

基于亚塑性理论的无粘性土压缩试验应力应变的研究

王洪波¹, 邵龙潭², 张学增³

(1. 中国石油天然气管道工程有限公司, 河北 廊坊 065000; 2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023;

3. 中国石油天然气管道局, 河北 廊坊 065000)

摘 要: 根据亚塑性理论推导出了颗粒体材料压缩试验的应力应变方程, 研究了亚塑性本构模型中颗粒硬度 h_s 和指数 n 的实验确定方法, 并且指明其不足之处。根据亚塑性理论和优化方法, 提出了用局部搜索最优解来确定 h_s 和 n 的方法。结果表明, 文中方程可以用来确定压缩试验的应力应变关系。

关键词: 亚塑性; 改进方法; 本构关系

中图分类号: TU441

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2006)06-0780-04

作者简介: 王洪波(1977-), 男, 吉林梨树人, 大连理工大学硕士毕业, 从事亚塑性理论和水工保护方面的研究。

Studies on stress-strain equation of noncohesive soils obtained from oedometer tests based on hypoplastic constitutive model

WANG Hong-bo¹, SHAO Long-tan², ZHANG Xue-zeng³

(1. China Petroleum Pipeline Engineering Corporation, Langfang 065000, China; 2. State Key Laboratory of Structure Analysis for

Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China; 3. China Petroleum Pipeline Bureau, Langfang

065000, China)

Abstract: According to the hypoplastic constitutive model, the stress-strain equation of granular materials could be obtained from oedometer test. The determination of granulate hardness h_s and exponent n in a hypoplastic constitutive model was investigated, and a hypoplastic constitutive model was presented based on hypoplasticity. According to hypoplasticity and optimization, the authors put forward an improved method to determine the parameters of n and h_s using iterative operation. The further investigation of the equation showed that it could be used to determine stress-strain relation in oedometer test.

Key words: hypoplasticity; improved method; constitutive relations

0 引 言

亚塑性理论是近年来在材料的本构关系领域中出现的一种新理论。它以热力学理论为基础, 以张量函数为工具, 抛弃了传统弹塑性理论中应变分解(为弹性应变和塑性应变)、屈服面和加卸载等概念, 直接建立应力率与应变率之间的关系。该理论具有严密的数学力学基础和完整的一般表达式, 与以试验结果为基础的传统本构理论相比具有明显的优点。基于亚塑性理论, 在过去的 20 a 内颗粒体材料在很多方面的力学行为都得到了一定的研究, 比如、剪切带、循环加载, 率相关, 使模型的使用能力得到了加强。微观颗粒的研究, 使得颗粒体在力学变形特性方面有了更加深刻的认识。

应力应变关系是一个本构方程的主体。在实际工程中, 研究压缩试验的应力应变对于研究土的压缩性和计算建筑物的沉降都起到了重要的作用。本文应用亚塑性理论与传统的土力学结合, 推导出了无粘性土

压缩试验的竖向应力应变理论方程。试验验证该方程能够与试验数据很好地吻合。

1 亚塑性理论简介

Gudehus (1996) 提出率相关方程

$$\dot{T}_s = F(e, T_s, D_s) \quad (1)$$

式中 $\dot{T}_s$ 为材料应力速率应力张量, 是关于当前孔隙比 e 、柯西粒间应力张量 T_s 和颗粒骨架拉伸张量 D_s 的函数; 压应力、压应变和与之相应的速率规定为负值; $D_s = (L + L^T)/2$ 是变形梯度 $L = \partial v(x, t)/\partial x$ 的对称部分; v 为颗粒体骨架沿着 x 方向的速度张量。

