

有限层法求解三维比奥固结问题

Finite layer analysis of three dimensional Biot consolidation

宰金珉¹, 梅国雄²

(1. 南京建筑工程学院, 江苏 南京 210009; 2. 河海大学 岩土工程研究所, 江苏 南京 210098)

摘要: 提出了层状横向各向同性地基土比奥固结问题的有限层计算方法, 并编制了相应的计算程序, 计算结果同理论解一致, 证实了方法的有效性。

关键词: 有限层法; 比奥固结; 层状横向各向同性

中图分类号: TU 433

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2002)01-0031-03

作者简介: 宰金珉(1945-), 男, 江苏南京人, 博士, 现任南京建筑工程学院院长, 教授, 重庆建筑大学岩土工程专业博导, 江苏省土建学会地基基础专业委员会副主任委员, 《岩土工程学报》编委。长期从事岩土工程的教学与科研工作。

ZAI Jin-min¹, MEI Guo-xiong²

(1. Nanjing Architectural and Civil Engineering Institute, Nanjing 210009, China; 2. Geotechnical Engineering Institute, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: Finite layer method of Biot consolidation of layered transversely isotropic soil is presented and programmed. The agreement of numerical and theoretical results shows the efficiency of the method.

Key words: finite layer method; Biot consolidation; layered transverse isotropic

1 前言*

比奥(Biot)固结理论^[1]从提出到现在, 已经有近60年的历史了, 但比奥固结问题的解析解仍相当有限。随着有限元等数值方法的发展和计算机性能的提高, 比奥固结问题的数值解有了一定发展, 但由于受计算机容量和机时的限制, 目前的比奥固结问题, 大部分仍局限于二维问题或轴对称问题, 三维比奥固结问题尚不完善。

国外, Booker & Small 等结合双傅立叶变换和有限层方法, 对线弹性的地基土比奥固结问题作了系统的研究^[2,3]。但由于数学方法较为复杂, 他们的研究未引起大家的注意。本文在宰金珉提出的独特的有限层方法基础上^[4], 进一步研究了横向各向同性地基土的比奥固结问题。

2 横向各向同性比奥固结问题的有限层格式的建立

2.1 层状横向各向同性弹性半空间模型

地基土往往成层沉积而成, 呈层状分布, 在各层内土的性质比较均匀, 而各层之间差别较大。此外, 由于扁平颗粒在沉积过程中的取向多取扁平面为水平方向的关系, 土体在水平方向和竖直方向的性质(变形模量、泊松比和剪切模量等)存在差异, 呈现各向异性的现象, 例如水平向模量通常大于竖向模量, 而在水平面内却往往是各向同性的, 构成以水平面为同性面的所谓横向各向同性弹性体, 其弹性矩阵为^[5]

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & d_1 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ d_3 & d_3 & d_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 \end{bmatrix}$$

式中 $d_1 = \lambda(1 - n\mu_2^2)$; $d_2 = \lambda(\mu_1 + n\mu_2^2)$; $d_3 = \lambda\mu_2$

$(1 + \mu_1)$; $d_4 = \lambda(1 - \mu_1^2)$; $d_5 = \frac{E_1}{2(1 + \mu_1)}$; $d_6 = G_2$; $\lambda =$

$\frac{E_2}{(1 + \mu_1)(1 - \mu_1 - 2n\mu_2^2)}$; $n = \frac{E_1}{E_2}$ 。其中共有下面五个

相互独立的弹性常数, 即: E_1 , μ_1 为 xy 平面(水平面)内的变形模量和泊松比; E_2 , μ_2 为 z 方向(竖向)变形模量和泊松比; G_2 为与 xy 平面垂直的平面内的剪切模量。

2.2 有效应力原理

有效应力原理以总量形式表示为

$$\sigma = \sigma' + mp \quad (1)$$

式中 总应力 $\sigma = [\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}]^T$; 有效应力 $\sigma' = [\sigma'_x \sigma'_y \sigma'_z \tau'_{xy} \tau'_{yz} \tau'_{zx}]^T$; 孔隙水压力 $p = [p \ p \ p \ 0 \ 0 \ 0]^T = mp$, $m = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ 。

