

大理岩有限变形分岔分析

Bifurcation analyses of finite/large deformation for a marble

徐松林¹, 吴文², 张奇华³, 张华²

(1. 中国科学技术大学力学与机械工程系, 安徽 合肥 230026; 2. 中国科学院武汉岩土力学研究所, 湖北 武汉 430071;
3. 长江科学院, 湖北 武汉 430010)

摘要: 应用有限变形理论的塑性可膨胀本构关系, 对大理岩进行反对称变形分岔分析, 得到分岔的应力公式、特征方程和剪切带存在条件。结合大理岩实验进行分析, 结果表明: 此方法得到的剪切带角度和最小分岔应力在围压较高时与实测结果基本一致, 但低围压时存在差异, 说明其可应用于韧性变形的分析; 此方法可以较好地分析岩石的峰前行为, 但峰后存在差异, 表明大理岩峰后可能存在二次或更高次的后继分岔。

关键词: 有限变形; 分岔分析; 大理岩; 塑性可膨胀本构关系

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2002)01-0042-05

作者简介: 徐松林(1971-), 男, 湖北黄冈人, 1993年毕业于郑州工学院水利及环境工程系水工建筑专业, 中国科学院武汉岩土力学研究所博士, 现为中国科学技术大学在站博士后, 主要从事岩土力学理论、实践, 以及冲击荷载下材料的力学性能研究。

XU Song-lin¹, WU Wen², ZHANG Qi-hua³, ZHANG Hua²

(1. Department of Modern Mechanics, University of Science & Technology of China, Hefei 230026, China; 2. Institute of Rock and Soil Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Wuhan 430071, China; 3. Yangtze River Scientific Research Institute, Wuhan 430010, China)

Abstract: The plastic dilatable constitutive relationship of finite/large deformation theory is used in present paper to analyze anti-symmetric deformation of a marble. The stress formula, the eigenvalue equation and the condition that shear bands generate are obtained. In analyses of bifurcation behavior of a marble, it could be concluded that: (1) Under high confining pressures, angles of shear bands and the minimum critical stress of bifurcation are consistent well with those in experiments, while there are evident differences under low confining pressures, which shows the method is suitable for ductile material; (2) The method describes well the behaviors of marble before peak, but not after peak, which shows there probably are recursive bifurcations, such as secondary bifurcation, etc.

Key words: finite/large deformation; bifurcation analyses; marble; plastic dilatable constitutive relationship

1 前言*

岩石常规三轴压缩试验^[1,2]和扫描电镜观察^[3]表明, 试件产生宏观剪切带破裂, 是个发展的过程, 即先是局部的反对称变形, 当反对称变形发展到一定阶段, 在变形梯度大的部位产生剪切带, 剪切带贯穿后就产生宏观剪破坏。Hill 和 Hutchinson^[4], Rudinicki 和 Rice^[5], Young^[6]等基于平面应变状态的有限变形理论对这种剪切带采用一种局部化方法分析。此方法可导出一个简洁的四阶多项式判别方程, 确定产生这种局部化变形的临界应力状态, 但不能提供分岔时剪切带的速率扰动的局部分布形状。尹光志等^[7]、刘夕才^[8]分别应用平面弹塑性非关联流动理论和有限变形理论进行了类似研究。Chau^[9,10]等做了更深入的工作。为更好地解释此现象, 弄清剪切带形成全过程, 本文应用反对称条件下有限变形分岔分析来研究与此相关的剪切带等分岔现象。

2 岩石轴对称试件有限变形反对称分析

2.1 本构关系、几何关系与平衡方程

李国琛等^[11]避开 Drucker 公设及其相应凸性和正

交法则提出的塑性可膨胀本构关系为:

$$\sigma_{ij}^{\nabla} = L^{ijkl} D_{kl} = \frac{E}{(1+\mu)} \left[\frac{1}{2} (g^{ik} g^{jl} + g^{il} g^{jk}) + g^{ij} g^{kl} \times \frac{\mu - E/3E_{tm}^{(p)}}{1 - 2\mu + E/E_{tm}^{(p)}} - \frac{3}{2\sigma_e^2 E_{te}^{(p)}} \frac{S^{ij} S^{kl}}{2(1+\mu)/3 + E/E_{te}^{(p)}} \right] D_{kl} \quad (1)$$