目前, 亚塑性理论参数的数学特性和综合描述已经有了比较详细的介绍^[1-6]。为了确定模型参数方便, 采用三轴压缩试验 ($|T_{s1}| > |T_{s2}|$), 则张量方程^[6-7]可以由 2 个标量方程来表示:

$$\dot{T}_{s1} = f_s \frac{(T_{s1} + 2T_{s2})^2}{T_{s1}^2 + 2T_{s2}^2} [D_1 + a^2 \frac{T_{s1}D_1 + 2T_{s2}D_2}{(T_{s1} + 2T_{s2})^2} T_{s1} + f_d \frac{a5T_{s1} - 2T_{s2}}{3T_{s1} + 2T_{s2}} \sqrt{D_1^2 + 2D_2^2}] \quad (2)$$

$$\dot{T}_{s2} = f_s \frac{(T_{s1} + 2T_{s2})^2}{T_{s1}^2 + 2T_{s2}^2} [D_2 + a^2 \frac{T_{s1}D_1 + 2T_{s2}D_2}{(T_{s1} + 2T_{s2})^2} T_{s2} + f_d \frac{a4T_{s2} - T_{s1}}{3T_{s1} + 2T_{s2}} \sqrt{D_1^2 + 2D_2^2}] \quad (3)$$

式中 下标 1 表示轴向, 2 表示径向; a 是一个仅与土的临界摩擦角有关的一个参数。刚度因子 f_s 和向密性因子 f_d 考虑平均压力 $p_s = -(T_{s1} + 2T_{s2})/3$ 和孔隙比 e 可以表示为

$$f_s = \frac{h_s}{n} \left(\frac{e_i}{e} \right)^\beta \frac{1+e_i}{e_i} \left(\frac{3p_s}{h_s} \right)^{1-n} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a\sqrt{3}} \left(\frac{e_{i0} - e_{d0}}{e_{c0} - e_{d0}} \right)^\alpha \right]^{-1} \quad (4)$$

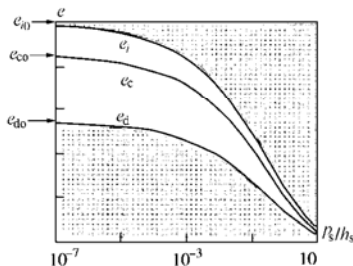
$$f_d = \left(\frac{e - e_d}{e_c - e_d} \right)^\alpha \quad (5)$$

可以看出, 向密性因子 f_d 是一个仅与孔隙比有关的系数, 刚度因子 f_s 主要取决于它的密实度情况^[7], 比向密性因子复杂。

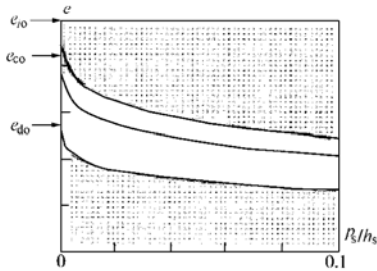
如果各向同性压缩试验开始于一个 $p_s = 0$ 时所对应的 e_{p0} , 则方程 (2) 可以简化成方程 (6)。可以知道, 上限孔隙比 e_i 、下限孔隙比 e_d 和临界孔隙比 e_c 将随着 p_s 的增加而减小, 即

$$\frac{e_i}{e_{i0}} = \frac{e_c}{e_{c0}} = \frac{e_d}{e_{d0}} = \exp \left[- \left(\frac{3p_s}{h_s} \right)^n \right] \quad (6)$$

式中, h_s 为颗粒硬度, n 为指数变量, e_{i0} 、 e_{c0} 和 e_{d0} 为 e_i 、 e_c 和 e_d 在 $p_s = 0$ 时所对应的孔隙比。



(a) 对数关系



(b) 线性关系

图1 e_i 、 e_c 、 e_d 与 p_s 的对数关系和线性关系

Fig. 1 Relation between e_i , e_c , e_d and p_s in logarithmic and linear scale

由图 1^[7]可知, 当平均压力 p_s 消失时, 它们达到临界值 e_{i0} 、 e_{c0} 和 e_{d0} ; 当 p_s 非常大的时候它们的值趋近于 0。综上所述, 可以得到确定亚塑性本构的 8 个参数^[7]: a 、 h_s 、 n 、 e_{d0} 、 e_{c0} 、 e_{i0} 、 α 、 β 。

