

真三维应力状态下土体应变局部化的非共轴理论

钱建国¹, 黄茂松¹, 杨 峻²

(1. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 香港大学土木工程系 香港)

摘 要: 判别土体应变局部化的产生条件强烈依赖于土体塑性流动的非共轴特性。本文分析表明, 由于传统的非共轴塑性理论是基于二维共轴应力空间得到的, 为此, 本文基于三维共轴应力空间建立了三维非共轴塑性理论框架, 并利用三维非共轴塑性理论预测土体的变形分叉状态。数值模拟与试验结果对比分析表明, 传统的本构模型有必要引入非共轴塑性流动理论才能有效地提高模型预测土体变形分叉特性的能力。研究表明: 针对平面应变状态的变形分叉问题, 由于考虑了应力第三不变量对非共轴性的影响, 三维非共轴理论预测结果比二维非共轴理论更为合理。

关键词: 非共轴; 应变局部化; 分叉; 三维应力空间

中图分类号: TU43

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2006)04-0510-06

作者简介: 钱建国(1972-), 男, 安徽无为为人, 博士, 讲师, 从事土体本构关系与变形分叉理论的研究工作。

Effect of non-coaxial plasticity on onset strain localization in soils under 3D stress condition

QIAN Jian-gu¹, HUANG Mao-song¹, YANG Jun²

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Civil Engineering, The University of Hong Kong, Hong Kong, China)

Abstract: The non-coaxiality of constitutive relationship has strongly influenced the predictions of the inception of strain localization for soils. It was shown that since the classical non-coaxial theory was built only on the basis of 2D coaxial stress space, here an 3D non-coaxial constitutive framework was proposed based on 3D coaxial stress space and employed for predicting the onset of strain localization in soils. Comparisons between numerical predictions and experimental data were also provided. The analytical results presented that a non-coaxial plastic flow theory needed to be incorporated in the classical constitutive model to describe the bifurcation, which would lead to a correct prediction of the state of bifurcation. It was also concluded that the influence of the third stress invariant on the noncoaxiality, and that bifurcation analysis based on 3D model would get more precise results than 2D model under plane strain conditions.

Key words: non-coaxiality; strain localization; bifurcation; three-dimensional stress space

0 引 言

引起土体失稳的变形局部化现象, 普遍存在于边坡、堤坝、地基和挡土墙等岩土工程领域。室内试验中可以清楚地观察到, 土样在剪切过程中伴随着变形局部化现象并最终表现为宏观的剪切带。有关变形分叉现象的研究自 20 世纪 80 年代, 一直是岩土力学的焦点问题。研究内容集中在两个方面: ①土体变形局部化的产生条件, 也是变形局部化的基本问题; ②土体失稳后的应力应变反应, 本质上可归结于模拟软化现象的边值问题。

Hadamard (1903)^[1]最早建议采用变形分叉理论来分析材料弹性失稳现象。目前岩土应变局部化的理论体系主要建立在 Hill (1962)^[2]判别材料失稳的基本框架上。有关土体变形分叉产生的基本准则, 其代

表性研究成果和近来进展, 有关文献曾详有报道^[3-4]。

应力和应变率的非共轴特性强烈影响土体失稳的变形分叉状态。Rudnicki 和 Rice (1975)^[5]早期在分析细观裂隙随机分布的岩体的变形分叉特性时, 首先引入带角点的屈服面来反映土体塑性变形的非共轴特性。Rudnicki 等研究表明, 引入非共轴塑性流动法则, 弱化了土体的剪切模量, 使得应变局部化更容易在弹塑性硬化阶段触发形成, 从而与变形局部化的试验观察更为一致。Vardoulakis (1980)^[6]结合干砂的双轴试验分析了剪切带形成时刻的剪切硬化模量, 得到了

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10402029, 50179025); 中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学重点实验室资助课题 (Z110401); 同济大学科技发展基金资助项目