2.3 位移和超静水压力的变化模式

考虑到土建工程大部分为竖向荷载而水平荷载较少, 我们根据文献[4]的研究, 采用文献[5]中的B类边界条件可以建立如下位移函数:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^u(z) \cos(k_m x) \sin(k_n y) \\ v(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^v(z) \sin(k_m x) \cos(k_n y) \\ w(x, y, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^w(z) \sin(k_m x) \sin(k_n y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 $k_m = m\pi/a$; $k_n = n\pi/b$ 。

在图 1 所示的有限层元中, 上下两节面编号记为 i 和 j , 层厚为 c 。当 c 较小时, 可设 f_{mn}^u, f_{mn}^v 和 f_{mn}^w 为线性变化, 即: $f_{mn}^u(z) = a_{1,mn} + a_{2,mn}z, f_{mn}^v(z) = a_{3,mn} + a_{4,mn}z, f_{mn}^w(z) = a_{5,mn} + a_{6,mn}z$ 。

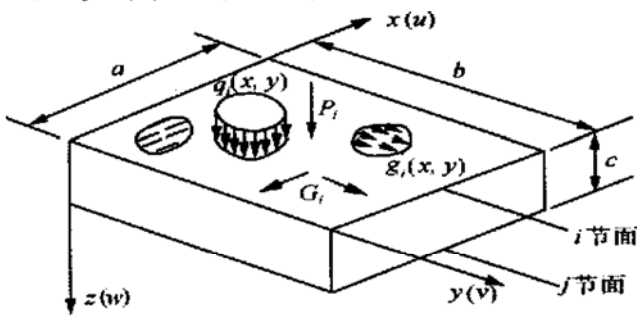


图 1 典型层元

Fig. 1 Typical layer element

取 i, j 节面位移参数 $u_{mn}^i, v_{mn}^i, w_{mn}^i, u_{mn}^j, v_{mn}^j, w_{mn}^j$ 为基本未知数, 有 $u(x, y, 0) = \sum \sum u_{mn}^i \cos(k_m x) \sin(k_n y) = \sum \sum f_{mn}^u(0) \cos(k_m x) \sin(k_n y), u(x, y, c) = \sum \sum u_{mn}^j \cos(k_m x) \sin(k_n y) = \sum \sum f_{mn}^u(c) \cos(k_m x) \sin(k_n y)$ 。且有 $a_{1,mn} = u_{mn}^i, a_{2,mn} = (u_{mn}^j - u_{mn}^i)/c, a_{3,mn} = v_{mn}^i, a_{4,mn} = (v_{mn}^j - v_{mn}^i)/c, a_{5,mn} = w_{mn}^i, a_{6,mn} = (w_{mn}^j - w_{mn}^i)/c$ 。

令 $\bar{z} = z/c, \delta_{mn} = [u_{mn}^i \ v_{mn}^i \ w_{mn}^i \ u_{mn}^j \ v_{mn}^j \ w_{mn}^j]^T, f = [u \ v \ w]^T, r$ 和 s 为计算中所取项数, 则式(2)可表示为

$$f = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s N_{mn} \delta_{mn} \quad (3)$$

$$\text{式中 } N_{mn} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & D & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 & 0 & F \end{bmatrix}, A = (1 - \bar{z}) \cos$$

$(k_m x) \sin(k_n y), B = (1 - \bar{z}) \sin(k_m x) \cos(k_n y), C = (1 - \bar{z}) \sin(k_m x) \sin(k_n y), D = \bar{z} \cos(k_m x) \sin(k_n y), E = \bar{z} \sin(k_m x) \cos(k_n y), F = \bar{z} \sin(k_m x) \sin(k_n y)$ 。

