

弹性半空间地基上四边自由矩形板的弯曲解析解

王春玲, 黄 义

(西安建筑科技大学 理学院, 陕西 西安 710055)

摘 要: 采用双重 Fourier 变换, 分析得到弹性半空间受任意竖向荷载作用下的静力积分变换解, 与四边自由矩形板的弯曲解析解相结合, 得出弹性半空间地基上四边自由矩形板受任意竖向荷载作用的弯曲解析解。给出一些算例结果, 与有限元方法给出的计算结果进行了比较, 结果吻合良好, 证明本文的方法是切实可行的。

关键词: 弹性半空间; 四边自由矩形板; 共同作用; 解析解

中图分类号: TU 31

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2005)12-1402-06

作者简介: 王春玲(1964-), 女, 1988年毕业于兰州大学数学力学系, 获硕士学位, 现在西安建筑科技大学土木工程学院攻读博士学位, 副教授, 硕士生导师, 主要从事地基和基础结构相互作用研究。

Analytic solution of rectangular plates loaded with vertical force on an elastic half space

WANG Chun-ling, HUANG Yi

(School of Science, Xi'an Univ. of Arch. & Tech., Xi'an 710055, China)

Abstract: The method of double Fourier transform was introduced for the analysis of an elastic half space loaded with vertical force, and an integral representation for displacements of an elastic half space was presented. The analytic solution of an elastic rectangular plate on an elastic half space was also given by combining the analytic solution of an elastic rectangular plate with four free edges. Some examples were analyzed and the results were compared with those from the literature which used other methods such as finite element method. The agreement was found to be satisfactory which proved the validity of the new method in solving the problem of a rectangular plate on an elastic half space with four free edges. This new method would be feasible in practical applications.

Key words: elastic half-space; rectangle plate with four free edges; interaction; analytic solution

0 引 言

许多工程实际问题都可以抽象为搁置在弹性地基上的四边自由的矩形板问题。代表性的工程如船坞底板、机场跑道面板、公路刚性路面、建筑物基础及各种实验台。最近十年间广受重视的海上浮动物也可以该模型^[1]进行分析。因此, 弹性地基上四边自由矩形板问题从 20 世纪 60 年代以来一直受到力学工作者的重视。

但是至今对这个问题的解析解研究甚少, 原因在于很难寻找一个既满足板弯曲控制方程及四边自由边界条件的挠度函数表达形式, 又要正确反映土与基础之间的相互作用规律, 虽然现在有许多大型商用软件可以求取弹性地基上的四边自由矩形板问题的数值解^[2], 但是在许多情况下这个问题的解析解还是很有必要研究的, 特别是用之求解超大型浮体的流固耦合问题^[1]。

目前常用级数叠加法^[3, 4]或变分法^[5]求得弹性地

基上的自由矩形板的解析解, 但是这些解析解都程度不同地存在一些不足, 比如仅限于 Winkler 地基模型或不能全部满足板的自由边条件^[6]。

本文采用双重 Fourier 变换, 分析得到弹性半空间受任意竖向荷载作用下的积分变换解, 与四边自由矩形板的解析解相结合, 得出弹性半空间地基上四边自由矩形板弯曲问题的解析解。给出一些算例结果, 与有限元方法给出的计算结果进行了比较, 结果吻合良好, 证明本文的方法是切实可行的。

1 直角坐标下弹性半空间体的位移通解

受任意荷载作用, 均匀弹性体的位移分别为 u , v 和 w , 则弹性体的控制方程可写为^[7]

基金项目: 陕西省教育厅专项基金资助项目(04JK218)

收稿日期: 2005-02-28

$$\begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \mu \Delta^2 u = 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \mu \Delta^2 v = 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \mu \Delta^2 w = 0. \end{cases} \quad (1)$$

式中 $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ 称为体积应变;
 $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 是拉普拉斯算子。将控制方程

(1) 分别对空间坐标求一阶导数然后相加并化简, 得

$$\Delta^2 \varepsilon = 0. \quad (2)$$

首先对体积应变 ε 进行双重 Fourier 变换,

$$\bar{\varepsilon} = f^2(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy. \quad (3)$$

再对 ε 的二阶导数进行双重 Fourier 变换:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy &= -\xi^2 \bar{\varepsilon}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy &= -\eta^2 \bar{\varepsilon}. \end{aligned}$$

将上结果用于式 (2) 的双重 Fourier 变换, 得一个关于 $\bar{\varepsilon}$ 的二阶齐次线性常微分方程:

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - q_1^2 \right) \bar{\varepsilon} = 0, \quad (4)$$

式中 $q_1^2 = \xi^2 + \eta^2$ 。方程 (4) 的解为

$$\bar{\varepsilon}(\xi, \eta, z) = A(\xi, \eta) e^{-q_1 z}. \quad (5)$$

再对方程 (1) 中每一式施行双重 Fourier 变换, 得

$$\begin{cases} \left(\frac{d^2}{dz^2} - q_1^2 \right) \bar{u} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} A(\xi, \eta) e^{-q_1 z} (i\xi), \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - q_1^2 \right) \bar{v} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} A(\xi, \eta) e^{-q_1 z} (i\eta), \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} - q_1^2 \right) \bar{w} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} A(\xi, \eta) e^{-q_1 z} (q_1). \end{cases} \quad (6)$$

从二阶方程组 (6) 解得

$$\begin{cases} \bar{u} = -i\xi z \frac{(\lambda + \mu)A}{2\mu q_1} e^{-q_1 z} + B e^{-q_1 z}, \\ \bar{v} = -i\eta z \frac{(\lambda + \mu)A}{2\mu q_1} e^{-q_1 z} + C e^{-q_1 z}, \\ \bar{w} = -z \frac{(\lambda + \mu)A}{2\mu} e^{-q_1 z} - \frac{1}{q_1} [i(\xi B + \eta C) + \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} A] e^{-q_1 z}. \end{cases} \quad (7)$$

逆变换即为位移的积分变换解

$$u = f^{-2} \left[-i\xi z \frac{(\lambda + \mu)A}{2\mu q_1} e^{-q_1 z} + B e^{-q_1 z} \right], \quad (8a)$$

$$v = f^{-2} \left[-i\eta z \frac{(\lambda + \mu)A}{2\mu q_1} e^{-q_1 z} + C e^{-q_1 z} \right], \quad (8b)$$

$$w = f^{-2} \left[-z \frac{(\lambda + \mu)A}{2\mu} e^{-q_1 z} - \frac{1}{q_1} [i(\xi B + \eta C) + \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu} A] e^{-q_1 z} \right], \quad (8c)$$

式中, 待定函数 $A(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$ 和 $C(\xi, \eta)$ 宜结合边界条件确定。假设地基与基础之间无摩擦, 那么地基的边界条件可写成

$$\begin{cases} \sigma_{xz}(x, y, 0) = \sigma_{yz}(x, y, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty), \\ \sigma_z(x, y, 0) = \begin{cases} -F(x, y) & (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases} \end{cases} \quad (9)$$

其中, $w = W$ ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$), W 为板的挠度, $F(x, y)$ 是地基与基础之间的作用力。由弹力知

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \sigma_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \sigma_z = \lambda \varepsilon + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases} \quad (10)$$

将 u, v 和 w 的表达式代入式 (10), 得

$$\begin{cases} \sigma_{xz}(x, y, 0) = -\mu f^{-2} \left[-\frac{i\xi}{q_1} A + \frac{1}{q_1} (\xi^2 + q_1^2) B + \frac{\xi\eta}{q_1} C \right] = 0, \\ \sigma_{yz}(x, y, 0) = -\mu f^{-2} \left[-\frac{i\eta}{q_1} A + \frac{\xi\eta}{q_1} B + \frac{1}{q_1} (\eta^2 + q_1^2) C \right] = 0, \\ \sigma_z(x, y, 0) = \mu f^{-2} \left[\left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) A + 2i(\xi B + \eta C) \right] = -F(x, y). \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{因 } f^2[\sigma_z(x, y, 0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} -F(x, y) e^{i(\xi x + \eta y)} dx dy = -\bar{F}(\xi, \eta), \quad (12)$$

给式 (11) 两边做双重 Fourier 变换, 并结合式 (12) 可以解出待定系数如下:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\bar{F}(\xi, \eta)}{\lambda + \mu}, \\ B &= -i \frac{\bar{F}(\xi, \eta)}{\lambda + \mu} \frac{\xi}{2(\xi^2 + \eta^2)}, \\ C &= -i \frac{\bar{F}(\xi, \eta)}{\lambda + \mu} \frac{\eta}{2(\xi^2 + \eta^2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

将 A, B, C 代入 w 的积分变换解, 得

$$\bar{w}|_{z=0} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{2q_1(\lambda + \mu)\mu} \bar{F}(\xi, \eta), \quad (14a)$$

$$w|_{z=0} = \frac{1}{4\pi(\lambda + \mu)\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{q_1} \bar{F}(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (14b)$$

