

岩层上非均质弹性地基轴对称问题求解

Solutions for axisymmetric problems of non-homogeneous subgrade on rock

朱向荣^{1,2}, 杜秦文¹, 王文军²

(1. 浙江大学 岩土工程研究所, 浙江 杭州 310027 2. 浙江大学 宁波理工学院, 浙江 宁波 315100;)

摘要: 假设地基土体为弹性, 不可压缩, 剪切模量随深度线性变化, 采用 Hankel 变换, 得到了下卧为岩层, 表面分布一般轴对称荷载的地基土体应力位移积分形式解, 应用数值方法, 就地基的非均质性、岩层深度对位移的影响进行了讨论。获得的解可以退化到半空间情况。

关键词: 剪切模量; 轴对称; Hankel 变换; 非均质

中图分类号: TU 452 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000 - 4548(2005)04 - 0383 - 05

作者简介: 朱向荣 (1961 -), 男, 浙江义乌人, 浙江大学宁波理工学院副院长, 浙江大学岩土工程研究所教授, 博士生导师。主要从事软粘土力学、桩基工程、地基处理和环境岩土工程等方面的研究。

ZHU Xiang-rong^{1,2}, DU Qin-wen¹, WANG Wen-jun²

(1. Institute of Geotechnical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China; 2. Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo 315100, China)

Abstract: In this paper we present the exact analytical solutions for displacements and stresses of an isotropic non-homogeneous elastic subgrade on rock subject to an axisymmetric surface load. It is assumed that the soil of the subgrade is incompressible and that the shear modulus varies linearly with depth. Selected numerical results for vertical displacements are presented to describe the influence of the degree of non-homogeneity, depth of rock of the non-homogeneous subgrade. Hankel integral transforms are used in the analysis.

Key words: shear modulus; axisymmetric; Hankel transform; non-homogeneous

0 引 言

荷载作用下地基的变形问题, 历来是土力学界所关心的。长期以来, 这方面进行了大量工作, 如果不考虑固结, Winkler 和均质弹性半空间模型是研究和应用的最广泛而深入的两种地基模型。为了模拟地基土体的非均质性, 弹性半空间层状体系模型等也得到了深入的研究。Gibson^[1]在 1967, 首先用解析方法研究了一种土体不可压缩, 剪切模量随深度线性变化的新的地基模式, 用以考虑地基非均质性的影响。与上述多层弹性体系模型不同的是, 由于剪切模量是一个坐标分量的连续函数, 导致这种模型的力学基本控制方程与传统的基于均质弹性的控制方程有本质区别, 这给此类模型的解析研究带来了较大困难^[2]。到目前为止, 这方面的研究进行的还不充分。这类剪切模量是一个坐标分量连续函数的地基模型, 在发表的文章中被称作非均质 (non-homogeneous) 地基, 其他的还有如剪切模量随深度指数形式变化, Vardoulakis 和 Vrettos^[3-5]研究了剪切模量这种变化形式弹性地基的稳态波动问题和动态响应。Pajapakse^[6]解析研究了剪切模量随深度线性变化的非均质地基内部作用轴对称竖向荷载时地基土体的应力位移场。Awojobi^[2,7-9]用解析方法研究了非均质地基上刚性基础振动的混和边值问题。Doherty^[10]采用半解析方法, 研究了非均质地基

内部作用竖向、水平、扭转以及弯矩荷载的情况, 在其模型中土体可压缩。

实际工程中, 常遇到下卧为岩层或下卧层力学性质非常好的地基类型, 对于这种情况, Gibson^[11]用解析方法初步研究了岩层上土体剪切模量随深度线性变化非均质地基的平面应力和轴对称问题。但 Gibson 在这篇文章中显示的求解技巧不具有通用性, 不能得到一般轴对称荷载作用下的解, 所以论文只讨论了均布荷载情况。而且这篇文章中使用了近似方法, 给出的实际上是一种近似解。本文在 Gibson 这篇论文基础上, 通过严格的边值问题求解, 给出一般轴对称荷载作用下, 岩层上非均质地基土体应力位移精确的积分形式解, 并计算了多种荷载形式下的结果。

