本变量为垂直荷载 Q 和不排水抗剪强度 c_u 。垂直荷载 Q 的均值为 55 kPa, 变异系数为 0.2。基本变量都符合正态分布。

基础宽度 B 分别取为 2、4、6 m, 滑动面的最大切割深度 $L = \sqrt{2}B/2$ [5], 在此深度范围内分别对土性指标 C_u 进行统计, 统计结果见表 4。

由于不排水抗剪强度数据呈随深度变化的趋势, 需对原始数据进行移除趋势项处理, 处理后的土层可看作统计上均匀, 即满足齐次随机场的要求 [6-7]。用相关函数法计算相关距离, 求得 $b = 1.884$, $\omega = 2.314$, 相关距离 $\delta_u = 2b/(b^2 + \omega^2) = 0.423$ m。根据式 (12) 及 (17) 绘制 $\Gamma^2(h) \sim h/\delta_u$ 曲线, 如图 5 所示。

表 2 特定情况下的折减函数及完全不相关距离
Table 2 Reduction function and irrelated distance under the given conditions

ω/b	δ_u	$\Gamma^2(h)$	h^*	$\Gamma^2(h^*)$
0.2	$\frac{1}{0.52b}$	$\Gamma^2(h) = \frac{\delta_u}{h} + 0.135(\frac{\delta_u}{h})^2[-3.55 - e^{-h/0.52\delta_u}(1.479\sin\frac{h}{2.6\delta_u} - 3.55\cos\frac{h}{2.6\delta_u})]$	$12\delta_u$	0.080
0.5	$\frac{1}{0.625b}$	$\Gamma^2(h) = \frac{\delta_u}{h} + 0.195(\frac{\delta_u}{h})^2[-1.92 - e^{-h/0.625\delta_u}(2.56\sin\frac{h}{1.25\delta_u} - 1.92\cos\frac{h}{1.25\delta_u})]$	$9.5\delta_u$	0.100
0.8	$\frac{1}{0.82b}$	$\Gamma^2(h) = \frac{\delta_u}{h} + 0.336(\frac{\delta_u}{h})^2[-0.535 - e^{-h/0.82\delta_u}(2.38\sin\frac{h}{1.025\delta_u} - 0.535\cos\frac{h}{1.025\delta_u})]$	$6\delta_u$	0.160
1.0	$\frac{1}{b}$	$\Gamma^2(h) = \frac{\delta_u}{h} - (\frac{\delta_u}{h})^2 e^{-h/\delta_u} \sin\frac{h}{\delta_u}$	$4\delta_u$	0.251
1.5	$\frac{1}{1.625b}$	$\Gamma^2(h) = \frac{\delta_u}{h} + 1.32(\frac{\delta_u}{h})^2[0.47 - e^{-h/1.625\delta_u}(1.136\sin\frac{h}{1.08\delta_u} + 0.47\cos\frac{h}{1.08\delta_u})]$	$8\delta_u$	0.125
2.0	$\frac{1}{2.5b}$	$\Gamma^2(h) = \frac{\delta_u}{h} + 3.125(\frac{\delta_u}{h})^2[0.48 - e^{-h/2.5\delta_u}(0.64\sin\frac{h}{1.25\delta_u} + 0.48\cos\frac{h}{1.25\delta_u})]$	$14\delta_u$	0.070

表 3 方差折减函数的确定原则

Table 3 Principle for determination of reduction function of variance

相关函数	方差折减函数 $\Gamma^2(h)$		
	$L \leq \delta_u$	$\delta_u \leq L \leq h^*$	$L \geq h^*$
单指数型 $\rho(\tau) = e^{-b \tau }$	1	$\frac{2}{b^2 h^2} (bh + e^{-bh} - 1) \quad (h = L)$	0.100
指数余弦型 1 $\rho(\tau) = e^{-b \tau } \cdot \cos(b\tau)$	1	$\frac{1}{b^2 h^2} [bh - e^{-(bh)} \sin bh] \quad (h = L)$	0.251
指数余弦型 2 $\rho(\tau) = e^{-b \tau } \cdot \cos(\omega\tau)$	1	$\frac{2}{h^2 (b^2 + \omega^2)^2} \{bh(b^2 + \omega^2) + (\omega^2 - b^2) - e^{-bh} [2\omega b \sin(\omega h) + (\omega^2 - b^2) \cos(\omega h)]\} \quad (h = L)$	$\frac{\delta_u}{h^*}$