式中 ∇ 表示 Jaumann 率; E , μ 为切线模量和泊松比; $E_{tm}^{(p)}$ 为塑性切线体积模量; $E_{te}^{(p)}$ 为等效塑性切线模量; σ_e 为等效应力; S^{ij} 为偏应力; g^{ij} 为基矢。

当 $E/E_{tm}^{(p)} \rightarrow 0$, 即材料不可压缩时, 此本构关系退化为 Prandtl-Reuss 理论。

柱坐标下反对称几何关系为^[10]:

$$\left. \begin{aligned} D_z &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, D_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}, D_\theta = \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\ D_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} \right] \\ D_{\theta z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right], D_{rz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中, v_i ($i = z, r, \theta$) 为变形速率。

Cauchy 应力的 Jaumann 率与物质率关系:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ij} W_{pj} - \sigma_{ji} W_{pi} \quad (3)$$

式中 W_{pj} 为应变梯度的反对称分量。

轴对称名义应力和 Cauchy 应力关系为

$$\dot{t} = \dot{\sigma} + \sigma \text{tr}(D) - L \cdot \sigma, L^T = \nabla v \quad (4)$$

对半径为 a , 长为 L 的圆柱体试件(标准试件 $2a = 5 \text{ cm}$, $L = 10 \text{ cm}$), 其边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } Z=0 \text{ 或 } Z=L \text{ 时, } v_z^* = 0, t_{zr}^* = 0, t_{z0}^* = 0 \\ \text{当 } r=a \text{ 时, } t_{rr}^* = 0, t_{rz}^* = 0, t_{r0}^* = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中, * 对应材料发生分岔的时刻, 一般的轴对称问题, $t_{z0}^* = t_{r0}^* = 0$ 。发生分岔时, 不成立。

以 Cauchy 应力率表示的 $\dot{t}$ 的平衡方程为:

$$\nabla \cdot \dot{t} = 0 \quad (6)$$

轴对称问题: $\dot{\sigma}_{r0}^* = \dot{\sigma}_{z0}^* = 0$, $\dot{\sigma}^*$ 与 θ 无关, 但发生分岔时不成立。

2.2 求解

Hutchinson 和 Miles^[12] 采用一种位移流函数来求解不可压缩材料, 而可压缩材料中此流函数不存在。Hu^[13] Pan 和 Chou^[14] 引进的位移势函数 ϕ 和 Φ 可求解式(1)类本构关系, 有

$$v_r = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (7)$$

相应 v_z 的表达式为

$$v_z = b_1 \nabla_1 \phi + b_2 (\partial^2 \phi / \partial z^2) \quad (8)$$

式中, $b_1 = - \left| \frac{2A+B-CS^{22}S^{22}}{B-CS^{11}S^{22}+A(1-S)} \right|$, $b_2 = - \left| \frac{A(1+S)}{B-CS^{11}S^{22}+A(1-S)} \right|$, $\nabla_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left| r \frac{\partial}{\partial r} \right| + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, $A = \frac{E}{2(1+\mu)}$, $B = \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{\mu - E/3E_{lm}^{(p)}}{1-2\mu + E/E_{lm}^{(p)}}$, $C = \frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{3}{2\sigma_c} \cdot \frac{E}{E_{te}^{(p)}} \cdot \frac{1}{2(1+\mu)/3 + E/E_{te}^{(p)}}$, $S = (\sigma_z - \sigma_r)/2A$ 。

把位移势函数 ϕ 和 Φ 代入式(6)中, 并引入变量 v_1^2 和 v_2^2 , 使满足

$$v_1^2 + v_2^2 = -a_2/a_1, v_1^2 v_2^2 = a_3/a_1 \quad (9)$$

$$\left| \begin{aligned} \nabla_1 - v_1^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \nabla_1 + v_3^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \right| \phi = 0 \quad (10)$$