1 基本假定

如图 1 所示, 地基表面作用有半径为 a 的轴对称荷载, 深度 z_1 以下为岩层。基本假定: ①土体为线弹性; ②土体不可压缩; ③剪切模量随深度线性变化, $G(z) = G(0) + nz$, $n \geq 0$; ④岩层顶面竖向位移为零。

2 控制方程

$$\sigma_r = 2G(z) \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \alpha e \right), \quad (1)$$

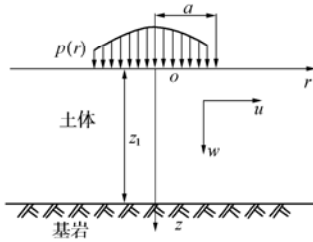


图1 岩层上地基表面作用轴对称荷载

Fig.1 Subgrade on the rock subject to an axisymmetric surface load over a circular area

$$\sigma_\theta = 2G(z)\left(\frac{u_r}{r} + \alpha e\right) \quad (2)$$

$$\sigma_z = 2G(z)\left(\frac{\partial w_r}{\partial z} + \alpha e\right) \quad (3)$$

$$\tau_{zr} = G(z)\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) \quad (4)$$

式中 $G(z) = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$ 为剪切模量; $e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$ 为体积应变; $\alpha = \frac{\nu}{1-2\nu}$ 。

不计体力, 平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (6)$$

3 求解

地基土体不可压缩, $e = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$, $\alpha = \infty$, 则

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

αe 成为未定型项, 参照文献[1], 设

$$f(r, z) = (1 + 2\alpha)e = 2\alpha e \quad (8)$$

将式(1)~(4)代入式(5)、(6), 利用式(7)得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)u_r + \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + h(z)\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = 0 \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)w + \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + h(z)\left(2 \frac{\partial w}{\partial z} + f\right) = 0 \quad (10)$$

式中 $h(z) = \frac{d}{dz} \ln G(z)$ 。

引入 Hankel 变换

$$\bar{\psi}(\xi) = \int_0^\infty \psi(r) \xi J_n(\xi r) dr$$

式中 $\bar{\psi}(\xi)$ 为 $\psi(r)$ 的 n 阶 Hankel 变换, $J_n(x)$ 为 n 阶第一类 Bessel 函数。

根据 Hankel 变换性质有

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n}{r^2}\right) \psi(r) r J_n(\xi r) dr = -\xi^2 \bar{\psi}(\xi) \quad (11)$$

利用式(11), 对式(7)、(9)、(10)进行 Hankel 变换并化简可得

$$\xi^2 \bar{u} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$\xi^2 \bar{u} + \xi \bar{f} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + h(\xi \bar{w} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}) = 0 \quad (13)$$

$$\xi^2 \bar{w} - \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} - \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} - h\left(2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{f}\right) = 0 \quad (14)$$

式中 \bar{w} 、 \bar{f} 分别是 $w(r, z)$ 、 $f(r, z)$ 的零阶 Hankel 变换, \bar{u} 是 $u(r, z)$ 的一阶 Hankel 变换。

令 $q = z + G(0)/n$, 所以 $h(z) = 1/q$, 得

$$\left(\frac{d^2}{dq^2} + \frac{2}{q} \frac{d}{dq} - \xi^2\right)\left(\frac{d^2}{dq^2} - \xi^2\right) \bar{w} = 0 \quad (15)$$

上式的通解是

$$\bar{w} = e^{-\xi q} [A + D\alpha_4(q)] + e^{\xi q} [B + C\alpha_3(q)] \quad (16)$$

利用式(12), 可得

$$\bar{u} = e^{-\xi q} [A + D\alpha_2(q)] - e^{\xi q} [B + C\alpha_1(q)] \quad (17)$$