收稿日期: 2005-06-10

Rudnicki 等一致的结论。Vardoulakis 等 (1985)^[7] 基于形变理论引入非共轴的塑性应变率, 合理地模拟了双轴条件下剪切带的试验结果。Han 等 (1993)^[8] 基于试验研究, 系统地分析了不同本构理论预测土体变形分叉状态存在的差异性, 并建议在形变理论基础上增加非共轴流动准则来分析应变局部化问题。Pampachaos 和 Vardoulakis (1995)^[9] 在 Rundnicki 等建议的非共轴流动理论基础上进一步引入了运动硬化准则, 更为完美的模拟了 Han 的双轴试验成果。笔者^[10] 从 Drucker 关于材料稳定性的基本假设出发, 讨论了非共轴塑性应变率存在的必要性, 同时避开了 Pampachaos 等引入复杂的非共轴运动硬化准则, 而基于二维等向硬化模型进一步研究了土体变形分叉的非共轴特性。

毫无疑问, 大量的试验研究已表明了岩土体的本构反应基于共轴塑性流动假设存在的局限性, 而现有的应变局部化的理论分析也证实了引入非共轴塑性理论预测土体变形分叉特性的必要性。然而, 本文理论分析将表明, 现有的非共轴分叉理论所基于的本构模型都是在二维的共轴应力空间拓展建立的, 忽略了第三应力不变量的影响, 本质上将归结到 Rundnicki 早期建议的屈服面“角点结构”(Vertex-like structure) 的非共轴理论, 当基于三维共轴应力空间探讨非共轴塑性理论时, Rundnicki 等早期定义的非共轴理论不再适用, 因此也就无从评估非共轴模型中的第三应力不变量对变形分叉特性的影响。因此, 本篇将借助于经典应变局部化的试验研究, 进一步探讨采用三维非共轴塑性理论预测土体变形分叉状态的必要性。

1 非共轴塑性本构理论

岩土介质本构模型的屈服面和塑性势面的数学表达式往往定义为当前的主应力或应力不变量的函数, 结合正交流动法则, 从而得到的塑性应变率主方向和当前应力的主方向一致, 即所谓的应力-塑性应变率在主方向共轴^[11]。然而, 在非常规的加载条件下, 若当前应力率的主方向与应力的主方向并不重合时, 加载后应力主方向势必产生旋转。若加载同时保持主应力大小不变, 根据传统的塑性流动理论, 此时加载属于中性加载, 这与现有的试验观察并不吻合^[12-17]。由此可见, 传统的共轴本构模型无法客观地描述试验观察的非共轴现象。

当塑性应变率主方向偏离了主应力方向, 将偏离的部分定义为非共轴塑性应变率, 这样非共轴塑性应变率的描述应独立于共轴的应力空间。Rudnicki 等早期在分析应变局部化的产生条件时, 采用等向硬化非相关流动法则, 最早在光滑的屈服面上增加所谓“角

点结构”的非共轴塑性应变率, 也即非共轴塑性流动理论, 以便合理地描述岩体介质本构反应的各向异性。基于 $p-q$ 应力空间, Rudnicki 等定义非共轴塑性应变率为

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{np} = \frac{1}{H_t} \dot{\hat{s}}_{ij}^n = \frac{1}{H_t} (\dot{\hat{s}}_{ij} - \frac{\hat{s}_{kl} S_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} s_{ij}) \quad (1)$$

式中, 定义 $\dot{\hat{s}}_{ij}^n = \dot{\hat{s}}_{ij} - \frac{\hat{s}_{kl} S_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} s_{ij}$ 为非共轴应力率, 分别正交于 δ_{ij} 和 s_{ij} 。上标 $\wedge$ 表示 Jaumann 客观应力率, H_t (>0) 表示屈服面切线方向的塑性硬化模量, 下标 $i, j, k \dots = 1, 2, 3$, 下文同。

基于三维共轴应力空间, 求得非共轴应力率为^[11]

$$\dot{\hat{s}}_{ij}^n = \dot{\hat{s}}_{ij} - \frac{\hat{s}_{kl} S_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} s_{ij} - \frac{\hat{s}_{kl} S_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} S_{ij} \quad (2)$$

式中, $S_{ij} = s_{ik} s_{kj} - \frac{2}{3} J_2 \delta_{ij} - \frac{3}{2} \frac{J_3}{J_2} s_{ij}$, 其主方向与 σ_{ij} 主方向共轴其中 $J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$, $J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}$ 。这里 $\dot{\hat{s}}_{ij}^n$ 分别正交于 δ_{ij} 、 s_{ij} 和 S_{ij} 。