考虑到边界条件, 同时仍取 $f_{mn}^p(z)$ 为线性函数, 则超静水压力的变化模式为

$$p = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s f_{mn}^p(z) \sin(k_m x) \sin(k_n y) \quad (4)$$

$$f_{mn}^p(z) = a_{7,mn} + a_{8,mn}z \quad (5)$$

类似位移模式的推导, 可得

$$p = \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s N'_{mn} \beta_{mn} \quad (6)$$

式中 $N'_{mn} = [(1 - \bar{z}) \sin(k_m x) \sin(k_n y) \ \bar{z} \sin(k_m x) \sin(k_n y)] = \sin(k_m x) \sin(k_n y) [(1 - \bar{z}) \ \bar{z}]$; $\beta_{mn} = [p_{mn}^i \ p_{mn}^j]^T$ 。其中 p_{mn}^i, p_{mn}^j 分别为 i, j 节面超静水压力参数, 且有 $a_{7,mn} = p_{mn}^i, a_{8,mn} = (p_{mn}^j - p_{mn}^i)/c$ 。

2.4 比奥固结方程的有限层格式

采用伽辽金方法、变分方法或加权余量法均可推导比奥固结方程的有限层格式, 易得到比奥固结方程的有限层基本格式为

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_{mn} & K'_{mn} \\ K'_{mn}^T & \bar{K}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{mnt} \\ \beta_{mnt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{mnt} \\ R_{mnt} \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(7)中, F_{mnt} 参见文献[5], 其他各量如下:

$$\bar{K}_{mn} = - \iiint \bar{B} \bar{B}^T dx dy dz \quad (\bar{K}_{mn} \text{ 各元素见文献[5]}) \quad (8)$$

$$K'_{mn} = - \iiint M N' dx dy dz$$

$$= \sum_{m=1}^r \sum_{n=1}^s \frac{ab}{24} \begin{bmatrix} 2k_m c & 2k_n c & 3 & k_m c & k_n c & 3 \\ k_m c & k_n c & 3 & 2k_m c & 2k_n c & 3 \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{mn} &= - \iiint \frac{k_x \Delta t}{\gamma_w} \left| \frac{\partial N'}{\partial x} \right|^T \left| \frac{\partial N'}{\partial x} \right| + \frac{k_y \Delta t}{\gamma_w} \left| \frac{\partial N'}{\partial y} \right|^T \left| \frac{\partial N'}{\partial y} \right| + \\ &\frac{k_z \Delta t}{\gamma_w} \left| \frac{\partial N'}{\partial z} \right|^T \left| \frac{\partial N'}{\partial z} \right| dx dy dz = - \frac{ab \Delta t}{24 \gamma_w} [c(k_x k_n^2 + k_y k_m^2)] \cdot \\ &\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{6k_z}{c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} R_{mnt} &= [R_{mn}^i \ R_{mn}^j]^T = K'_{mn}^T \{ \delta_{mn}^i \ \delta_{mn}^j \}^T \\ &= \frac{ab}{4} \begin{bmatrix} \frac{k_m c u_{mn}^i - \Delta t}{3} + \frac{k_n c v_{mn}^i - \Delta t}{3} + \frac{w_{mn}^i - \Delta t}{2} + \frac{k_m c u_{mn}^j - \Delta t}{6} + \frac{k_n c v_{mn}^j - \Delta t}{6} - \frac{w_{mn}^j - \Delta t}{2} \\ \frac{k_m c u_{mn}^i - \Delta t}{6} + \frac{k_n c v_{mn}^i - \Delta t}{6} + \frac{w_{mn}^i - \Delta t}{2} + \frac{k_m c u_{mn}^j - \Delta t}{3} + \frac{k_n c v_{mn}^j - \Delta t}{3} - \frac{w_{mn}^j - \Delta t}{2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