上两式中

$$\alpha_1(q) = -[e^{-2\xi q} Ei(2\xi q) + \ln(\xi q)]$$

$$\alpha_2(q) = -[e^{2\xi q} Ei(-2\xi q) + \ln(\xi q)]$$

$$\alpha_3(q) = e^{-2\xi q} Ei(2\xi q) - \ln(\xi q)$$

$$\alpha_4(q) = e^{2\xi q} Ei(-2\xi q) - \ln(\xi q)$$

A 、 B 、 C 、 D 为 ξ 任意的函数; $Ei(x)$ 为指数积分^[13]。

由式(13)、(16)、(17)得

$$\bar{f} = -2[Ae^{-\xi q} q^{-1} + Be^{\xi q} q^{-1} + Ce^{\xi q} f_1(q) + De^{-\xi q} f_2(q)] \quad (18)$$

式中 $f_1(q) = q^{-1}[\alpha_3(q) - 1]$, $f_2(q) = q^{-1}[\alpha_4(q) - 1]$ 。

对式(3)、(4)进行 Hankel 变换后, 将式(16)~(18)代入得

$$\frac{\bar{\sigma}_z}{2G} = -e^{-\xi q} [A\alpha_6(q) + D\beta_1(q)] + e^{\xi q} [B\alpha_5(q) - C\beta_2(q)] \quad (19)$$

$$\frac{\bar{\tau}_{zr}}{2G} = -e^{-\xi q} [-\xi A + D\beta_3(q)] - e^{\xi q} [B\xi - C\beta_4(q)] \quad (20)$$

式中 $\bar{\sigma}_{zr}$ 、 $\bar{\tau}_{zr}$ 分别是 σ_{zr} 和 $\tau_{zr}(r, z)$ 的零阶和一阶

Hankel 变换, $\alpha_5(q) = \xi - q^{-1}$, $\alpha_6(q) = \xi + q^{-1}$,

$$\beta_1(q) = f_2(q) + \xi \alpha_2(q), \quad \beta_2(q) = f_1(q) - \xi \alpha_1(q),$$

$$\beta_3(q) = -[q^{-1} + \xi \alpha_4(q)], \quad \beta_4(q) = [q^{-1} - \xi \alpha_3(q)]$$

4 边值问题

如图 1 所示, 地基表面作用有半径为 a 的轴对称荷载 $p(r)$, 岩层深度为 z_1 。在岩层顶面, 竖向位移 w 为零, 假定土体不可压缩, 故水平位移 u 为零。经过 Hankel 变换后的边界条件可表示为

$$\sigma_z(\xi, 0) = -p(\xi), \tag{21}$$

$$\tau_{zr}(\xi, 0) = 0, \tag{22}$$

$$u(\xi, z_1) = 0, \tag{23}$$

$$w(\xi, z_1) = 0. \tag{24}$$

式中 $p(\xi)$ 是荷载的 Hankel 变换

$$\bar{p}(\xi) = \int_0^\infty p(r)rJ_0(\xi r)dr, \tag{25}$$

将式 (16)、(17)、(19)、(20) 代入式 (21) ~ (24)

$$B = De^{-2\xi q_0}k_1 + Ck_2 - e^{-\xi q_0}F, \tag{26}$$

$$A = Dk_3 + Ck_4e^{2\xi q_0} + e^{-\xi q_0}F, \tag{27}$$

$$D[e^{-\xi q_1}(\alpha_{21} + k_3) - e^{\xi(q_1-2q_0)}k] = C[e^{\xi q_1}(\alpha_{11} + k_2) - e^{\xi(2q_0-q_1)}k_4] - F[e^{\xi(q_1-q_0)} + e^{\xi(q_0-q_1)}], \tag{28}$$

$$C = F\{e^{-\xi q_0}[2(k_1 + k_3) + (\alpha_{21} + \alpha_{41}) + e^{\xi(q_0-2q_1)}(\alpha_{41} - \alpha_{21})]\}/(R_1 + e^{2\xi(q_0-q_1)}R_2). \tag{29}$$