2 四边自由矩形薄板的控制方程

边长分别为 a 和 b 的矩形薄板支承在弹性半空间地基的表面上, 假设矩形薄板与地基之间为光滑接触。板的泊松比为 ν , 面密度为 $\bar{m}$, 挠曲刚度为 D 。设板受到任意分布载荷 $q(x, y)$ 作用, 地基作用于板的

竖向反力为 $F(x, y)$ 。

矩形薄板的弯曲方程可表示为

$$D \nabla^2 \nabla^2 W(x, y) = q(x, y) - F(x, y) \quad (15)$$

式中, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ 。

板的内力可以用挠度函数表示为

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right], \quad M_y = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right] \\ M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W, \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W \end{aligned} \quad (16)$$

边界条件可表示为

$$x=0, \quad a: \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad (17a)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (17b)$$

$$y=0, \quad b: \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (17c)$$

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial y \partial x^2} = 0 \quad (17d)$$

$$\text{角点处: } \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \Big|_B = 0 \quad (17e)$$

3 弹性地基上有限矩形薄板的弯曲

3.1 基本方程

为了在边界条件式(17a)~(17e)下求解式(15), 将挠度设为带有补充项的双重余弦级数, 即

$$\begin{aligned} W = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\nu) \frac{m^2 \pi^2 b^2}{a^2} \cdot \frac{4by^3 - 4b^2 y^2 - y^4}{24b^4} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{2by - y^2}{2b^2} \right] C_m + \left[(2-\nu) \frac{m^2 \pi^2 b^2}{a^2} \cdot \frac{y^4 - 2b^2 y^2 + y^2}{2b^2} \right] D_m \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} + \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\nu) \frac{n^2 \pi^2 a^2}{b^2} \cdot \frac{4ax^3 - 4a^2 x^2 - x^4}{24a^4} + \frac{2ax - x^2}{2a^2} \right] G_n + \right. \\ & \left. \left[(2-\nu) \frac{n^2 \pi^2 a^2}{b^2} \cdot \frac{x^4 - 2a^2 x^2 + x^2}{2a^2} \right] H_n \right\} \cos \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (18)$$

式中 w_{mn} , C_m, D_m, H_n, G_n 均为待定系数。不难证明式(18)对四边自由矩形板具有4阶连续可导性, 且自动满足边界条件式(17b)、(17d)、(17e)。由式(18)得

$$M_x = D \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} +$$

$$\begin{aligned} & D \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\nu) \frac{m^4 \pi^4 b^2}{a^4} \cdot \frac{4by^3 - 4b^2 y^2 - y^4}{24b^4} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{2by - y^2}{2b^2} - \nu(2-\nu) \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{6by - 2b^2 - 3y^2}{6b^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{\nu}{b^2} \right] C_m + \left[(2-\nu) \cdot \frac{m^4 \pi^4 b^2}{a^4} \cdot \frac{y^4 - 2b^2 y^2 + y^2}{24b^4} + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{2b^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. \nu(2-\nu) \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{3y^2 - b^2}{6b^2} - \frac{\nu}{b^2} \right] D_m \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} + \\ & D \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[\nu(2-\nu) \cdot \frac{n^4 \pi^4 a^2}{b^4} \cdot \frac{4ax^3 - 4a^2 x^2 - x^4}{24a^4} + \right. \right. \\ & \left. \left. \nu \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot \frac{2ax - x^2}{2a^2} - (2-\nu) \cdot \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot \frac{6ax - 2a^2 - 3x^2}{6a^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{a^2} \right] G_n + \left[\nu(2-\nu) \frac{n^4 \pi^4 a^2}{b^4} \cdot \frac{x^4 - 2a^2 x^2 + x^2}{24a^4} + \nu \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot \frac{x^2}{2a^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. (2-\nu) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot \frac{3x^2 - a^2}{6a^2} - \frac{1}{a^2} \right] H_n \right\} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y = & D \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\nu \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \pi^2 w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \\ & D \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[\nu(2-\nu) \frac{m^4 \pi^4 b^2}{a^4} \cdot \frac{4by^3 - 4b^2 y^2 - y^4}{24b^4} + \right. \right. \\ & \left. \left. \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{2by - y^2}{2b^2} - (2-\nu) \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{6by - 2b^2 - 3y^2}{6b^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{b^2} \right] C_m + \left[\nu(2-\nu) \frac{m^4 \pi^4 b^2}{a^4} \cdot \frac{y^4 - 2b^2 y^2 + y^2}{24b^4} + \right. \right. \\ & \left. \left. \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{y^2}{2b^2} - (2-\nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \frac{3y^2 - b^2}{6b^2} - \frac{1}{b^2} \right] D_m \right\} \cos \frac{m\pi x}{a} + \\ & D \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\nu) \frac{n^4 \pi^4 a^2}{b^4} \cdot \frac{4ax^3 - 4a^2 x^2 - x^4}{24a^4} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot \frac{2ax - x^2}{2a^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \nu(2-\nu) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot \frac{6ax - 2a^2 - 3x^2}{6a^2} + \frac{\nu}{a^2} \right] G_n + \right. \\ & \left. \left[(2-\nu) \frac{n^4 \pi^4 a^2}{b^4} \cdot \frac{x^4 - 2a^2 x^2 + x^2}{24a^4} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot \frac{x^2}{2a^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. \nu(2-\nu) \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot \frac{3x^2 - a^2}{6a^2} - \frac{\nu}{a^2} \right] H_n \right\} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (20) \end{aligned}$$