需要说明的是, 式 (1) 中的 $\dot{\hat{s}}_{ij}^n$ 并不正交于 S_{ij} , 因此, 式 (1) 定义的非共轴塑性应变率含有共轴塑性应变率。不难看出, 当应力增量的方向与 S_{ij} 一致时, 如 $ds_{ij} = d\kappa S_{ij}$ ($d\kappa$ 为任一微小增量), 则 ds_{ij} 主方向仍与当前应力 σ_{ij} 主方向共轴。由式 (1) 可求得 Rudnicki 等定义的非共轴塑性应变率:

$$de_{ij}^{np} = \frac{1}{H_t} ds_{ij}^n = \frac{1}{H_t} d\kappa S_{ij} \quad (3)$$

显然, 式 (3) 中“非共轴”塑性应变率 de_{ij}^{np} 的主方向与当前应力 σ_{ij} 的主方向共轴, 这就意味着在三维应力空间, Rudnicki 等早期定义的非共轴应力率不再有效。

类似于 Rudnicki 和 Rice 在 $p-q$ 应力空间定义的“角点结构”, 基于三维应力空间定义纯非共轴塑性的本构关系这里仍采用线性形式:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{np} = \frac{1}{H_t} (\dot{\hat{s}}_{ij} - \frac{\hat{s}_{kl} S_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} s_{ij} - \frac{\hat{s}_{kl} S_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} S_{ij}) \quad (4)$$

式中, $H_t = \infty$ 表示共轴塑性理论。

进行张量运算, 得纯非共轴塑性的柔度张量 C_{ijkl}^{np} : 二维状态

$$C_{ijkl}^{np} = \frac{1}{H_t} \left(\frac{\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}}{2} - \frac{\delta_{kl} \delta_{ij}}{\delta_{mn} \delta_{mn}} - \frac{s_{ij} s_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} \right); \quad (5a)$$

三维状态

$$C_{ijkl}^{np} = \frac{1}{H_t} \left(\frac{\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}}{2} - \frac{\delta_{kl} \delta_{ij}}{\delta_{mn} \delta_{mn}} - \frac{s_{ij} s_{kl}}{s_{mn} s_{mn}} - \frac{S_{ij} S_{kl}}{S_{mn} S_{mn}} \right). \quad (5b)$$

类似于文献[10]的推导过程, 非共轴弹塑性本构的刚度模量张量其最终表达式为

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e - D_{ijmn}^e \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{st}} \right) + \frac{H_t}{H_t + 2G} C_{mnst}^{ep} D_{stkl}^e, \quad (6)$$

$$H_p + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} D_{pqmn}^e \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{uv}}$$

式中, $D_{ijkl}^e = (K - \frac{2}{3}G)\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$, G 、 K 分别为弹性剪切模量和弹性体积模量, H_p 为塑性硬化模量。

考虑有限变形条件下应变局部化产生的判别条件^[10], 即

$$\det \left[n_j D_{ijkl}^{ep} n_l - \frac{1}{2} (\sigma_{ik} + \sigma_{jk} n_j n_l - \sigma_{ij} n_j n_k - \sigma_{jl} \delta_{ik} n_j n_l) \right] = 0. \quad (7)$$

联合式(6)、(7), 即得到判别土体应变局部化触发形成的非共轴塑性理论。

2 应变局部化的数值模拟

在外荷载作用下, 岩土介质一般都处于真三维应力状态, 即便是平面应变条件的应力状态本质上也是中主应力不断变化的三维应力状态。然而在数值模拟过程中, 为了简便地描述岩土材料的应力应变特性, 采用的本构模型往往忽略第三应力不变量的影响。需要强调的是, 尽管很多本构模型能够成功的模拟土体失稳前的应力应变特性, 然而在分析土体失稳的变形分叉问题时, 现有的共轴本构理论难以准确地预测其真实的失稳状态, 而非共轴本构理论能够明显改善对土体变形分叉状态的预测效果。然而, 现有的非共轴塑性理论在预测土体的分叉特性时, 本质上都将归结到 Rundnicki 等在 $p-q$ 应力空间提出的二维非共轴塑性流动理论, 无法考虑非共轴模型中的第三不变量对变形分叉特性的影响。为此, 本文将分别利用二维、三维非共轴理论和共轴理论进行对比分析。