式中 $k_1 = \frac{\alpha_{60}\beta_{30} + \xi\beta_{10}}{\xi(\alpha_{50} + \alpha_{60})}$, $k_2 = \frac{\alpha_{60}\beta_{40} + \xi\beta_{20}}{\xi(\alpha_{50} + \alpha_{60})}$, $k_3 = \frac{\alpha_{50}\beta_{30} - \xi\beta_{10}}{\xi(\alpha_{50} + \alpha_{60})}$, $k_4 = \frac{\alpha_{50}\beta_{40} - \xi\beta_{20}}{\xi(\alpha_{50} + \alpha_{60})}$, $F = \frac{p(\xi)}{2G(0)(\alpha_{50} + \alpha_{60})}$,

$$R_1 = [2(k_2k_3 - k_4k_1) + \alpha_{41}(\alpha_{11} + k_2) + \alpha_{21}(\alpha_{31} + k_2) + k_3(\alpha_{31} + \alpha_{11})],$$

$$R_2 = [k_1(\alpha_{11} - \alpha_{31}) + k_4(\alpha_{21} - \alpha_{41})],$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_i(q_j), \beta_{ij} = \beta_i(q_j), i = 1, 2, \dots, 6; j = 0, 1,$$

$$q_0 = G(0)/n \quad q_1 = z_1 + G(0)/n. \tag{30}$$

将由式 (26) 至式 (29) 显式表达的 ξ 的函数 A 、 B 、 C 、 D , 分别代入相关表达式, 可以求出有关位移、应力的解, 如: 将其代入式 (16), 再进行相应的 Hankel 反变换, 就可以求出竖向位移的解析表达式。其他的位移应力分量的求解与此类似, 限于篇幅, 不再讨论。

5 三种常见荷载形式下的算例

5.1 荷载形式说明

圆形面积分布的竖向轴对称荷载为^[13]

$$P(r) = \begin{cases} kp(1-\frac{r^2}{a^2})^{k-1} & (r \leq a), \\ 0 & (r > a). \end{cases} \tag{31}$$

式中 k 为荷载类型系数, $k > 0$; p 为均布荷载集度。

几种常见的荷载都包含在这种形式中。当 $k=1$ 时, 就是圆形均布荷载; 当 $k=3/2$ 时, 就是半球形荷载 (限于篇幅, 不作讨论); 当 $k=1/2$ 时, 就是刚性承载板下的压力分布。

对式 (31) 进行零阶 Hankel 变换, 利用第一索宁有限积分公式^[14]可得

$$p(\xi) = \frac{2^{k-1}\Gamma(k+1)pa}{\xi(\xi a)^{k-1}}J_k(\xi a). \tag{32}$$

式中 $\Gamma(z)$ 为伽马函数。

(1) 圆形均布荷载。这是最简单的一种形式。Gibson^[11]文中, 轴对称情况就讨论了这一种情况。将 $k=1$ 代入式 (32) 得圆形均布荷载的 Hankel 变换形式

$$\bar{p}(\xi) = \frac{paJ_1(\xi a)}{\xi}, \tag{33}$$

(2) 刚性承载板下压力荷载。高层建筑作用下, 地基所受荷载就属于这种。对这类刚性基础作用下地基的研究, 具有更广泛实用性。将 $k=1/2$ 代入式 (32) 得刚性承载板下压力的 Hankel 变换形式

$$p(\xi) = \frac{pasin(\xi a)}{2\xi}. \tag{34}$$

(3) 集中荷载。集中荷载比较特殊, 荷载作用点上的位移应力出现奇点。所以不计算这点的有关量值。荷载形式为

$$p(r) = \begin{cases} P & r=0, \\ 0 & r \neq 0. \end{cases} \tag{35}$$

式中 P 为荷载大小。

其 Hankel 变换形式为

$$\bar{p}(\xi) = \frac{P}{\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{J_1(\xi a)}{\xi a} = \frac{P}{2\pi}. \tag{36}$$