由式(18)还可得

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 W = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \pi^4 w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \\ & \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\nu) \frac{m^6 \pi^6 b^2}{a^6} \cdot \frac{4by^3 - 4b^2 y^2 - y^4}{24b^4} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \cdot \frac{2by - y^2}{2b^2} - 2(2-\nu) \cdot \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \cdot \frac{6by - 2b^2 - 3y^2}{6b^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2 b^2} \right] C_m + \left[(2-\nu) \frac{m^6 \pi^6 b^2}{a^6} \cdot \frac{y^4 - 2b^2 y^2 + y^2}{24b^4} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \cdot \frac{y^2}{2b^2} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2(2-\nu) \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \cdot \frac{3y^2 - b^2}{6b^2} - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2 b^2} \Big] D_m \Big\} \cos \frac{m\pi x}{a} + \\
& \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(2-\nu) \cdot \frac{n^6 \pi^6 a^2}{b^6} \cdot \frac{4ax^3 - 4a^2 x^2 - x^4}{24a^4} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \cdot \frac{2ax - x^2}{2a^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. 2(2-\nu) \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \cdot \frac{6ax - 2a^2 - 3x^2}{6a^2} + \nu \frac{n^2 \pi^2}{a^2 b^2} \right] G_n + \right. \\
& \left. \left[(2-\nu) \frac{n^6 \pi^6 a^2}{b^6} \cdot \frac{x^4 - 2a^2 x^2}{24a^4} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \cdot \frac{x^2}{2a^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. 2(2-\nu) \frac{n^4 \pi^4}{b^4} \cdot \frac{3x^2 - a^2}{6a^2} - \nu \frac{n^2 \pi^2}{a^2 b^2} \right] H_n \right\} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (21)
\end{aligned}$$

将荷载以及 $F(x, y)$ 也展为双重余弦级数, 即

$$q(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} q_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (22a)$$

$$F(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} Q_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (22b)$$

$$\text{式中 } \lambda_{mn} = \begin{cases} 1/4, & \text{当 } m=n=0, \\ 1/2, & \text{当 } m=0, n>0 \text{ 或 } m>0, n=0, \\ 1, & \text{当 } m>0, n>0; \end{cases} \quad (23)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (24a)$$

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b F(x, y) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (24b)$$

将式 (18)、(21)、(22) 代入式 (15), 采用文献 [8] 中的方法, 将补充项中含有的多项式, 展为余弦级数, 然后对比式 (15) 两侧展式相应项的系数, 得

