

论文

微观接触颗粒岩土非线性力学分析模型

A non-linear mechanical model for analysis of granular contact geomaterials

张洪武

(大连理工大学 工程力学系、工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 建立了一个基于细观层次数值分析研究具有内部粘连接触特征的岩土材料非线性力学行为的力学模型, 给出了细观非线性问题分析, 尤其是考虑了粘连接触面的求解技术, 在此基础上给出了加载条件下不同内摩擦系数的宏观介质的非线性力学行为, 研究了两种不同细观颗粒排列介质在剪切性能上的差别。研究成果可以作为材料与其他相关科学研究工作的借鉴。

关键词: 颗粒材料; 粘连本构模型; 接触; 细观分析

中图分类号: O 241; TU 43; TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2002)01-0012-04

作者简介: 张洪武(1964-), 男, 1964年生, 大连人, 教授, 德国汉诺威大学博士学位, 主要从事工程中的数值计算方面的研究工作。

ZHANG Hong-wu

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: This work attempts to establish a mechanical model to compute the non-linear mechanical behaviours of the granular geomaterials in cohesive contact on micro-level by means of the numerical methods. The technique of analysis on the micro-level, particularly to consider the cohesive property on the contact surface is given. The non-linear mechanical behaviours with different coefficients of frictional are presented and the shear resistance are studied for the different micro-structures. The works presented in this paper is a fundamental study for the analysis of the related problems.

Key words: granular material; cohesive constitutive model; contact; analysis on micro-level

1 引言*

基于微细观层次的岩土材料的力学行为的研究已具有了大量的研究成果, 对于考虑弹性接触颗粒构成材料的非线性分析, 文献[1~2]建议了适用于弹性圆盘组合土体的数值分析模型, 所建议的方法考虑了弹性体之间的接触行为, 并利用接触圆盘的形心之间的增量相对位移进行接触力与接触位移的计算; 文献[3]则进一步发展了一种适合粒状材料分析的特殊有限元方法(Distinct Finite Element Method), 由于此方法具有较好的计算效率, 因而在后来由一些研究工作者进行了发展^[4~6], 该方法的特点是通过 Newton 第二定律的显式积分算法进行颗粒的运动计算; Chang 等^[7]进一步采用自洽算法进行问题分析, 方法计及了颗粒体的各种接触状态的计算; Wren 和 Borja^[8]则推导了拟静态条件下非均匀局部不连续颗粒体运动的宏观本构方程。

Chang 从微观颗粒上进行计算分析, 从颗粒间的运动理论分析和数值计算出发, 对土体材料的变形性质和本构理论进行了系统的研究^[9], Herle 与 Dubeus 则在文献[10]中构造了微颗粒岩土材料的亚塑性本构模型以用于微颗粒构造材料的数值分析, Jensen 等利用离散单元技术对颗粒状材料界面特性与颗粒尺寸对材料性能的影响进行了研究^[11], 表明颗粒微界面特性研究对宏观材料特性研究的重要影响。作为最新工

作, Matutis 等基于离散单元技术研究了颗粒体材料的宏观力学性能^[12]。

与以上研究工作不同, 本文工作的特点是在岩土细观力学模型的分析方面将考虑颗粒体的本身的弹性变形行为以及颗粒体之间的粘着一脱离一滑动等的相互作用关系, 与纯接触问题不同, 这种粘着效应考虑了颗粒体之间的原始粘着强度, 这种粘着强度在某种含义下体现了岩土材料的内聚力。

在以下的论述过程中将首先给出细观非线性力学分析的基本方程, 在此基础上进一步对非线性分析的基本方法进行阐述, 方法的原理是基于非线性问题分析的参变量变分原理^[13,14]与参数二次规划算法, 并针对本文的问题对该方法进行了改进, 提出了用于粘连性弹性接触问题分析的参数二次规划算法, 于是宏观介质的力学性能的预测归结为多种荷载路径条件下的粘连接触问题的分析。