把相应荷载形式的 $p(\xi)$ 代入由式 (26) ~ (29) 求出的 $A(\xi)$ 、 $B(\xi)$ 、 $C(\xi)$ 、 $D(\xi)$, 然后再代入式 (16), 进行 Hankel 反变换, 就可以得到竖向位移 w 的积分形式解。这是一个复杂的对 ξ 从零到无穷的积分, 只能进行数值计算^[3]。前两种荷载作用下计算时无量纲化。参照文献[3], 土体的非均质性用 $m = n/G(0)$ 来表示, 坐标单位取荷载半径 a , 这样所有长度均为无量纲长度。位移采用无量纲位移 $W(r, z) = \frac{w(r, z)G(0)}{na}$ 。对于集中荷载, 容易看出, 解的形式为

$$w(q_0, q_1, q, r, z) = \frac{P}{G(0)} \int_0^\infty \psi(q_0, q_1, q, \xi, z)J_0(\xi r)d\xi.$$

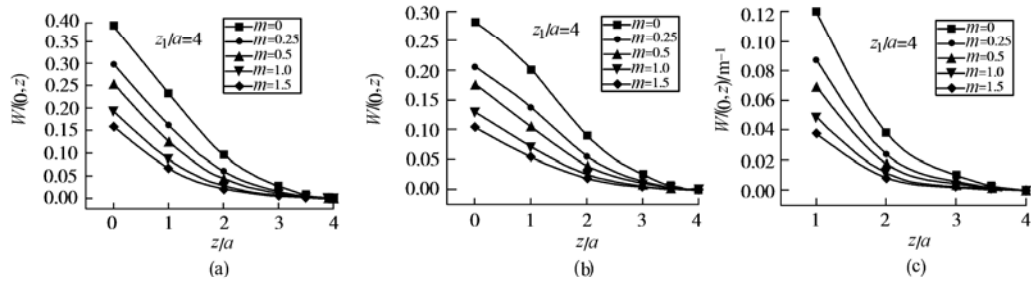


图2 荷载中心下沿 z 轴的竖向位移

Fig.2 Vertical displacement along the z-axis under the center of load

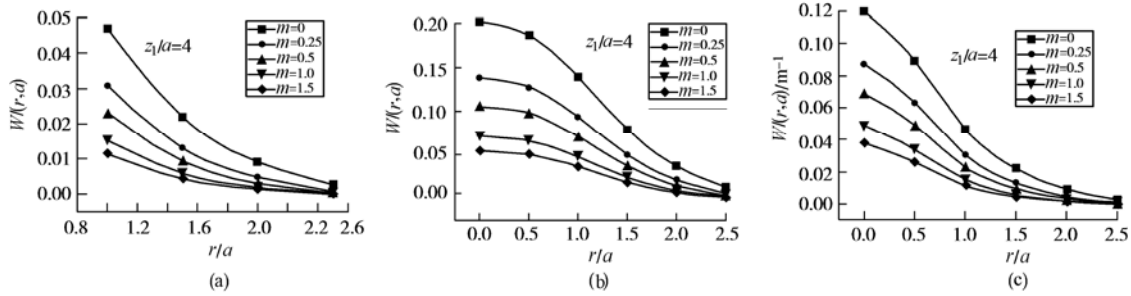


图3 地基内部沿 r 轴的竖向位移

Fig.3 Vertical displacement in the interior of the subgrade versus r-axis

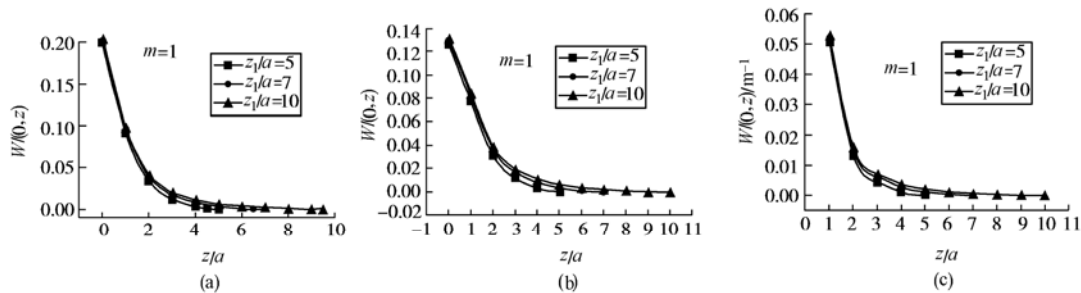


图4 不同岩层深度荷载中心下沿 z 轴的竖向位移

Fig.4 Vertical displacement along the z-axis under the center of load for different buried depth of rock