$$\begin{aligned}
& D(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 w_{mn} + 2D \left[(2-\nu) b^2 \alpha_m^6 \left(\frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} - \frac{\bar{h}_n}{90} \right) + \right. \\
& \left. \alpha_m^4 \left(\frac{3-2\nu}{\beta_n^2 b^2} h_n + \frac{\bar{h}_n}{6} \right) + \frac{\nu \alpha_m^2 \bar{h}_n}{2b^2} \right] C_m + \\
& 2D \left[(2-\nu) b^2 \alpha_m^6 \left(\frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} + \frac{7\bar{h}_n}{720} \right) + \right. \\
& \left. \alpha_m^4 \left(\frac{3-2\nu}{\beta_n^2 b^2} h_n - \frac{h_n}{12} \right) + \frac{\nu \alpha_m^2 \bar{h}_n}{2b^2} \right] (-1)^{n+1} D_m + \\
& 2D \left[(2-\nu) a^2 \beta_n^6 \left(\frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} - \frac{\bar{h}_m}{90} \right) + \beta_n^4 \left(\frac{3-2\nu}{\alpha_m^2 a^2} h_m + \frac{\bar{h}_m}{6} \right) + \right. \\
& \left. \frac{\nu \beta_n^2 \bar{h}_m}{2a^2} \right] G_n + 2D \left[(2-\nu) a^2 \beta_n^6 \left(\frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} + \frac{7\bar{h}_m}{720} \right) + \right. \\
& \left. \beta_n^4 \left(\frac{3-2\nu}{\alpha_m^2 a^2} h_m - \frac{\bar{h}_m}{12} \right) + \frac{\nu \beta_n^2 \bar{h}_m}{2a^2} \right] (-1)^{m+1} H_n \\
& = \lambda_{mn} (q_{mn} - Q_{mn}) \quad (25)
\end{aligned}$$

式中 $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$; $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$; 当 $i=0$ 时, h_i 取值为 0,

$\bar{h}_i$ 取值为 1, 当 $i \neq 0$ 时, h_i 取值为 1, $\bar{h}_i$ 取值为 0。

考虑边界条件式 (17a) 和 (17c)。以 $x=0$ 代入式 (19), 然后将式中 y 的多项式展为 y 的余弦级数。在 $x=0$ 边上, $M_x=0$, 其余弦级数的每一系数必须为 0, 即

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} (\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) w_{mn} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (2-\nu) b^2 \alpha_m^4 \left(\frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} - \frac{\bar{h}_n}{90} \right) - \right. \\
& \left. \alpha_m^2 \left[\frac{(1-\nu)^2}{\beta_n^2 b^2} h_n - \frac{\bar{h}_n}{6} \right] + \frac{\nu \bar{h}_n}{2b^2} \right\} C_m + \\
& 2(-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ (2-\nu) b^2 \alpha_m^4 \left(\frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} + \frac{7\bar{h}_n}{720} \right) - \right. \\
& \left. \alpha_m^2 \left[\frac{(1-\nu)^2}{\beta_n^2 b^2} h_n + \frac{\bar{h}_n}{12} \right] + \frac{\nu \bar{h}_n}{2b^2} \right\} D_m + \left(\frac{2-\nu}{3} \beta_n^2 + \frac{1}{a^2} \right) G_n + \\
& \left(\frac{2-\nu}{6} \beta_n^2 - \frac{1}{a^2} \right) H_n = 0 \quad (26)
\end{aligned}$$

将 $x=a$ 代入式 (19), 使其等于 0, 得

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\alpha_m^2 + \nu \beta_n^2) w_{mn} + 2 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ (2-\nu) b^2 \alpha_m^4 \times \right. \\
& \left. \left(\frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} - \frac{\bar{h}_n}{90} \right) - \alpha_m^2 \left[\frac{(1-\nu)^2}{\beta_n^2 b^2} h_n - \frac{\bar{h}_n}{6} \right] + \frac{\nu \bar{h}_n}{2b^2} \right\} C_m + \\
& 2(-1)^{n+1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ (2-\nu) b^2 \alpha_m^4 \left(\frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} + \frac{7\bar{h}_n}{720} \right) - \right. \\
& \left. \alpha_m^2 \left[\frac{(1-\nu)^2}{\beta_n^2 b^2} h_n + \frac{\bar{h}_n}{12} \right] + \frac{\nu \bar{h}_n}{2b^2} \right\} D_m + \left[-\frac{\nu(2-\nu)}{24} a^2 \beta_n^4 + \right. \\
& \left. \frac{2\nu-1}{3} \beta_n^2 + \frac{1}{a^2} \right] G_n + \left[-\frac{\nu(2-\nu)}{24} a^2 \beta_n^4 + \frac{5\nu-4}{6} \beta_n^2 - \right. \\
& \left. \frac{1}{a^2} \right] H_n = 0 \quad (27)
\end{aligned}$$