针对平面应变问题, 数值模拟采用两种途径。一种是考虑为真三维问题^[18], 即

$$F = q - \eta \cdot g(\theta_\sigma) \cdot p = 0, \quad (8a)$$

$$Q = q + \eta_c \cdot p \cdot g(\theta_\sigma) \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \text{const.}, \quad (8b)$$

式中, F 和 Q 分别为屈服函数和塑性势函数。其中 $q = (\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij})^{1/2}$, $p = \frac{\sigma_{ii}}{3}$, $\eta = \frac{q}{p} = \eta_f \frac{\varepsilon_s^{cp}}{A + \varepsilon_s^{cp}}$, $\eta_f = \frac{6 \sin \varphi_f}{3 - \sin \varphi_f}$, $\varepsilon_s^{cp} = \int \dot{\varepsilon}_s^{cp} dt = \int (\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^{cp} \dot{\varepsilon}_{ij}^{cp})^{1/2} dt$; A 为材料参数, φ_f 为三轴状态测得的峰值内摩擦角; η_c 为临界状态的 η 对应

着塑性体应变不变时的应力比; p_0 为初始围压。这里

$$\theta_\sigma = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right). \text{ 定义 } g(\theta_\sigma) = (3 - \sin \varphi) / \left[(3 - \sin \varphi) + \sqrt{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \sin 3\theta_\sigma} \right] \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leq \theta_\sigma \leq \frac{\pi}{6} \right).$$

另一种途径就是忽略平面应变方向的应力和应变, 直接简化为二维问题。这里可将上述的三维模型简化为下列的二维形式:

$$F = \tau - \eta \sigma = 0, \quad (9a)$$

$$Q = \tau + \eta_c \sigma \ln \frac{\sigma}{\sigma_0} = \text{const.} \quad (9b)$$

式中 $\tau = \frac{1}{2}(s_{ij}s_{ij})^{1/2}$, $\sigma = \frac{\sigma_{ii}}{2}$, $i, j = 1, 2$; σ_0 为初始围压; η 、 η_c 含义同三维本构方程。

模拟的试验结果是来自 Han 等^[8]在双轴应力状态下进行的 Ottawa 砂土应变局部化试验结果。试样的初始孔隙比 $e_0 = 0.32 \sim 0.33$, 初始围压分别为 50、100、200 和 400 kPa。土体的弹性参数直接由 Han 等试验结果给出, 本构模型的塑性参数则通过模拟分叉前均匀变形的试验结果得到, 非共轴参数通过模拟试验曲线的应力峰值状态得到, 所有模型的参数都是通过模拟围压 200 kPa 条件下的试验曲线得到的。

在围压 200 kPa 条件下, 分叉前的应力-应变反应如图 1、2 所示。通过对试验曲线进行数值模拟得到本构模型的共轴参数 η_f , η_c 和 A , 其中虚线和实线分别为二维模型和三维模型的模拟结果, 最终得到模型的参数见表 1。

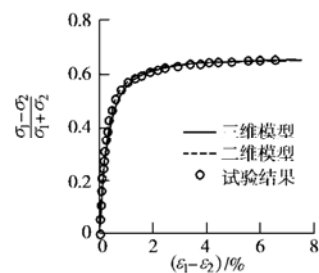


图 1 剪应变-应力比 ($p_0=200$ kPa)

Fig. 1 Shear strain vs. stress ratio ($p_0=200$ kPa)

现有的试验研究^[19-20]表明, 在平面应变条件下, 土体的偏应力峰值和变形分叉状态是非常一致的。因此, 切线塑性刚度模量 H_t 可以通过预测偏应力的峰值状态来加以确定。需要说明的是, 直接确定参数 H_t 则只能通过室内扭转剪切试验加以量测, 然而, 目前有关直接量测 H_t 的试验研究相当罕见。本文数值拟合得到不同围压下切线塑性刚度模量的平均值 $H_t = 2.5$ MPa, 其中二维和三维应力状态下 H_t 的取值非常接近。