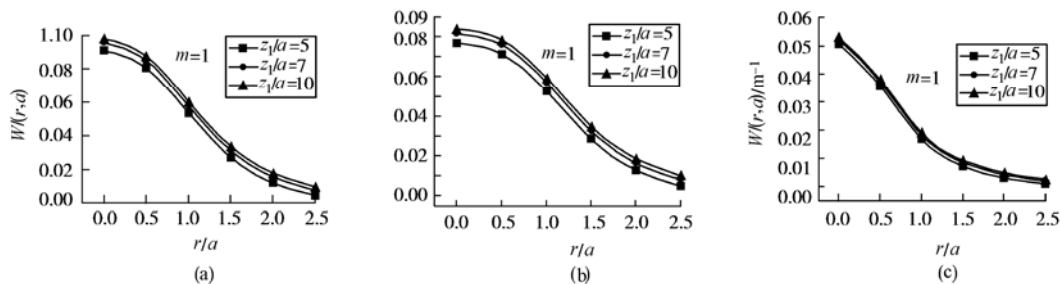


图5 不同岩层深度地基内部沿 r 轴的竖向位移

Fig.5 Vertical displacement in the interior of the subgrade versus r-axis for different buried depth of rock

计算给出的结果为 $W(r,z) = w(r,z)G(0) / Pa$ 。要注意的是，这个参数的量纲为 m^{-2} ，并非如前两种荷载形式下的无量纲 $W(r,z)$ 。如果要得到实际位移值，只需方便地把 $G(0)$ 、 P 与 a 的值代入即可。

5.2 计算结果及讨论

图2~5中，(a)、(b)、(c)分别指圆形均布荷载、刚性承载板荷载和集中荷载情况。 $m = n / G(0)$ 用来表征土体剪切模量随深度增加这一非均质性。图2表示

岩层深度是4倍荷载半径， m 取不同值时，荷载中心点下，深度不同的点的竖向位移。图3表示岩层深度是4倍荷载半径， m 取不同的值时，距地基表面1倍荷载半径深度水平面上，沿 r 轴不同的点的竖向位移。图4表示 m 取1，岩层深度不同时，地基表面荷载中心下，深度不同的点的竖向位移。图5表示 m 取1，岩层深度不同时，距地基表面1倍荷载半径深度水平面上，沿 r 轴不同的点的竖向位移。

从以上图 2, 3 可以看出, 弹性模量随深度增加这一非均质性对地基土体沿 z 轴和 r 轴的竖向位移的影响都较大。岩层深度一定, $G(0)$ 相同的情况下, m 越小, 同一点的竖向位移越大; 弹性均质情况下($m=0$) 竖向位移是最大的; 而且地基的非均质性对表面竖向位移, 即地基的沉降影响最大, 这些结论对设计工作具有积极意义。因为应力的消散及岩层顶部竖向位移为零等因素, 地基非均质性对竖向位移的影响随着深度的增加而减小。

从图 4, 5 可以看出, 岩层深度的变化对地基土体竖向位移的影响相对较小。相对地基土体沿深度的竖向位移, 岩层深度的变化对沿 r 轴的影响稍大。

表 1 $m=0.25$ 荷载中心下沿 z 轴的竖向位移

Table 1 Vertical displacement along the z -axis under the center of load when $m=0.25$

z/a	文献[1] $W(0,z)$	本文解退化数值计算 ($z_1/a=10000$) $W(0,z)$
0	0.341658	0.341659
1	0.203495	0.203500
2	0.104737	0.104733
3	0.061683	0.061682
4	0.040409	0.040409
5	0.028477	0.028477
6	0.021135	0.021135