同理, 分别以 $y=0$, $y=b$ 代入式 (20), 得

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n^2 + \nu \alpha_m^2) w_{mn} + \left(\frac{2-\nu}{3} \alpha_m^2 + \frac{1}{b^2} \right) C_m + \left(\frac{2-\nu}{6} \alpha_m^2 - \frac{1}{b^2} \right) D_m + \\
& 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (2-\nu) a^2 \beta_n^4 \left(\frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} - \frac{\bar{h}_m}{90} \right) - \beta_n^2 \left[\frac{(1-\nu)^2}{\alpha_m^2 a^2} h_m - \frac{\bar{h}_m}{6} \right] + \right. \\
& \left. \frac{\nu \bar{h}_m}{2a^2} \right\} G_n + 2(-1)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (2-\nu) a^2 \beta_n^4 \left(\frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} + \frac{7\bar{h}_m}{720} \right) - \right. \\
& \left. \beta_n^2 \left[\frac{(1-\nu)^2}{\alpha_m^2 a^2} h_m + \frac{\bar{h}_m}{12} \right] + \frac{\nu \bar{h}_m}{2a^2} \right\} H_n = 0 \quad (28) \\
& \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\beta_n^2 + \nu \alpha_m^2) w_{mn} + \left[-\frac{\nu(2-\nu)}{24} b^2 \alpha_m^4 + \frac{2\nu-1}{3} a^2 + \frac{1}{b^2} \right] C_m + \\
& \left[-\frac{\nu(2-\nu)}{24} b^2 \alpha_m^4 + \frac{5\nu-4}{6} a^2 - \frac{1}{b^2} \right] D_m + \\
& 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ (2-\nu) a^2 \beta_n^4 \left(\frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} - \frac{\bar{h}_m}{90} \right) - \beta_n^2 \left[\frac{(1-\nu)^2}{\alpha_m^2 a^2} h_m - \frac{\bar{h}_m}{6} \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\frac{\nu \bar{h}_m}{2a^2} \left\{ G_n + 2(-1)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ (2-\nu)a^2 \beta_n^4 \left(\frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} + \frac{7\bar{h}_m}{720} \right) - \beta_n^2 \left[\frac{(1-\nu)^2}{\alpha_m^2 a^2} h_m + \frac{\bar{h}_m}{12} \right] + \frac{\nu \bar{h}_m}{2a^2} \right\} H_n = 0 \right. \quad (29)$$

若地基反力 $F(x, y)$ 已知, 由式 (25) ~ (29) 这五组方程可联立求解各待定系数 w_{mn} 、 C_m 、 D_m 、 H_n 、 G_n , 各系数求得之后代入式 (18) 中得挠度, 进一步可求得弯矩等内力。由式 (22b) 得

$$\bar{F}(\xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} Q_{mn} \frac{[e^{i\xi a} (-1)^m - 1][(-1)^n e^{i\eta b} - 1]}{\xi \eta [1 - (\frac{m\pi}{a\xi})^2][1 - (\frac{n\pi}{b\eta})^2]} \quad (30)$$

将 $w|_{z=0}$ 看成是区域 $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ 上的函数, 当然能将其展成双重余弦级数:

$$w|_{z=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{mn} w_{zmn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (31)$$

$$w_{zmn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b w|_{z=0} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (32)$$

利用式 (14b) 及 (32), w_{zmn} 可表示为

$$w_{zmn} = \frac{1}{2\pi^2 ab} \frac{(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)\mu} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} Q_{pq} \lambda_{pq} \eta_{pqmn} \quad (33)$$

$\eta_{pqmn} =$

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{[(-1)^p e^{i\xi a} - 1][(-1)^q e^{i\eta b} - 1][(-1)^m e^{-i\xi a} - 1][(-1)^n e^{-i\eta b} - 1]}{q \xi^2 \eta^2 [1 - (\frac{m\pi}{a\xi})^2][1 - (\frac{n\pi}{b\eta})^2][1 - (\frac{p\pi}{a\xi})^2][1 - (\frac{q\pi}{b\eta})^2]} d\xi d\eta$$