2.5 计算方程式的变换

计算方程式为

$$\begin{bmatrix} S_1 & & & & & \\ S_2 & S_3 & & & & \\ S_4 & S_5 & S_6 & & & \\ S_7 & S_8 & S_9 & S_{10} & & \\ S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & \\ S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} & S_{20} & S_{21} \\ k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} \\ k_{29} & k_{30} & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{mn}^i \\ v_{mn}^i \\ w_{mn}^i \\ u_{mn}^j \\ v_{mn}^j \\ w_{mn}^j \\ p_{mn}^i \\ p_{mn}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{mnt}^u \\ F_{mnt}^v \\ F_{mnt}^w \\ F_{mnt}^u \\ F_{mnt}^v \\ F_{mnt}^w \\ R_{mnt}^i \\ R_{mnt}^j \end{bmatrix} \quad (12)$$

为了编制程序和减少半带宽, 使得同一点的位移分量和孔压分量依次排序, 以便于形成总体刚度矩阵, 我们

把式(12)相应变换为

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 & S_3 \\ S_4 & S_5 & S_6 \\ k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{28} \\ S_7 & S_8 & S_9 & k_{25} & S_{10} \\ S_{11} & S_{12} & S_{13} & k_{26} & S_{14} & S_{15} \\ S_{16} & S_{17} & S_{18} & k_{27} & S_{19} & S_{20} & S_{21} \\ k_{29} & k_{30} & k_{31} & k_{35} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{mn}^i \\ v_{mn}^i \\ w_{mn}^i \\ p_{mn}^j \\ u_{mn}^j \\ v_{mn}^j \\ w_{mn}^j \\ p_{mn}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{mni}^{tu} \\ F_{mni}^{sv} \\ F_{mni}^{sw} \\ R_{mni}^i \\ F_{mni}^{tu} \\ F_{mni}^{sv} \\ F_{mni}^{sw} \\ R_{mni}^j \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中各系数分别如下: $s_1 = s_{10} = \Delta(d_1 k_m^2/3 + d_5 k_n^2/3 + d_6/c^2)$; $s_2 = s_{14} = 2s_8$; $s_3 = s_{15} = \Delta(d_5 k_m^2/3 + d_1 k_n^2/3 + d_6/c^2)$; $s_4 = -s_{19} = \Delta(d_3 - d_6)k_m/2c$; $s_5 = -s_{20} = \Delta(d_3 - d_6)k_n/2c$; $s_6 = s_{21} = \Delta(d_6 k_m^2/3 + d_6 k_n^2/3 + d_4/c^2)$; $s_7 = \Delta(d_1 k_m^2/6 + d_5 k_n^2/6 - d_6/c^2)$; $s_8 = s_{11} = \Delta(d_2 + d_5)k_m k_n/6$; $s_{12} = \Delta(d_5 k_m^2/6 + d_1 k_n^2/6 - d_6/c^2)$; $s_{16} = -s_9 = -\Delta(d_3 + d_6)k_m/2c$; $s_{18} = \Delta(d_6 k_m^2/6 + d_6 k_n^2/6 - d_4/c^2)$; $s_{17} = -s_{13} = -\Delta(d_3 + d_6)k_n/2c$; $\Delta = abc/4$; $k_{28} = k_{36} = -(\Delta \cdot \Delta t/3 \gamma_w) |k_m^2 k_x + k_n^2 k_y + 3k_z/c^2|$; $k_{22} = \Delta k_m/3 = k_{32} = 2k_{25} = 2k_{29}$; $k_{23} = \Delta k_n/3 = k_{33} = 2k_{26} = 2k_{30}$; $k_{24} = \Delta/2c = k_{31} = -k_{27} = -k_{34}$; $k_{35} = -(\Delta \cdot \Delta t/6 \gamma_w)(k_m^2 k_x + k_n^2 k_y - 6k_z/c^2)$ 。

对于作用在表面上的一竖向集中力, 除 $F_{1, mn}^{sw} =$

$$\begin{cases} P \sin(k_m L/2) \sin(k_n L/2) & (m \text{ 和 } n \text{ 均为奇数}) \\ 0 & (\text{其他情况}) \end{cases} \quad \text{有部分}$$