2 颗粒体相互作用分析的基本力学模型

考虑细观层次上进行具有粘连接触特性的颗粒体分析, 不失一般性, 问题归结为如图1所示两个弹性接

* 基金项目: 国家基础性发展规划项目; 教育部骨干教师基金资助项目; 国家自然科学基金资助项目(50178016)

收稿日期: 2001-04-25

触体颗粒体 Ω_1 与 Ω_2 的相互作用分析。令接触体的边界 $S^{(0)}$ 分别由力边界 $S_p^{(0)}$ 、位移边界 $S_u^{(0)}$ 与接触边界 $S_c^{(0)}$ 组成, 其中 $\alpha=1, 2$ 表示两个接触体。

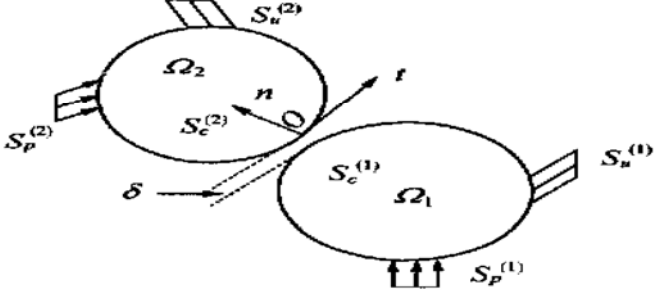


图1 两接触体颗粒

Fig. 1 Two contact bodies

令 $p_c = \{p_t, p_n\}^T$ 表示接触面上的压力, 接触面的局部坐标系用 $t-o-n$ 表示, 则接触状态的三类特征可表示为:

a) 自由状态(两体分离、界面破裂)

$$du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \delta^* > 0, p_n = p_t = 0 \quad (1)$$

b) 粘连状态

$$\left. \begin{aligned} du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \delta^* &= 0, p_n - p_{n0} < 0 \\ |du_t^{(1)} - du_t^{(2)}| &= 0, |p_t| < -\mu p_n + p_{t0} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

c) 滑动状态

$$\left. \begin{aligned} du_n^{(1)} - du_n^{(2)} + \delta^* &= 0, p_n < 0 \\ |du_t^{(1)} - du_t^{(2)}| &> 0, |p_t| = -\mu p_n + \phi_{t0} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 $du_n^{(0)}, du_t^{(0)}, p_t$ 以及 p_n 是接触(面)点切向增量位移、法向增量位移、切向与法向力; p_{t0} 与 p_{n0} 是接触(面)点的切向与法向粘着力, 由于吸附、电磁与化学作用, 这种吸附作用在界面分离后会同样存在 ($\theta=1$), 而 $\theta=0$ 表示这种吸附力在界面分离后消失, 本文侧重研究 $\theta=1$ 的情况; μ 与 δ^* 是滑动摩擦系数与接触面可能存在的间隙值。通过罚函数手段, 接触摩擦本构关系可进一步表示为

$$\left. \begin{aligned} p_n &= 0, & \text{自由状态;} \\ p_n &= -E_n(du_n^{(2)} - du_n^{(1)} - \delta^*), & \\ p_t &= 0, & \text{自由状态;} \\ p_t &= -E_t(du_t^{(2)} - du_t^{(1)}), & \text{粘着状态;} \\ p_t &= -\mu |p_n| \text{sign}(du_t^{(2)} - du_t^{(1)}), & \text{滑动状态} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 E_n 与 E_t 是惩罚因子, 表示非穿透与非相对滑动条件。

作为算法建立, 进一步引入塑性屈服与流动势函数定义:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= p_t + \mu p_n - \phi_{t0} \leq 0 \\ f_2 &= -p_t + \mu p_n - \phi_{t0} \leq 0, f_3 = p_n - \phi_{n0} \leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\text{以及} \quad g_1 = p_t, g_2 = -p_t, g_3 = p_n \quad (6)$$