采用文献[8]中的方法, 将板的挠度式 (18) 也展成同样形式的双重余弦级数, 由于矩形薄板的挠度与弹性地基表面的竖向位移相等, 因此其对应项的系数也相等, 于是得以下变形协调方程:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi^2 ab(\lambda + \mu)\mu} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} Q_{pq} \lambda_{pq} \eta_{pqmn} \lambda_{mn} = w_{mn} + \\ & 2 \left[(2-\nu)b^2 \alpha_m^2 \left(\frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} - \frac{\bar{h}_n}{90} \right) - \frac{h_n}{\beta_n^2 b^2} + \frac{\bar{h}_n}{6} \right] C_m + \\ & 2 \left[(2-\nu)b^2 \alpha_m^2 \left(\frac{h_n}{\beta_n^4 b^4} + \frac{7\bar{h}_n}{720} \right) - \frac{h_n}{\beta_n^2 b^2} - \frac{\bar{h}_n}{12} \right] (-1)^{n+1} D_m + \\ & 2 \left[(2-\nu)a^2 \beta_n^2 \left(\frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} - \frac{\bar{h}_m}{90} \right) - \frac{h_m}{\alpha_m^2 a^2} + \frac{\bar{h}_m}{6} \right] G_n + \\ & 2 \left[(2-\nu)a^2 \beta_n^2 \left(\frac{h_m}{\alpha_m^4 a^4} + \frac{7\bar{h}_m}{720} \right) - \frac{h_m}{\alpha_m^2 a^2} - \frac{\bar{h}_m}{12} \right] (-1)^{m+1} H_n \quad (34) \end{aligned}$$

式 (25) ~ (29) 以及 (34) 这 6 组方程, 即为弹性地基上矩形薄板弯曲的控制方程。联立求解各待定系数 w_{mn} 、 Q_{mn} 、 C_m 、 D_m 、 G_n 、 H_n 。设 m 和 n 分别取最大 M 和 N , 则共有 $2(M+1)(N+1) + 2(M+1) + 2(N+1)$ 个方程, 用以解相同数目的未知数。各系数求得之后代入式 (18), 得板的挠度, 进一步可求得弯

矩内力值。当然也能计算出地基反力。

3.2 数值算例

(1) 考虑一支承在弹性半空间上, 边长 $a = 4 \text{ m}$ 、厚度 $h = 0.2 \text{ m}$ 的弹性方薄板的弯曲。假设板与地基之间为光滑接触。地基泊松比为 0.4, 弹性模量为 343 MPa。板的泊松比为 0.167, 弹性模量 $E = 34300 \text{ MPa}$ 。板上作用均布载荷 $q = 0.98 \text{ MPa}$, 采用本文的方法 ($M = N = 20$)、四节点等参元及样条有限元方法 (8×8 的网络) 的计算结果列于表 1。

表 1 方形薄板中心挠度和弯矩值

Table 1 The deflection and bending moment at the plate center

本文的方法		四节点等参元		样条有限元	
$W_{\max}$ /m	M_x /(kN · m/m)	$W_{\max}$ /m	M_x /(kN · m/m)	$W_{\max}$ /m	M_x /(kN · m/m)
0.0107	35.558	0.01055	37.63	0.01062	35.51

图 1 是用本文方法所得的方形薄板的三维变形图形, 图 2 表示沿方板中心线和边界线的二维变形曲线, 图 3 表示方板与地基接触压力的三维图形, 其中纵坐标为接触压力与均布载荷之比, 图 4 表示接触压力沿方板中心线和边界线的二维变形曲线。

不仅由表 1 知, 而且由图 1、图 2、图 3、图 4 分别与文献[2]的图 6、图 7、图 8、图 9 的对比知, 本文的方法是切实可行的。

(2) 从论文的整个推导和计算过程, 可以看出该方法适合于求解弹性半空间上四边自由矩形板受任意竖向载荷作用的问题。例如, 将算例中的分布载荷换成集中力 $p = 1000 \text{ kN}$ 算得板的挠度如图 5 所示。