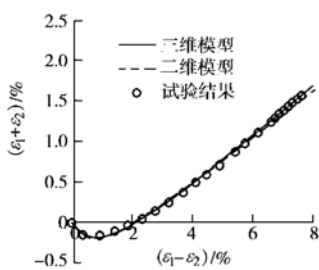


图 2 剪应变-体应变 ($p_0=200$ kPa)

Fig. 2 Shear strain vs. volumetric strain ($p_0=200$ kPa)

表 1 非共轴模型参数

Table 1 Parameters for non-coaxial model

弹性	塑性	
	共轴	非共轴
$E = 175 \text{ MPa}$ $\nu = 0.1667$	$\eta_t = \begin{cases} 1.70 & \text{三维} \\ 0.66 & \text{二维} \end{cases}$	$H_t = 2.5 \text{ MPa}$
	$\eta_c = \begin{cases} 0.965 & \text{三维} \\ 0.36 & \text{二维} \end{cases}$	
	$A = 0.001$	

图 3~6 分别给出应变局部化的试验结果及理论预测。其中图 3 显示为剪切带角度（剪切带和小主压力夹角）随围压的变化规律。试验结果表明，剪切带角度随着围压增加而减小，而且在围压水平较高时，还表现为明显的非线性的变化。而数值模拟结果表明，传统共轴理论的预测结果明显偏离试验观测，而且理论预测与试验规律相反。而非共轴理论预测与试验观察非常吻合。显然，非共轴理论的三维模型和二维模型差异并不明显，相比较二维模型的理论预测值，三维模型的理论预测值略微偏大。

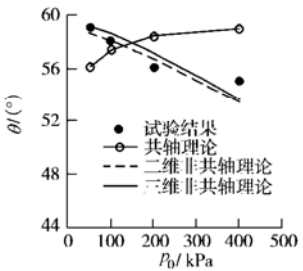


图 3 初始围压 - 剪切带倾角

Fig. 3 Initial confining pressure vs. shear band inclination angle

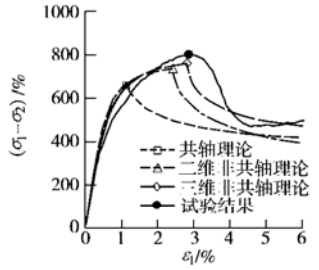


图 4 轴向应变 - 偏应力 ($P_0=200$ kPa)

Fig. 4 Axial strain vs. axial deviatoric stress($p_0=200$ kPa)

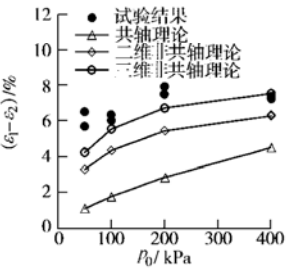


图 5 分叉时的围压 - 剪应变

Fig. 5 Shear strain vs. confining pressure at the inception of shear band

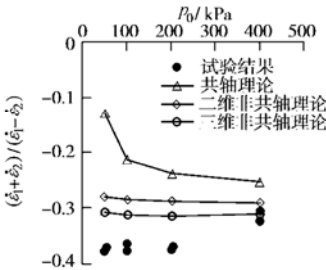


图 6 分叉时的围压 - 剪胀性

Fig. 6 Confining pressure vs. dilatancy at the inception of shear band

图4所示为围压200 kPa条件下轴向应力 - 应变反应曲线及分叉点（即偏应力峰值）。比较3种理论预测曲线，可以看到由于预测的分叉状态（即应力峰）不同，从而导致了分叉后的应力应变反应有着明显的差异（峰值后的应力应变反应将另文讨论）。相比较试验结果，共轴理论预测的应力应变曲线偏离得很远，尽管二维非共轴理论预测效果得到明显的改善，但与试验观察仍有一定的偏差，显然三维非共轴理论的预测效果最好。