表 4 不排水抗剪强度 c_u 统计结果

Table 4 Statistics of undrained shear strength c_u

基础宽度 B/m	最大切割深度 L/m	平均值/ kPa	点标准差/ kPa	按 $h = L$ 折减		按 $h = h^*$ 折减	
				方差折减函数	折减后的标准差	方差折减函数	折减后的标准差
2	1.414	25.1	6.716	0.299	3.673	—	—
4	2.828	29	9.87	0.15	3.817	0.167	4.033
6	4.242	29.7	9.947	0.1	3.141	0.167	4.065

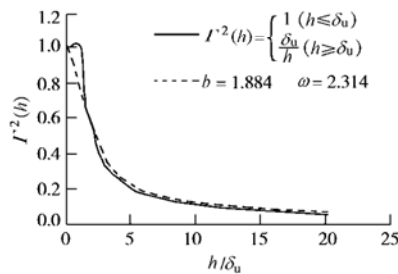


图 5 $b = 1.884$, $\omega = 2.314$ 时对应的方差折减过程

Fig. 5 Reduction of variance ($b = 1.884$ $\omega = 2.314$)

求得完全不相关距离 $h^* = 6\delta_u = 2.538\text{ m}$, 当 $h^* < L$ 时, 由表 3 中方差折减函数的确定原则, 方差折减函数 $\Gamma^2(h^*) = \delta_u/h^* = 0.167$, 标准差折减 $\Gamma(h^*) = \sqrt{0.167} = 0.409$ 。

X 在深度范围 L 内的均值和标准差计算如下:

$$\bar{X} = 5.14\bar{c}_u - \bar{Q}, \tag{18}$$

$$\sigma_X = \sqrt{(5.14\sigma_{c_u})^2 + \sigma_Q^2}。 \tag{19}$$

可靠度指标

$$\beta = \frac{\bar{X}}{\sigma_X}, \tag{20}$$

相应的失效概率

$$P_f = \frac{1}{2} - \psi(\beta), \tag{21}$$

传统的安全系数

$$F = \frac{5.14\bar{c}_u}{\bar{Q}}。 \tag{22}$$

当基础宽度分别为 2、4、6 m 时, 对条形基础作可靠度分析, 结果如表 5 所示。

分析表 4 和 5, 可得:

(1) 当基础宽度为 6 m 时, 其点标准差大于基础宽度为 4 m 时的点标准差。若方差按 $h = L$ 折减, 根据式 (12) 计算所得的方差折减函数, 使基础宽使基础宽度为 6 m 时折减的比 4 m 时的多。比较折减后的方差, 基础宽度为 6 m 时比 4 m 时的要小。对建立在同一土层上的两个基础来说, 显然这是不符合实际的。因此, 当最大切割深度 $L > h^*$ 时, 方差按 $h = L$ 折减是不合适的。对不同宽度的基础来说, 方差折减函数应该是一个定值, 即按 $h = h^*$ 折减, 在上例中, 此定值为 0.167。

(2) 若方差不折减, 求得的可靠度指标偏小, 失效概率偏大。上例中, 失效概率为 2%~3.5%, 与计算所得的传统的安系数 2.35~2.78 相比, 相差甚远, 这在工程设计中是难以被接受的。

(3) 当基础宽度为 2 m 时, 最大切割深度 $L < h^*$, 根据表 3 中方差折减函数的确定原则, 将 L 带入相应的方差折减函数公式中计算。从可靠度的计算结果来

表 5 条形基础可靠度计算结果
Table 5 Reliability of the strap foundation

基础 宽度/m	方差不折减		方差按 $h = L$ 折减		方差按 $h = h^*$ 折减		传统 安全系数
	β	$P_f / \%$	β	$P_f / \%$	β	$P_f / \%$	
2	2.04	2.053	3.39	0.035	—	—	2.35
4	1.81	3.500	4.18	0.00145	4.00	0.0030	2.71
6	1.87	3.093	4.99	0.00003	4.14	0.0018	2.78