式中, v_1 和 v_2 为方程 $a_1 v^4 + a_2 v^2 + a_3 = 0$ 的解, $a_1 = A(1-S)(2A+B-CS^{22}S^{22})$, $a_2 = (2A+B-CS^{22}S^{22})(4A+2B-CS^{11}S^{11}-CS^{11}S^{22})-A(1+S)(2A+CS^{22}S^{22}-CS^{11}S^{11})$, $a_3 = A(1-S)(2A+B-CS^{11}S^{11})$, 且

$$v_3 = (1+S)^{1/2} \quad (11)$$

同时, 得到各应力率分量为:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_r &= \left| (B-CS^{22}S^{22}) + (B-CS^{22}S^{11})b_1 \right| \nabla_1 + (B-CS^{22}S^{11})b_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} + 2A \left| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right| \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right| \right| \\ \dot{\sigma}_\theta &= \left| (2A+B-CS^{33}S^{33}) + (B-CS^{33}S^{11})b_1 \right| \nabla_1 + (B-CS^{33}S^{11})b_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} - 2A \left| \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right| \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right| \right| \\ \dot{\sigma}_z &= \left| (B-CS^{11}S^{22}) + (2A+B-CS^{11}S^{11})b_1 \right| \nabla_1 + (B-CS^{11}S^{22})b_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left| \frac{\partial \phi}{\partial z} \right| \\ \dot{\sigma}_r &= \left| A(1-S)b_1 \frac{\partial}{\partial r} \nabla_1 + [A(1+S) + A(1-S)b_2] \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right| \phi + A(1+S) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} \\ \dot{\sigma}_\theta &= \left| A(1-S)b_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla_1 + [A(1+S) + A(1-S)b_2] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right| \phi - A(1+S) \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z} \\ \dot{\sigma}_\Phi &= 2A \left| \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} \right| + A \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right| \right| \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3 轴对称试件反对称变形分岔模型

3.1 问题的求解

Hill 和 Hutchinson^[4] 对平面应变问题采用流函数 $\phi = v(x_2) \cos(c_1 x_1)$ 求解; 李国琛等^[11] 采用速率扰动函数: $\mathcal{W}_a = \sin(\pi x_a/L) \phi_{\Delta_2}$, $\mathcal{W}_b = \sin(\pi x_b/L) \phi_{\Delta_4}$, 其中 $\phi = 1 + (1-\bar{\omega}) \cos(2\pi x_3/h) - \bar{\omega} \cos(4\pi x_3/h)$, Δ_2, Δ_4 为两个待求广义速率参量, $\bar{\omega}$ 是一个调节变量以获取最低临界值指标; Miles 和 Nuwayhid^[15]、Chau^[9] 采用对称形位移函数 $x(r, z) = X(r) \cos(\eta z)$, 其中 $\eta = k\pi/L$, $k = 1, 2, \dots$ 。这里采用 Chau^[10] 的一种反对称形式:

$$\left. \begin{aligned} \phi &= C_1 \phi_1(r) \sin(\eta z) \cos(n\theta) \\ \phi &= C_2 \phi_2(r) \cos(\eta z) \sin(n\theta) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中 $\eta = m\pi/L$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$; C_1, C_2 为常数。上式无条件满足边界条件式(5)的第一式。

将式(13)代入式(10), 有

$$\left| \begin{aligned} (\nabla_2 + \eta^2 v_1^2)(\nabla_2 + \eta^2 v_2^2) \phi_1 &= 0 \\ (\nabla_2 - \eta^2 v_3^2) \phi_2 &= 0 \end{aligned} \right| \quad (14)$$

式中, $\nabla_2 = \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{n^2}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left| r \frac{d}{dr} \right| - \frac{n^2}{r^2}$ 。式