非零外, 其余分量均为零。

3 计算的实例分析

3.1 计算参数与边界条件

为了同理论结果进行比较, 我们按各向同性进行计算, 其计算参数与边界条件如下: 土体的参数为 $E = 100 \text{ kPa}$, $\mu = 0.3$, $k_x = k_y = k_z = 0.0001 \text{ m/d}$; 计算荷载为作用于 $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ ($n = 1, 2, 3$)、 $2 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ 、 $5 \text{ m} \times 5 \text{ m}$ 、 $10 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ 的瞬时均布荷载 $p = 10 \text{ kPa}$; 应力条件为 B 类边界条件, 排水条件为底面不排水。

3.2 计算结果比较

按本文方法和文献[5]中的理论计算公式(2-54)分别计算的结果如图 2。

由图 2 可见, 有限层计算值和弹性半空间理论解吻合得相当好, 从而证实本文方法正确、程序可靠。本文方法能大量节省计算时间(上述考题所用计算时间仅为 10 s, 共计算 10 个时间步), 且具有前后处理方便、存储量少等优点。

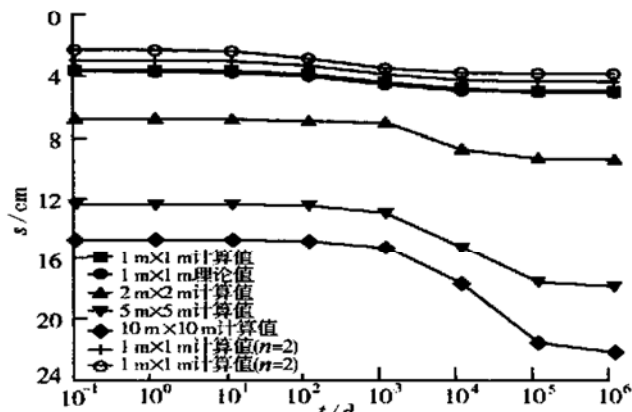


图 2 角点沉降的有限层解和理论解比较

Fig. 2 Comparison between the theoretical settlement and that calculated by finite layer method in the corner

3.3 Mandel- Cryer 效应

当渗透系数较小($k_x = 0.0001 \text{ m/d}$)时, 在计算的初始阶段, 将会出现 Mandel- Cryer 效应, 图 3 为计算中心点地表处孔压与时间的关系。

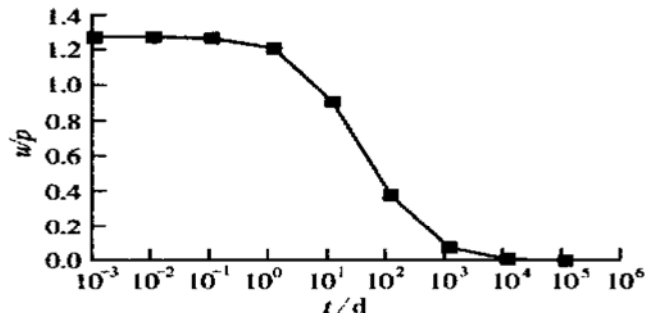


图 3 计算中心点的 Mandel- Cryer 效应

Fig. 3 Mandel- Cryer effect of middle point

4 结 论

(1) 本文计算方法正确, 程序可靠。

(2) 与应用目前比较流行的有限元法相比, 考虑半数值半解析方法, 如有限层方法等也是非常有意义的, 能够节省大量的计算时间。

参考文献:

- [1] Biot M A. General theory of three-dimensional consolidation[J]. J Appl Phys, 1941, 12: 155- 167.
- [2] Booker J R, Small J C. Finite element analysis of primary and secondary consolidation[J]. Int J Structure, 1977, 13: 137- 149.
- [3] Booker J R, Small J C. Finite layer analysis of settlement creep and consolidation using microcomputers[R]. Nagoya: Fifth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, 1985.
- [4] 张问清, 赵锡宏, 宰金珉. 任意力系作用下的层状弹性半空间的有限层分析方法[J]. 岩土工程学报, 1983, 3(2): 27- 42.
- [5] 宰金珉, 宰金璋. 高层建筑基础分析与设计——土与结构物共同作用的理论与应用[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1993.