图5显示不同围压下变形分叉状态对应的剪应变。理论预测和试验观察都表明了随着初始围压的增大，分叉时刻对应的剪应变也越大，并有着非线性的对应关系，特别是围压水平较高时，分叉时刻的剪应变变化趋势不再明显。显然，三维非共轴理论的预测值最接近试验观察值，尽管二维非共轴理论预测的剪应变分布规律与三维理论相同，但是相比较试验结果仍然偏小（即理论预测到的变形分叉状态过早），而共轴理论预测结果与试验值有着很大的差异。

图6描述了初始围压对分叉时剪胀性的影响。可以看出，3种理论预测结果与试验观察都存在不同程度的偏差。其中，共轴理论预测剪胀性随围压的变化规律却与试验观察相反，特别是在低围压情况下，严重偏离试验结果。二维和三维非共轴理论的预测结果都表明了围压对剪胀性影响并不明显。与前面的分析结果相同，三维共轴理论进一步改善了二维非共轴理论的预测效果。在围压水平较高时，几种理论预测与试验

结果的偏差都有所减小,而且非共轴理论预测和共轴理论预测差异也明显减小,意味着增大初始围压可能会降低塑性流动非共轴性对土体变形分叉状态的影响程度。

Hammad^[21]在完全排水条件对Huston粗砂进行局部化试验研究,观察到与Han等试验结果一致的变形分叉规律,因此,上述的试验研究成果是值得信赖的。有必要说明的是,尽管Papamichos等基于二维非共轴理论也合理地模拟了上述试验中的剪切带角度和剪应变强度的试验结果^[9],然而,他们却在非共轴塑性流动准则的基础上增加了运动硬化准则,而本质上两种准则都是描述土体各向异性的塑性理论,因此,在非共轴塑性流动理论基础上再增加运动硬化准则缺乏直接的试验和理论依据,使得分别描述非共轴特性和运动硬化特性的两个参数其物理意义难以区别,也很难通过有效的室内试验手段分别加以量测,可以看出Papamichos等在选取非共轴模型的参数时具有相当程度的人为性。本文在等向硬化的共轴本构模型基础上引入了共轴塑性理论,通过二维和三维非共轴模型的对比分析表明,二维运动硬化非共轴理论可能夸大了土体应力应变的非共轴性,其中一部分“非共轴”塑性反应是来自于第三应力不变量引起的塑性变形,这部分塑性变形仍属于共轴性本构反应。

有必要一提的是,本文在理论分析时忽略了土体的初始各向异性。此外,在考虑土体非共轴塑性反应的同时,引入的非共轴塑性硬化模量是近似选取了不同围压条件下的平均值。这些理论分析中的简化考虑一定程度上影响了模型的预测能力,从而使得理论预测结果与试验观察值仍可能存在一定的偏差。针对这些问题笔者将在以后的研究中逐步加以完善。

3 结 语

本文强调了三维非共轴塑性模型的理论应用。这里将非共轴塑性理论应用到变形分叉问题的分析中,详细对比分析了二维、三维非共轴塑性理论和传统的共轴塑性理论在预测土体变形分叉特性所表现的差异,相比较现有的变形分叉理论,这里特别强调了非共轴塑性理论中的第三应力不变量对变形分叉特性的影响。基于平面应变条件应变局部化的试验研究,通过3种理论预测结果的对比分析,可以得到以下结论。

(1) Rundnicki 和 Rice 早期建议的非共轴应力(应变)率表达形式是基于 $p-q$ 的二维应力空间,忽略了第三应力不变量的影响。理论分析表明, Rundnicki 等定义的非共轴塑性应变率包括由第三应力不变量引起的共轴塑性应变率,因此,在真三维应力状态下,

Rundnicki 等定义的非共轴应力(应变)率不再适用。

(2) 预测土体的变形分叉特性对本构模型有着强烈的依赖性。传统的共轴本构理论难以准确地预测土体真实的失稳状态,共轴理论和二维三组非共轴理论对比分析表明了,考虑土体塑性流动的非共轴性可大大改善传统塑性理论对变形分叉特性的预测能力。因此,传统的应变局部化理论需要引入非共轴塑性流动理论加以改进。