(14)的一般解 ϕ_1, ϕ_2 为 n 阶 Bessel 函数。

讨论边界条件式(5)的第二式。联立式(4), (5)和(12), 有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{rr} = 0 &\Rightarrow Y_3 \left| \frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right| \right| = 0 \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta} = 0 &\Rightarrow Y_4 \frac{\partial}{\partial r} \nabla_1 + Y_5 \frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2} \left| \phi + Y_6 \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} \right| = 0 \\ \dot{\epsilon}_{r\theta} = 0 &\Rightarrow Y_3 \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial z} \right| + Y_7 \left| \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right| - \\ &Y_8 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中, $Y_1 = (B - CS^{22}S^{33}) + \sigma_r + (B - CS^{22}S^{11} + \sigma_r) b_1$;
 $Y_2 = (B - CS^{22}S^{11} + \sigma_r) b_2$; $Y_3 = (2A - \sigma_r)$; $Y_4 = A(1 - S) b_1$;
 $Y_5 = A(1 - S)(1 + b_2) - \sigma_r$; $Y_6 = A(1 - S) - \sigma_r$; $Y_7 = A - \sigma_r$; $Y_8 = A$ 。

3.2 分岔分析

方程(10)的形式一般有椭圆型、双曲线型和抛物线型三种,分岔解的讨论主要在此三个区域进行^[4,6,9,10]。在椭圆型区域中扩散型分岔的结果产生的是局部化变形,发生在峰值前,不导致材料的直接破坏,其它区域中则不然。因此,分析宏观剪切带形成全过程,主要针对椭圆型区域。此区域按照复根的情况可分为椭圆复子域和椭圆虚子域。这里主要讨论前者。

对方程(14),令 $n=1$, 则

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= A_1 J_1(\eta \zeta) + \bar{A}_1 J_1(\bar{\eta} \bar{\zeta}) \\ \phi_2 &= A_3 I_1(\eta_3 r) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中 A_1 为复系数, A_3 为实系数; J_1 为 1 阶第一类 Bessel 函数, I_1 为 1 阶第一类变型 Bessel 函数; $\zeta = p + iq$, $\bar{\zeta} = p - iq$, $(p, q) \equiv \{(p, q) | p^2 - q^2 = -a_2/2a_1, p^2 + q^2 = (a_3/a_1)^{1/2}\}$ 。

结合方程组(15)和(16)可以进行分岔分析。

4 结果分析与讨论

4.1 本构关系参数确定

本构关系需确定的参数主要是表征塑性软化和塑性体积膨胀的模量 $E_{ic}^{(p)}$ 和 $E_m^{(p)}$, 李国琛等就金属给出了配合细观试验的指导性方法^[11]。本次结合大理岩全过程线,可得到两种模量比 $E/E_{ic}^{(p)}$ 和 $E/E_m^{(p)}$ 与 ϵ^p , ϵ_m^p 关系如图 1(a), (b)。其拟合结果见图 1(c), 此模型能较好地拟合全过程线。根据试验结果,大理岩参数为 $E = 30 \text{ GPa}$, $\mu = 0.23$ 。峰前塑性阶段, $E/E_{ic}^{(p)} = 0 \sim 3$, $E/E_m^{(p)} = 0 \sim 120$, 随等效应力变化。值得指出的是,此模型目前尚无法用于研究脆-延转化过程的分析。

4.2 剪切带分析

关于剪切带的讨论,主要有:

(1) 文献[16] 在 $(\sigma_1 - \sigma_2)$ 主平面内,剪切带法线方向与最大主应力方向的夹角为 α_{12} , 且有 $\tan \alpha_{12} = n/l$

$= \pm \sqrt{-\sigma_2'/\sigma_1'}$ 。式中, n, l 为剪切带法向应力在主应力坐标系中的方向数, σ_1', σ_2' 为主应力偏量。

等围压三轴压缩, $\alpha_{12} = \pm 35.3^\circ$, 与围压无关,即存在两条夹角为 70.6° 的塑性剪切带。剪切带切线方向与最大主应力方向夹角 54.7° 。