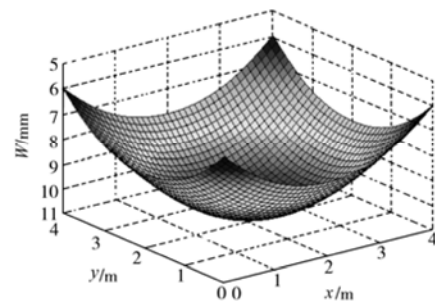


图 1 弹性地基板的变形

Fig. 1 Deformation of the plate on elastic foundation

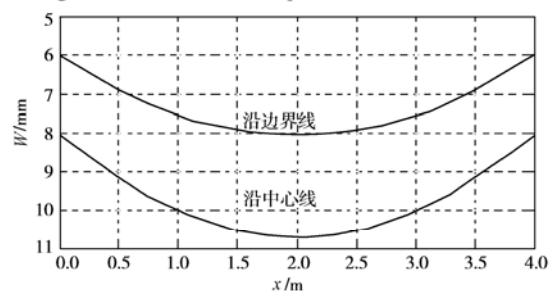


图 2 沿方板中心线和边界线的挠度

Fig. 2 Deflection along the center and edge lines of plate

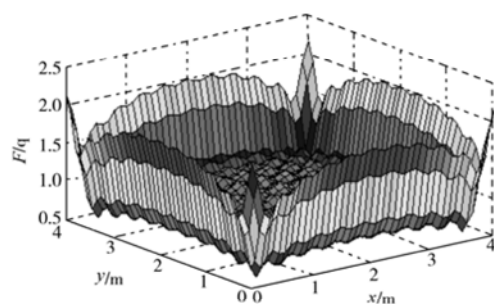


图 3 接触压力分布

Fig. 3 Contact pressure distribution

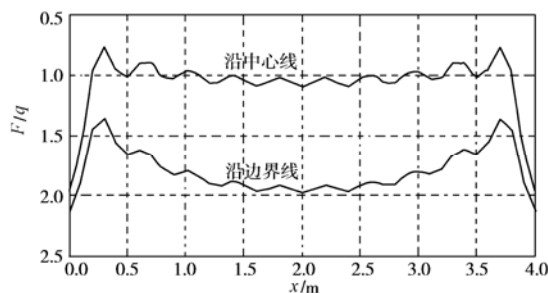


图 4 沿方板中心线和边界线的压力分布

Fig. 4 Contact pressure along the center and edge lines of plate

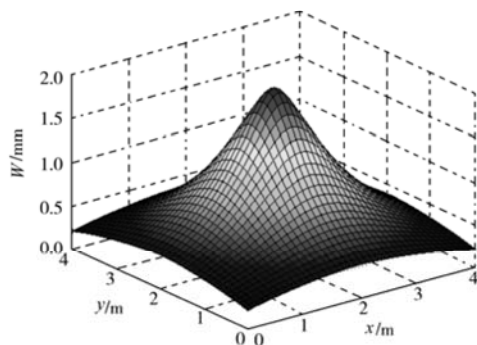


图 5 受集中力作用下板的变形

Fig. 5 Deformation of the plate loaded with centralized force

4 结 论

采用双重 Fourier 变换, 分析得到弹性半空间受任意竖向荷载作用下的静力积分变换解, 与四边自由矩形板的弯曲解析解相结合, 得出弹性半空间地基上四边自由矩形板受任意竖向荷载作用的弯曲解析解, 包括板的挠度、内力及板与地基之间的接触反力。不仅弥补了数值法的一些不足, 同时取消了 Winkler 地基模型或双参数地基模型的假设, 从而得到板的内力及板与地基之间接触反力更合理、更精确的分布规律。

参考文献:

- [1] Eatock Taylor E, Ohkusu M. Green function for hydroelastic analysis of vibrating free-free beams and plates[J]. Applied Ocean Research, 2000, 22(1):12 - 19.
- [2] 王元汉, 邱先敏, 张佑启. 弹性地基板的等参有限元法计算[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(4):7 - 11.
- [3] 曲庆璋, 章 权, 季求知, 梁兴复. 弹性板理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2000.
- [4] 王克林, 黄 义. 弹性地基上四边自由矩形板[J]. 计算结构力学及其应用, 1985, 2(2):47 - 58
- [5] 陈叔陶. 弹性地基上的自由边矩形板[J]. 力学学报, 1960, 4(1):23 - 35.
- [6] 曲庆璋, 梁兴复, 董学江. Winkler 弹性地基上自由矩形板问题[J]. 强度与环境, 1998, (2):31 - 37.
- [7] 李 刚, 王貽荪, 尚守平. 弹性半空间上矩形基础稳态振动积分变换解[J]. 湖南大学学报, 2000, 27(4):88 - 93.
- [8] 严宗达. 结构力学中的富里叶级数解法[M]. 天津: 天津大学出版社, 1989, 186 - 193.

本刊 2004 年 (网络版) 总被引频次和影响因子 位居全国同类 82 种科技期刊前列

期刊的总被引频次和影响因子是衡量该刊学术质量和编辑质量的二项主要指标。现据中国科技信息研究所与万方数据股份有限公司对 2004 年全国正式出版的社会科学和自然科学 4250 种上网期刊 (网络版) 的有关资料编制而成, 并于 2005

年 9 月出版的《中国期刊引证研究报告》(WCJCR) 中的统计数据表明, 本刊在 2004 年被上网的 345 种刊物引用的总被引频次和影响因子分别为 2499 和 1.058, 分别名列当年同类 (建筑科学类) 82 种科技期刊的第 1 位和第 2 位。

(范文田 供稿)