由此可将增量相对位移表示成

$$du_c^p = (\partial g^T / \partial p) \lambda \quad (7)$$

式中 $g = [g_1, g_2, g_3]^T$, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ 。进一步可求得问题的互补本构方程

$$\left. \begin{aligned} f_k^0 + W_k du_c - M_k \lambda_k + v_k &= 0 \\ \lambda_k v_k &= 0, \lambda_k, v_k \geq 0, k = 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中 v_k 是松弛变量, f_k^0 是屈服函数的初始值, 而 W_k 与 M_k 由下面式子给出: $W_k = (\partial f / \partial \sigma) D^e$, $M_k = (\partial f / \partial \sigma)$

$$D^e \frac{\partial g}{\partial \sigma}, D^e = \begin{bmatrix} E_t & 0 \\ 0 & E_n \end{bmatrix}.$$

基于弹塑性分析的参变量变分原理问题的变分泛函(虚位移原理)可以表示为

$$\begin{aligned} \delta \pi = & \int_V \sigma_{ij} \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} dV - \int_V b_i \delta u_i dV - \int_{S_p} \bar{f}_i \delta u_i dS + \\ & \int_{S_c} p_c^e \delta \epsilon_{ci} dS - \int_{S_c} \lambda \phi_{ci} \delta \epsilon_{ci} dS \end{aligned} \quad (9)$$

自然 $\delta \epsilon_{ci}$ 为满足位移边界与协调方程可能的虚位移场。应当注意的是, 式(9)应受控于接触约束条件式(8)。限于篇幅, 证明从略。

3 颗粒体相互作用有限元分析列式

细观结构区域被分为 N_e 个常规单元, N_c 个接触单元, 常规单元的体积与表面由 V_e 与 S_e^c 表示。如果 nc_e 被用于表示接触单元中的接触屈服面数, 则总系

统的屈服面数 $m_c = \sum_{e=1}^{N_e} nc_e$ 。又令 N 表示插值形函数, 则问题的求解可以归纳为

$$\min. \frac{1}{2} du^T K du - du^T (G \lambda + dt) \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{s.t. } Cdu - U\lambda - d + v &= 0 \\ v^T \lambda &= 0; v, \lambda \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } K &= \sum_{e=1}^{N_e} K_e + \sum_{e=1}^{N_c} K_e^c, K_e = \int_{V_e} B^T DB dV, K_e^c = \\ & \int_{S_e^c} N_c^T D_c N_c dS, dt = dt_r - t_0, dt_r = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} N^T db dV + \\ & \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V_e} N^T d\bar{f} dV, t_0 = \sum_{e=1}^{N_c} K_e^c \delta^*, G = \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_e^c} N_c^T R^T dS, C \\ &= \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_e^c} W N_e dS, U = \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_e^c} M dS, d = d_0 + d_\delta, d_0 = - \\ & \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_e^c} f_0 dS, d_\delta = - \sum_{e=1}^{N_c} \int_{S_e^c} W dS \delta^*, W_k = (\partial f_k / \partial p_c)^T D_c, \\ & M_k = (\partial f_k / \partial p_c)^T D_c (\partial g_k / \partial p_c), R_{kl} = (\partial g_l / \partial p_{ci}) D_{cik}, D_{c11} \\ &= \epsilon_c, D_{c22} = \epsilon_n, D_{c12} = D_{c21} = 0. \end{aligned}$$

式(10), (11) 构成一个数学规划问题, 利用 Kuhn-Tucker 条件, 可以推导获得

$$\begin{cases} v - (U - CK^{-1}G)\lambda = -CK^{-1}dt_r + d_0 - (U - CK^{-1}G)\delta^* \\ v^T \lambda = 0, \quad v, \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