看, 方差按 $h = L$ 折减时失效概率为 0.035%, 是较为合理的。

(4) 当基础宽度为 4 m 时, 最大切割深度 $L > h^*$, 根据表 3 中方差折减函数的确定原则, 方差按 $h = h^*$ 折减。由于 L 与 h^* 相差不大, 两种折减方法所得的可靠度指标较接近, 取按 $h = h^*$ 折减的结果, 是偏于安全的。

(5) 当基础宽度为 6 m 时, 传统的安全系数为 2.78, 方差按 $h = L$ 折减得到的可靠度指标偏大, 失效概率接近于 0, 取此值是不保守的; 应取方差按 $h = h^*$ 折减得到的可靠度指标, 才与传统的安全系数较一致。

4 结 论

(1) 应用随机场理论进行可靠度分析时, 关键在于随机场理论求得的参数, 尤其是方差折减函数如何同可靠度理论结合起来。方差折减函数的确定关键在于用于平均空间长度的确定。通常认为这个长度就是土力学计算中的有效影响深度, 本文从随机场基本理论及实际工程应用方面说明了这种取法的不合理性。

(2) 结合相关距离及方差折减函数的概念, 提出了齐次随机场的另外一种特征尺度——完全不相关距离, 并说明以此作为用以平均的空间长度是较为合理的。相关函数型式不同, 确定的完全不相关距离也是不同的。

(3) 根据相关距离、完全不相关距离、土力学计算中的有效影响深度的关系, 提出了方差折减函数的确定原则。

(4) 通过工程算例, 将应用此原则得到的可靠度分析结果与方差不折减、方差按有效影响深度折减得到的结果作对比, 进一步说明此折减原则是较为合理, 且在实际工程中是偏于安全的。

(5) 完全不相关距离的确定与相关函数的型式有关, 在实际应用中由于相关函数的拟合常常带有许多人为因素, 从而影响方差折减系数的稳定性。因此, 如何合理选取相关函数的型式并对其进行拟合还需进一步研究。

参考文献:

[1] VANMARCKE Erik H. Probabilistic modeling of soil profiles[J]. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE,1977,103(GT11):1227 - 1246.

[2] 彭大鹏. 齐次随机场在分析土性指标中的应用[J]. 天津大学学报, 1992(2): 118 - 124. (PENG Da-peng. Application of homogeneous random field to analyze indexes of soil properties[J]. Journal of Tianjin University, 1992(2): 118 - 124.)

[3] 包乘纲, 高大钊, 张庆华. 地基工程可靠度分析方法研究 [M]. 武汉: 武汉测绘科技大学出版社, 1996:169 - 172. (BAO Cheng-gang, GAO Da-zhao, ZHANG Qing-hua. Study on reliability analysis in the foundation engineering[M]. Wuhan: Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Press, 1996: 169 - 172.)

[4] 高大钊. 岩土工程设计中安全度指标及其应用[J]. 工程勘察, 1998(1): 1 - 6. (GAO Da-zhao. Application of reliability index in the design of geotechnical engineering[J]. Geotechnical Investigation and Surveying, 1998(1): 1 - 6.)

[5] 高大钊. 土力学可靠性原理[M]. 北京: 中国建筑工业出版社,1989: 210 - 216. (GAO Da-zhao. The theory of reliability in soil mechanics[M]. Beijing: China Architectural and Building Press, 1989: 210 - 216.)

[6] 闫澍旺, 贾小黎, 郭怀志. 土性剖面随机场模型的平稳性和各态历经性验证[J]. 岩土工程学报, 1995,17(3):1 - 9. (YAN Shu-wang, JIA Xiao-li, Guo Huai-zhi. Examination of stationarity and ergodicity on soil profile[J].Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1995,17(3):1 - 9.)

[7] 刘春原, 闫澍旺. 岩土参数随机场特性及线性预测[J]. 岩土工程学报,2002,24(5): 588 - 591. (LIU Chun-yuan, YAN Shu-wang. Characteristic of the random field of geotechnical parameters and linear prediction[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2002,24(5):588 - 591.)