(3) 相比较早期 Rundnicki 和 Rice 建议的二维非共轴塑性理论,本文基于三维共轴应力空间提出改进的三维非共轴塑性理论,使得模型的预测能力有了明显的改善。因此,在现有的非共轴塑性理论基础上考虑第三应力不变量的影响是非常有意义的。

参考文献:

- [1] HADAMARD J. Lecons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique. Librairie scientifique[R]. Paris: A Hermann, 1903.
- [2] HILL R. Acceleration waves in solids[J]. J Mech Phys Solids, 1962, 10: 1 - 6.
- [3] BARDET J P. A comprehensive review of strain localization in elastoplastic soils[J]. Computers and Geotechnics, 1990, 10: 163 - 168.
- [4] 钱建固,黄茂松.土体应变局部化判别准则与峰值后的力学性质[J]. 同济大学学报, 2005, 33(1): 11 - 1. (QIAN Jian-gu, HUANG Mao-song. Criterion governing the inception of strain localization and post-bifurcation responses in Soils[J]. Journal of Tongji University, 2005, 33(1): 11 - 15.)
- [5] RUDNICKI J W, RICE J R. Conditions for the localization of the deformation in pressure sensitive dilatant materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1975, 23: 371 - 394.
- [6] VARDOULAKIS I. Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests[J]. Int J Num Analyt Meth Geomechanics, 1980, 4: 103 - 119.
- [7] VARDOULAKIS I, GRAF B. Calibration of constitutive models for granular materials using data from biaxial experiments[J]. Géotechnique, 1985, 35(3): 299 - 317.
- [8] HAN C, DRESCHER A. Shear bands in biaxial tests on dry coarse sand[J]. Soils and Foundations, 1993, 33(1): 118 - 132.
- [9] PAPAMICHOS E, VARDOULAKIS I. Shear band formation in sand according to non-coaxial plasticity model[J]. Geotechnique, 1995, 45(4): 649 - 661.
- [10] 钱建固,黄茂松.土体变形分叉的非共轴理论[J]. 岩土工程学报, 2004, 26(4): 777 - 781. (QIAN Jian-gu, HUANG

- Mao-song. Non-coaxiality for deformation bifurcation in soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2004, **26**(4): 777 - 781.)
- [11] QIAN J G, HUANG M S, YAN J. Non-coaxial plastic flow theory based on 3D stress space[C]// Recent Developments of Geotechnical Engineering in Soft Ground. Shanghai: Tongji Univ Press, 2005: 189 - 195.
- [12] BALASUBRAMANIAM A S, CHAUDRY A R. Deformation and strength characteristics of soft Bangkok clay[J]. Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, 1980, **106**(GT6): 716 - 720.
- [13] ARTHUR J R F, CHUA K S, DUNSTAN T. Induced anisotropy in a sand[J]. Geotechnique, 1977, **27**(1): 613 - 82.
- [14] ISHIHARA K, TOWHATA I. Sand response to cyclic rotation of principal stress directions as induced by wave loads[J]. Soils and Foundations, 1983, **23**(4): 11 - 26.
- [15] MATSUOKA H, SAKAKIBARA K A. Constitutive model for sands and clays evaluating principal stress rotation[J]. Soils and Foundations, 1987, **27**(4): 73 - 88.
- [16] PRADEL D, ISHIHARA K M. Yielding and flow of sand under principal axes rotation[J]. Soils and foundations, 1990, **30**(1): 87 - 89.
- [17] GUTIERREZ M, ISHIHARA K, TOWHATA I. Flow theory for sand during rotation of principal stress direction[J]. Soils and Foundations, 1991, **31**(4): 121 - 132.
- [18] PIETRUSZCZAK S, STOLLE D F E. Modelling of sand behavior under earthquake excitation[J]. Int J Numer Analyt Methods Geomech, 1987, **11**: 221 - 240.
- [19] MOONEY M A. A unique critical state for sand[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 1998, **124**(11): 1128 - 1138.
- [20] ALSHIBLI K A, BATISTE S N, STURE S. Strain localization in sand: plane strain versus triaxial compression [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2003, **129**(6): 483 - 494.
- [21] HAMMAD W. Modélisation non linéaire et étude expérimentale des bandes de cisaillement dans les sables[D]. France: Thèse de Doctorat de l'Université. 1991.