对于接触分析, 式(12)中存在惩罚因子, 故需考虑惩罚因子的消除问题。假设有限元方程中的位移向量被分为接触相对位移与常规位移两部分, 容易验证, 只有接触相对位移相关的部分存在惩罚因子。又设 Nd 表示总位移矢量的自由度数, Ndi 表示非接触相对位移自由度数, Ndo 为接触相对位移自由度数, 则有 $Nd = Ndi + Ndo$ 。不失一般性, Ndi 个自由度排在总位移向量之前, Ndo 相对接触位移排在后面, 则经过组装的结构刚度矩阵可以表示为

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} + \mathfrak{E}^*_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中 $\mathfrak{E} = E_n = E_t$ 为惩罚因子。相应地, 矩阵 C, G, U 进一步依次表示为

$$\begin{cases} C = [0 \quad \mathfrak{E}^*], G = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathfrak{E}^* \end{bmatrix}, U = [\mathfrak{U}^*], \\ dt_r = \begin{bmatrix} dt_{ri} \\ dt_{ro} \end{bmatrix}, dt_0 = \begin{bmatrix} dt_{0i} \\ dt_{0o} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (14)$$

为消除由于惩罚因子存在造成的矩阵的病态, 首先进行矩阵 K 当 $\mathfrak{E} \rightarrow +\infty$ 时的求逆演算, 得

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中

$$V_1 = K_{11}^{-1} + (1/\mathfrak{E})K_{11}^{-1}K_{12}K_{22}^{*-1}K_{21}K_{11}^{-1} + O(1/\mathfrak{E}^2) \quad (16)$$

$$V_2 = -(1/\mathfrak{E})K_{11}^{-1}K_{12}K_{22}^{*-1} + O(1/\mathfrak{E}^2), V_3 = V_2^T \quad (17)$$

$$V_4 = (1/\mathfrak{E})K_{22}^{*-1} - (1/\mathfrak{E}^2)K_{22}^{*-1}(K_{22}K_{22}^{*-1} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12})K_{22}^{*-1} + O(1/\mathfrak{E}^3) \quad (18)$$

由于采用的是相对位移, 因而刚度矩阵 K^* 为单位矩阵, 可以证明, 对接触分析下式成立:

$$U^* = C^* K_{22}^{*-1} G^* \quad (19)$$

将式(14), (15)代入式(12), 经过演算推导, 可以将 $\mathfrak{E}$ 从列式中消除, 忽略高阶小量后获得

$$\begin{cases} v - (C^* K_r G^*)\lambda = -C^* df_r + d_0 - C^* K_r \delta^* \\ v^T \lambda = 0, \quad v, \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (20)$$

其中 $K_r = K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}$, $df_r = dt_{ro} - K_{21}K_{11}^{-1}dt_{ri}$ 。

4 宏观岩土介质的力学性能预测

作为基础性研究工作, 本文对二维理想细观微岩土材料的宏观性能进行研究, 如图2所示。岩土材料

在细观构成上是由大量的微小颗粒体组成, 并假设这些颗粒是可变形的, 因而颗粒体内部也进行网格划分。

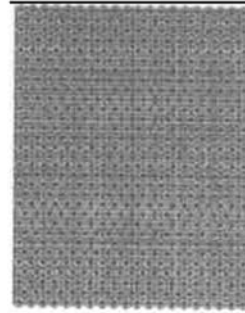


图2 颗粒体细观组成理想岩土材料

Fig. 2 Ideal granular geomaterials on micro-level

作为方法研究, 以下对两种具有代表性的细观颗粒体的力学性能进行分析, 如图3(a), (b)所示。其中微结构体的颗粒半径尺寸均为 $2.0 \mu\text{m}$ 。采取以下材料参数进行问题的数值模拟, 颗粒材料弹性模量 $E = 210 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 粘连接触界面摩擦系数为 0.2 与 0.3 , 粘连强度为 $150.0 \times 10^{-6} \text{ N}$ 。模型的左侧边界采取对称边界。