2 应力应变方程的推导

由土力学压缩试验可知, 在进行常规压缩试验加载前, 先测得土粒比重 G_s 、密度 ρ_0 、含水率 w_0 , 于是可算出初始孔隙比 e_0 , 这时试样的高度为 H_0 , 加第一级荷载 p_1 变形稳定后, 测得压缩量 S_1 , 应变为

$$\varepsilon_1 = \frac{S_1}{H_0} \quad (7)$$

另一方面, 由图 2 所示三相图, (假设 $V_s = 1$) 第一级荷载 p_1 变形稳定后应变可表示为

$$\varepsilon_1 = \frac{e_0 - e_1}{1 + e_0} \quad (8)$$

所以第一级荷载变形稳定后的孔隙比 e_1 为

$$e_1 = e_0 - (1 + e_0) \frac{S_1}{H_0} = e_0 - (1 + e_0) \varepsilon_1$$

同理, 第二级荷载变形稳定后的孔隙比 e_2 为

$$e_2 = e_0 - (1 + e_0) \varepsilon_2$$

第 i 级荷载变形稳定后的孔隙比 e_i 为

$$e_i = e_0 - (1 + e_0) \varepsilon_i$$

则可以得到

$$e = e_0 - (1 + e_0) \varepsilon \quad (9)$$

由方程 (6) 得 $e = e_0 \exp \left[- \left(\frac{p_s}{h_s} \right)^n \right]$, 代入式 (9) 得

$$\varepsilon = \frac{e_0}{1 + e_0} [1 - \exp \left[- \left(\frac{3p_s}{h_s} \right)^n \right]] \quad (10)$$

式 (10) 便是有侧限条件下竖向应力应变关系方程。

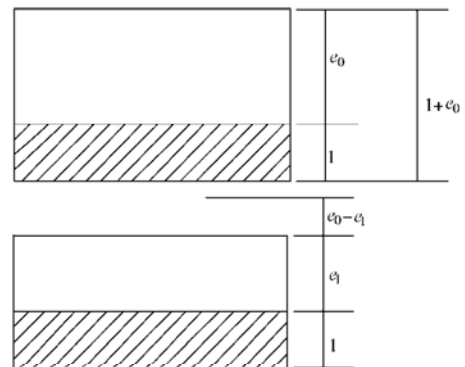


图2 压缩试样的三相示意图

Fig. 2 Three-phase diagram of soil in oedometer test

3 确定颗粒硬度 h_s 和指数 n

在应力应变方程中存在着 2 个未知量：颗粒硬度 h_s 和指数 n 。颗粒硬度不是颗粒体真正的硬度，而是一个参考应力，相当于大气压，只是大气压与土没有直接的联系，才引出这个与土的性质有关的参考应力。指数 n 为与颗粒体应力敏感度有关的参数。

3.1 颗粒硬度 h_s 和指数 n

Gudhus^[7]利用颗粒硬度 h_s 、指数 n 和孔隙比 e_p 描绘方程：

$$e_p = e_{p0} \exp[-(\frac{3p_s}{h_s})^n] \quad (11)$$

把 $e = e_p$ 代入方程 (11)，则体积模量 $k = -p_s/(e/(1+e))$ 能够表示为

$$k = \frac{1}{3n} h_s (1 + \frac{1}{e_p} (\frac{3p_s}{h_s})^{1-n}) \quad (12)$$

可以看出， p_s 不变时，随着 n 的减小， K 趋于增大。当 $n=1$ 时， K 几乎与应力无关，只是随着 e_p 的改变而改变。常规的体积模量方程：

$$k = \frac{p_s(1+e_p)}{C_c} \quad (13)$$

压缩指数 $C_c = -de/d\ln(T_{s1}/T_{s0})$ ，比较式 (12) 和 (13) 得

$$h_s = 3p_s (\frac{ne_p}{C_c})^{\frac{1}{n}} \quad (14)$$

如图 3^[7]所示，当应力 p_{s1} 和 p_{s2} 对应的孔隙比为 e_{p1} 和 e_{p2} 、压缩指数为 C_{c1} 和 C_{c2} 时， n 可以表示为

$$n = \ln(\frac{e_{p1}C_{c2}}{e_{p2}C_{c1}}) / \ln(\frac{p_{s2}}{p_{s1}}) \quad (15)$$