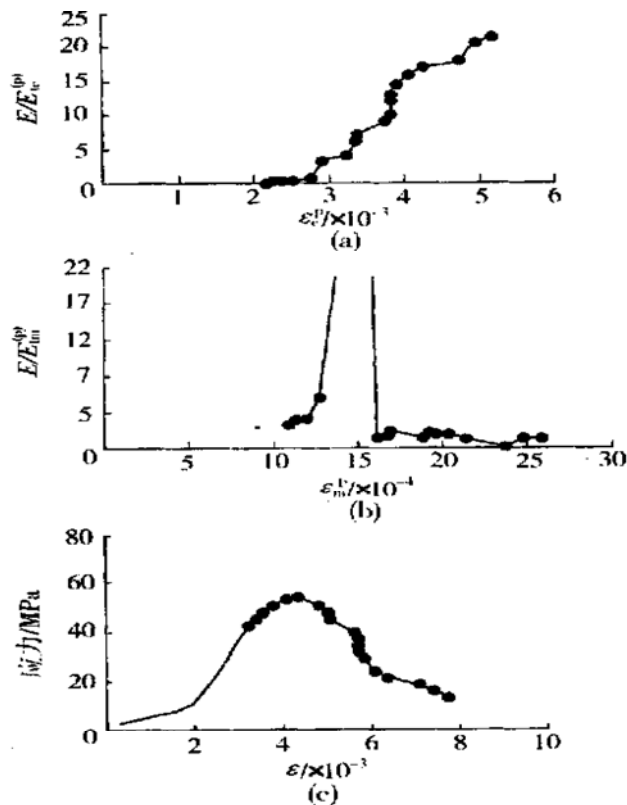


图 1 本构关系参数拟合

Fig. 1 Imitation of parameters of the constitutive relationship

(2) 文献[7] 基于弹塑性非关联流动准则,得到平面应变剪切带与最大主应力夹角 $\alpha = \pi/4 + (\phi + \varphi)/4$ 。式中, ϕ 为岩石摩擦角, φ 为岩石扩容角。

大冶大理岩,摩擦角 ϕ 为 37.6° , 扩容角 φ 约为 15° , 剪切带与最大主应力夹角 α 为 58.2° , 剪切带法线方向与最大主应力方向夹角 31.8° , 两条塑性剪切带夹角 63.6° 。

本文结合分岔分析进行讨论。当材料局部产生剪切带时,带内外有不均匀变形。此时,带内外的应力和位移分量须满足: ①变形连续,也允许有跳跃; ②力的平衡。Hill(1961)和 Rice(1976)^[10] 给出这些条件为:

$$(\nabla v^*)^T = c \cdot g \quad (17a)$$

$$g \cdot t^* = 0 \quad (17b)$$

式中, g 为剪切带的法线方向, c 为速度梯度的跳跃矢量。

将式(1), (2), (3), (4)代入式(17a), 在发生分岔时, $\sigma_r = \sigma_0$, 解上述方程组, 先消去反对称分量 W_x, W_θ, W_ξ , 得到关于各变形率 $D_x, D_r, D_\theta, D_{r\theta}, D_\xi, D_x$ 的表达式。与式(17b)联立, 当发生分岔时, 要求变形率有非

零解,则要求 C_r, C_0, C_z 的系数行列式为零。由此得到

$$(g_r^2 + g_0^2 + v_3^2 g_z^2) \cdot [a_1(g_r^2 + g_0^2)^2 + a_2(g_r^2 + g_0^2)g_z^2 + a_3g_z^4] = 0 \quad (18)$$

由此可见,讨论剪切带的存在,只要讨论 $\sqrt{g_r^2 + g_0^2}/g_z$ 是否有解即可。根据 $\tan \alpha = \tan(\pi/2 - \theta) < L/2a$, 以及在边界处光滑接触的条件,可得到从椭圆区域向抛物型区域过渡的剪切带角度 θ 近似满足 $\tan(\pi/2 - \theta) = \left| \frac{(1+s)(1+B_1-C_1S^{11}S^{11})}{(1-s)(1+B_1-C_1S^{22}S^{22})} \right|^{1/4}$, 其中, $B_1 = \frac{\mu - E/3E_m^{(p)}}{1 - 2\mu + E/E_m^{(p)}}$, $C_1 = \frac{3}{2\sigma_c} \cdot \frac{E}{E_{tc}^{(p)}} \cdot \frac{1}{2(1+\mu)/3 + E/E_{tc}^{(p)}}$, $S = (\sigma_z - \sigma_r)/2A$, S^{11} 和 S^{22} 为偏应力。