岩层距地基表面的距离为 z_1 , 从问题的物理意义可知, 随着 z_1 的增大, 竖向位移将趋近于一个极限, 这就是半空间问题的解。令 $z_1 \rightarrow \infty$, 本文所研究模型将退化为此类非均质地基轴对称半空间问题。文献 [1] 中给出了半空间轴对称问题的解。由本文给出的解, 令 $z_1 \rightarrow \infty$, 则可退化到文献 [1] 给出的解。可利用前面所述数值方法计算退化到半空间问题的解来验证本文的推导。从图 4、图 5 的计算结果也可看出, 当给定条件时, 随着 z_1 增大, 竖向位移的增大相对减小。限于篇幅, 此处不再详述, 只给出均布荷载情况下的一种计算结果, 见表 1。

6 结 论

本文利用 Hankel 变换方法, 得到了岩层上剪切模量随深度线性变化的非均质地基在一般轴对称荷载作用下, 地基土体应力位移的积分形式解, 分析讨论了圆形均布荷载, 刚性承载板压力荷载和集中荷载这三种具有实际意义的荷载形式作用下, 地基非均质性以及岩层深度等对地基土体竖向位移的影响, 结论有:

(1) 地基非均质性对地基土体竖向位移有较大影响, 其他情况相同, 以均质弹性时位移最大。这也是此类模量随深度连续变化非均质地基研究意所在。

(2) 地基非均质性对表面竖向位移, 即地基的沉

降影响最大, 这对设计工作具有积极意义。

(3) 相对而言, 岩层埋藏深度对地基土体竖向位移的影响较小。

(4) 获得的解可以退化到这类非均质地基半空间情况。

参考文献:

- [1] R.E.Gibson, D.Sc.(ENG.), M.I.C.E. Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space [J].Geotechnique, 1967,17:58-67.
- [2] Awojobi A O. Vibration of rigid bodies on non-homogeneous semi-infinite elastic media[J].Q JI Mech appl Math, 1973, XXVI, 4:483-498.
- [3] Vardoulakis I, Vrettos Ch. Dispersion law of Rayleigh-type waves in a compressible Gibson half-space[J]. Int J Numer Anal Methods Geomech, 1988,12:639-655
- [4] Vrettos Ch. Dispersive SH-surface waves in soil deposits of an inhomogeneous half-space[J]. Soil Dynamics and Earthq Eng,1990,9 (5): 255-264
- [5] Vrettos Ch. Forced anti-plane vibrations at the surface of an inhomogeneous half-space[J]. Soil Dynamics and Earthq Eng,1991,10(5): 230-235.
- [6] Rajapakse R N D. A vertical load in the interior of a non-homogeneous incompressible elastic half-space[J]. Q JI Mech appl Math, 1990,43(1):1-14.
- [7] Awojobi A O Estimation of the dynamic surface modulus of a generalized Gibson soil from the rocking frequency of rectangular foundations[J]. Geotechnique, 1973,23(1):23-31.
- [8] Awojobi A O. Vertical vibration of a rigid circular foundation on Gibson[J]. Geotechnique, 1972,22(2):333-343.
- [9] Awojobi A O. Torsional vibration of a rigid circular body on a non-homogeneous elastic stratum[J]. Q JI Mech appl Math, 1973,XXVI,2:232-347.
- [10] Doherty J P. Elastic response of circular footings embedded in a non-homogeneous half-space[J].Geotechnique,2003, 53 (8): 703-714.
- [11] Gibson R E, Andrews K R F. Some results concerning displacements in a non-homogeneous elastic layer [J]. J Appl Math Phys (ZAMP), 1971, 22: 855-864.
- [12] W H 拜尔[美]. 标准数学手册 (第 26 版) [M]. 北京:化学工业出版社, 1986.
- [13] 朱照宏,等. 路面力学计算[M]. 北京:人民交通出版社, 1985.
- [14] 王竹溪,郭敦仁. 特殊函数概论[M].北京:科学出版社, 1987.