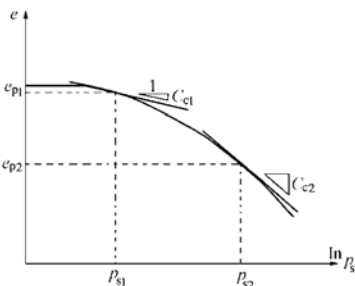


图 3 确定 n 关系式的 $e - \ln p_s$ 图形

Fig. 3 Determination of n from the $e - \ln p_s$

3.2 确定颗粒硬度 h_s 和指数 n 的改进方法

计算表明：采用不同的应力值 p_{s1} 和 p_{s2} ，得到的 n 和 h_s 都不一样，绘出的 $e - p$ 曲线相差也很大。这样给确定 n 和 h_s 参数带来了很大的问题。因此寻找一种方法来获得更为合理的 n 和 h_s 对于推广应用亚塑性理论是有重要意义的。

利用优化方法，采用 Mathematica 进行编程，实现了参数找寻的自动化。主要步骤就是采用局部搜索最优解的方法，如图 4 所示。为了选取具有代表性的点，我们规定 $T2 = T1+a$ ，先给定一个初始点 $T0$ ， $T1 = T0+b$ 。开始的时候 $T1 = T0$ （初始 $b = 0$ ）然后再以步长增量 b 逐渐的向远处推移搜索，每一次搜索都会得到一组 n 和 h_s ，利用新的 n 和 h_s 确定的方程和拟合方程分别计算给定的试验点所对应的 e_{pi} 和 e_i 。如果限制

条件 $u_b = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{(e_{pi} - e_i)^2} < m_0$ （ m_0 是人为初始设定的一个精确因子，可以取的大一点），则 $m_0 = u_b$ ，让精度因子越来越小。找寻满足限制条件的 n 和 h_s ，到达约束边界以后再加大大 $T1$ 和 $T2$ 的间距（也就是 a 开始变大），再进行搜索，如此反复进行，总能找到一个精度因子最小的时候所对应的 n 和 h_s 。并且还可以同时绘出试验点和符合条件的 n 和 h_s 所对应的 $e - p$ 曲线图形。该程序最大的优点就是：克服了由于计算点不同而导致的误差过大的缺点，并且能够自动找到一个局部最优解，消除了确定参数 n 和 h_s 过程中的盲目性。

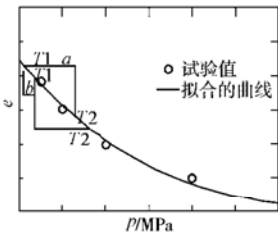


图 4 优化步骤示意图

Fig. 4 Step of optimization

4 算例分析及试验验证

选用标准砂和毛营粉土等几种有代表性的土样作为试验材料。每一组土样又分成密砂、中密砂和松砂 3 种，具体控制密度见表 1。

现以毛营粉土的松砂为例进行计算。毛营粉土 $G_s = 2.69$ ； $\rho_d = 1.4$ ， $e_0 = 0.9214$ 。利用三轴试验测得： $\phi = 32.5$ ， $k_0 = 1 - \sin \phi = 0.4627$ 。

应用南京土壤仪器厂生产的 GDG—4S 三联高压固结仪作为固结设备，给出的试验数据见表 2。

表 1 土的试验控制密度

Table 1 Controlling density

试样	控制密度 $\rho_d/(g \cdot cm^{-3})$	相对密度 D_r
标准砂	1.564	0.33
	1.611	0.50
	1.661	0.67
毛营粉土	1.400	—
	1.500	—
	1.600	—

表 2 松砂 ($\rho_d/(g \cdot cm^{-3})$)				
Table 2 ρ_d of loose sand $/(g \cdot cm^{-3})$				
P/kPa	50	100	200	400
e	0.900	0.8861	0.8695	0.8525
S_i/mm	0.223	0.3670	0.5400	0.7170

将表 2 中的 e 、 p 值代入上述确定 n 和 h_s 的程序中, 得 $n = 0.395262$, $h_s = 664.577 MPa$, 代入方程 (10), 便可绘出竖向应力应变曲线方程, 结果见图 5。