上式表明剪切带角度与岩石材料本身性质和围压有关。剪切带角度分析见图2,对比分析结果见图3。由此可见,剪切带角度的计算值与实测值趋势基本一致,但其数值在低围压时比实测值高,高围压时较接近。

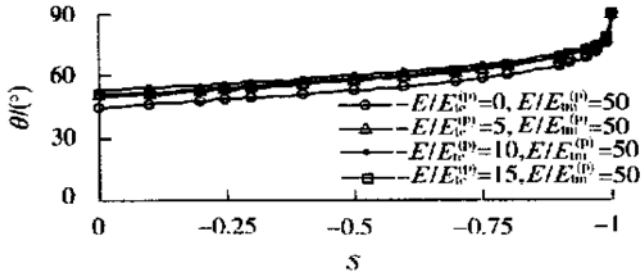


图2 θ 与 S 关系(θ 为剪切带角度, $S = (\sigma_z - \sigma_r)/2A$)

Fig. 2 Relationship between θ and S (where, θ is angle of shear band, $S = (\sigma_z - \sigma_r)/2A$)

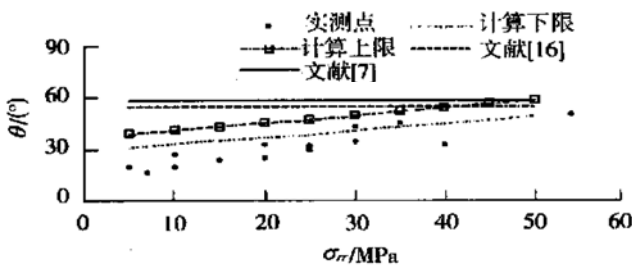


图3 θ 与 σ_r 关系

Fig. 3 Relationship between θ and σ_r

在大理岩三轴压缩试验中,低围压状态下,岩石一般发生小变形,其破坏为剪切和张拉的综合结果;高围压状态,岩石试件相对处于大变形状态,其破坏主要为剪切作用的结果。这也表明,有限变形理论可以较好地进行分析。

4.3 最小分岔应力

对椭圆型区域的复根子域,研究对应不同 v 的最小分岔应力。 $v = \eta a = m\pi a/L$, 固定 v 值,在椭圆型区域搜索对应的 σ_z 。由此可得到:

(1) σ_z 与恒定的参数 $E/E_{tc}^{(p)}$ 、 $E/E_m^{(p)}$ 的关系

图4为 σ_z 与恒定的参数 $E/E_{tc}^{(p)}$ 、 $E/E_m^{(p)}$ 等的关系,图中 $G = E/2(1+\mu)$ 。

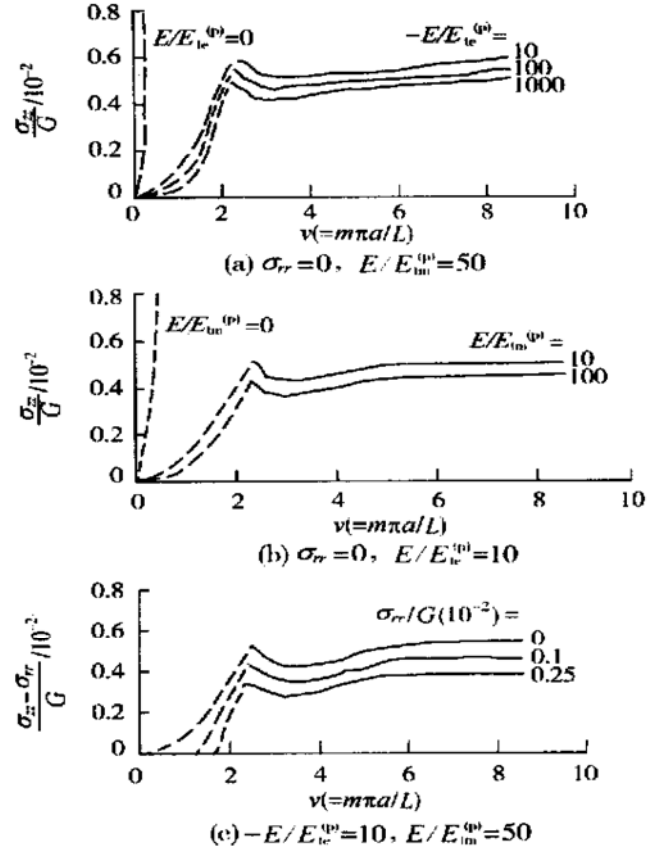


图4 最小分岔应力图

Fig. 4 The minimum bifurcation stress

最小分岔应力随 v 的增加基本呈增加的趋势。当 $E/E_{tc}^{(p)}$ 和 $E/E_m^{(p)}$ 为零或接近零时,最小分岔应力不存在;当 $-E/E_{tc}^{(p)}$ 由 10 增大到 100, 其分岔应力降低,但到 1000 以后变化不大。 $E/E_m^{(p)}$ 由 10 增大到 100 表现出类似的趋势。

图4(c)表明围压作用下,分岔时的最小应力差与 v 的关系,其趋势基本与图4(a, b)相同。但是,当 $\sigma_r/G > 0$ 时, $v < 1$ 几乎不存在分岔。只有当 $v > 1$ 时,才存在最小分岔应力差。

当 v 为 2.0 左右(1.8~2.5)时,试件局部产生局部化变形,即在材料的表面形成曲面。它的形成与发展可直接导致剪切带的形成。另外,此曲面是在峰值前产生,可研究其发展并最终导致材料的宏观剪破裂的机制,从另一个角度也说明了对其进行研究的意义。

(2) σ_z 与参数 $E/E_{tc}^{(p)}$ 、 $E/E_m^{(p)}$ 的关系

在岩石全过程线模拟过程中, $E/E_{tc}^{(p)}$ 、 $E/E_m^{(p)}$ 是变化的参数。所研究的大理岩峰前 $E/E_{tc}^{(p)}$ 范围为 0~3, 峰前 $E/E_m^{(p)}$ 范围为 0~120。由前面的讨论可知,在此变化范围内,最小分岔应力与 v 关系的变化趋势基本一致。采用变化的 $E/E_{tc}^{(p)}$ 、 $E/E_m^{(p)}$ 得到的以上三种曲

线趋势基本类似。峰前最小分岔应力与围压的关系见图 5。由此可见,得到的计算区域波动范围已经不大,而且与实测点^[17,18]比较接近。

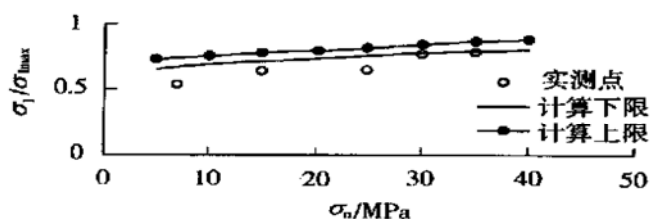


图 5 最小分岔应力与围压关系

Fig. 5 Relationship between the minimum bifurcation stress and the confining pressures

4.4 应力应变全过程

根据以上的思想,可得到大理岩的应力应变全过程曲线,见图 6。由此可见,应用以上方法可以较好地描述大理岩峰前行为。但是,由于其本构关系的参数由单轴压缩全过程来确定,计算的全过程曲线在峰后发生陡降,无法反映大理岩峰后的基于滑动摩擦机制的“平台”,因此,也不能用于岩石三轴压缩过程中脆延转化现象的研究。这也说明,大理岩在峰后可能存在二次,甚至更高次的后继分岔。本文的工作只是初步探讨,要更好地描述这一过程,必须进行深入的工作。在文献[17]中作者从对称性群论的角度对后继分岔进行了探讨,但采用的是另一种方法。

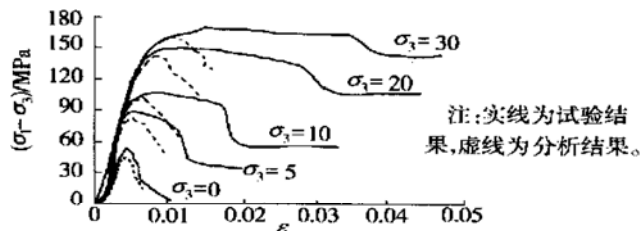


图 6 大冶大理石应力应变全过程曲线(图中围压单位:MPa)

Fig. 6 The complete stress-strain curves of Daye marble

5 结 语

(1) 基于有限变形理论的剪切带角度在较高围压时与实测结果基本一致,而较低围压时,有一定的差距,说明此分析过程可较好地应用于韧性变形的分析。

(2) 一般,当 $v = \eta a = m\pi a/L$ 为 1.8~2.5 时,试件产生局部化变形,此局部化变形可导致剪切带的形成。由此确定的最小分岔应力与实测结果的趋势基本一致,表明此方法是有效的。

(3) 此方法在应用于应力应变全过程的分析过程时,较适合峰前分析,但峰后的分析由于大理岩本身变形破坏机理的复杂性,即可能存在二次或更高次的后继分岔,而结果不甚理想。

参考文献:

- [1] 吴玉山,林卓英. 论岩石应力-应变全过程[A]. 中国青年学者岩土工程力学及其应用讨论会论文集[C]. 北京: 科学出版社, 1994. 41-50.
- [2] 林卓英,吴玉山,等. 岩石在三轴压缩下脆-延性转化的研究[J]. 岩土力学, 1992, 13(2, 3): 45-53.
- [3] 王义强,孙丰月,吕古贤. 韧性剪切带向剪切破裂的转化与成岩成矿作用[J]. 地质力学学报, 1991, 3(1): 38-44.
- [4] Hill R, Hutchinson J W. Bifurcation phenomena in the plane tension test [J]. J Mech Phys Solids, 1975, 23: 239-264.
- [5] Rudinicki J W, Rice J R. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials[J]. J Mech Phys Solids, 1975, 23: 371-394.
- [6] Young N J B. Bifurcation phenomena in the plane compression test[J]. J Mech Phys Solids, 1976, 24: 77-91.
- [7] 尹光志,鲜学福,王宏图. 岩石在平面应变条件下剪切带的分叉分析[J]. 煤炭学报, 1999, 24(4): 364-367.
- [8] 刘夕才. 岩土变形局部化的分叉分析[A]. 谢和平. 非线性力学理论和实践[C]. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1997. 113-121.
- [9] Chau K T. Non-normality and bifurcation in a compressible pressure-sensitive circular cylinder under axisymmetric tension and compression[J]. Int J Solids Structures, 1992, 29(7): 801-824.
- [10] Chau K T. Anti-symmetric bifurcation in a compressible pressure-sensitive circular cylinder under axisymmetric tension and compression[J]. Transactions of the ASME, J Appl Mech, 1993, 60: 282-289.
- [11] 李国琛,耶纳 M. 塑性大应变微结构力学[M]. 北京: 科学出版社, 1993. 165-282.
- [12] Hutchinson J W, Miles J P. Bifurcation analysis of the onset of necking in an elastic/plastic cylinder under uniaxial tension[J]. J Mech Phys Solids, 1974, 22: 61-71.
- [13] Hu H C. On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body[J]. Acta Scientia Sinica. 1954, 2: 145-151.
- [14] Pan Y C, Chou T W. Point force solution for an infinite transversely isotropic solid[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1976, 43: 608-612.
- [15] Miles J P, Nuwayhid U A. Bifurcation in compressible elastic/plastic cylinders under uniaxial tension [J]. Appl Sci Res, 1985, 42: 33-54.
- [16] 方 漪. 金属塑性变形的主剪切带分析[J]. 中国科学(E 辑), 1999, 29(1): 16-20.
- [17] 徐松林,吴 文,李 廷,等. 三轴压缩大理岩局部化变形的试验研究及其分岔行为[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(3): 296-301.
- [18] 徐松林. 岩石(大理岩)应力应变全过程和应变梯度的研究及其分岔理论分析[D]. 武汉: 中国科学院武汉岩土力学研究所, 2000.