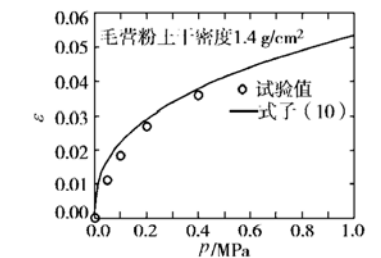


图 5 试验值与式 (10) 的结果比较
Fig. 5 Comparison between experiment and equation (10)

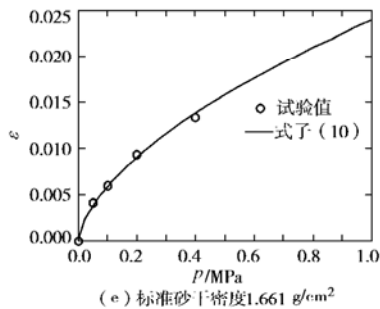
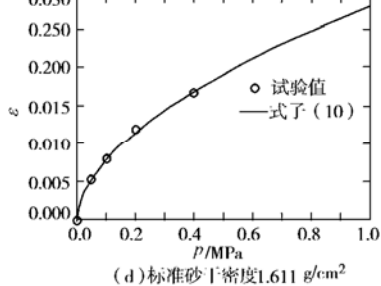
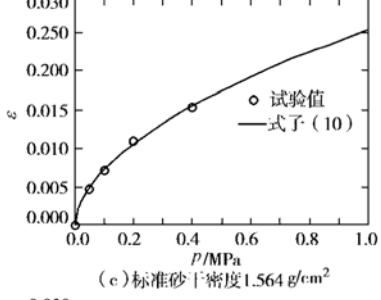
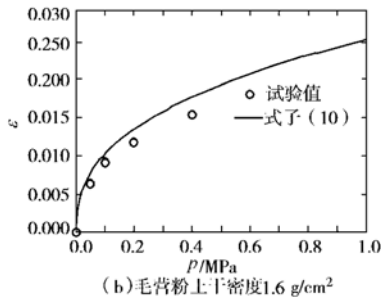
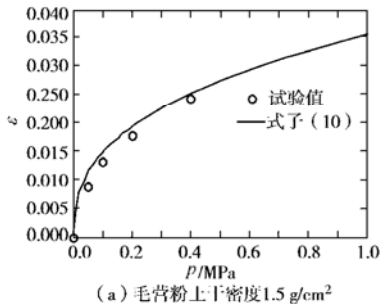


图 6 其他土样的计算结果
Fig. 6 The result of other samples

由图 5 可以看出, 试验数据和通过理论推导所得到的式 (10) 的结果还是比较吻合的。其他砂样的试验数据和式 (10) 也能很好地吻合, 见图 6。

5 结 语

- (1) 基于亚塑性理论和土力学, 推导出了压缩试验的应力应变方程。提出一种新的基于优化原理的 n 和 h_s 的确定方法。这种方法能准确地确定 n 和 h_s , 使得确定的应力应变方程与试验数据吻合良好。
- (2) 本文应力应变方程是根据颗粒体材料的亚塑性本构模型推导出来的, 所以适合于无粘性土, 也可能适用于粘性土, 这需要进一步验证。这些工作为亚塑性理论的推广和验证做出了有益的尝试。

参考文献:

[1] KOLYMBAS D. Generalized hypocoelastic constitutive equation [M]// Constitutive Equations for Granular Non-cohesive Soils. Balkema, 1988: 349 - 366.

[2] KOLYMBAS D. An outline of hypoplasticity[J]. Archive of Applied Mechanics, 1991, 61: 143 - 151.

[3] WU W, BAUER E, KOLYMBAS D. Hypoplastic constitutive model with critical state for granular materials[J]. Mechanics of Materials, 1996,23: 45 - 69 .

[4] GUDEHUS. A comprehensive constitutive equation for granular materials[J]. Soils and Foundations, 1996, 36(1): 1 - 12.

[5] BAUER E. Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials[J]. Soils and Foundations, 1996, 36(1): 13 - 26.

[6] WOLFFERSDORFF P A von. A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface[J]. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials,1996, (1):251 - 271.

[7] HERLE I, GUDEHUS G. Determination of a hypoplastic constitutive model from properties of grain assemblies[J]. Mechanics of Cohesive-Frictional Materials,1999, 4(5):461 - 486.