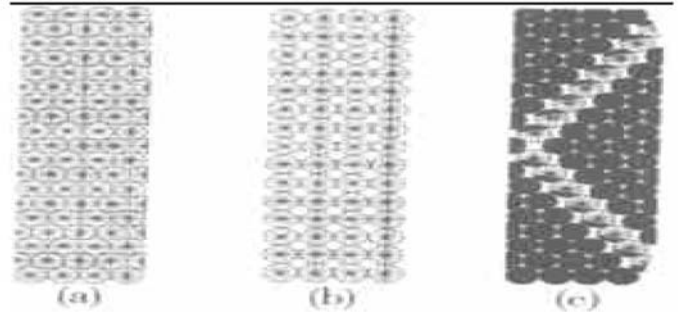


图3 两类理想细观颗粒体岩土结构及其基于细观分析的岩土应变局部化分析变形结果

Fig. 3 Two kinds of micro-structure of ideal granular geomaterials and the deformation obtained by strain localization analysis on the micro-level

作为外力荷载, 图3(a), (b)材料结构分别作用有垂直方向(上、下表面)与水平方向(右侧面)作用的外应力荷载 S_{11} 与 S_{22} 。

首先计算了侧限情况下的两种材料的变形模量, 其计算值分别为 162 GPa 与 101 GPa , 表明颗粒的排列对材料的宏观性能有明显的影。计算结果说明图3(a)介质材料较图3(b)材料弹性刚度要好, 这与传统经验是一致的, 实际上图3(a)介质材料较图3(b)材料的颗粒在细观排列上更为紧密。

对图3(a)材料体通过多次加载获得的材料的初始屈服面形状(在主应力空间下), 如图4所示, 分别给出了不同摩擦系数情况下的计算结果, 表明了摩擦系数对岩土材料宏观特性的影响。计算结果表明, 细观颗粒体之间摩擦系数的降低, 会使宏观材料的初始屈服面收缩, 亦就表明了此时介质在特定状态下更易进入塑性, 这点与传统宏观岩土材料实验所给出的结论是一致的。

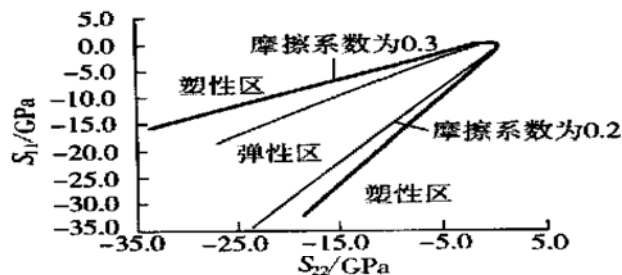


图4 不同摩擦系数获得的初始屈服面形状

Fig. 4 Initial yield surface obtained by different coefficients of friction

作为宏观岩土材料剪切性能的研究,图5进一步给出图3(a), (b)两种结构材料在受剪作用条件下的初始屈服面,可以发现图3(b)结构材料要较图3(a)在剪切性能方面大大降低,图3(a)材料在抵抗受剪切作用的条件下稳定性要较图3(b)材料好得多。

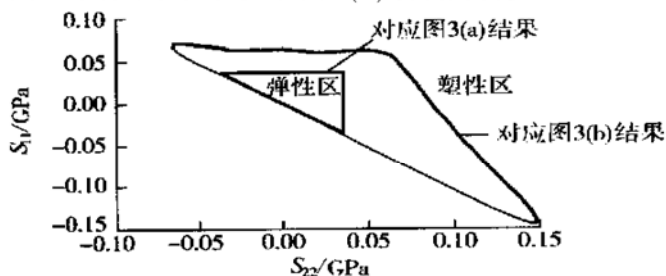


图5 不同细观结构材料在受剪作用条件下初始屈服面

Fig. 5 Initial yield surface obtained by different microstructures under shear force

为体现以上所建立的算法与计算手段的优越性,算例的最后结果中给出了基于细观层次分析的图3(a)所示岩土细观结构一个应变局部化破坏分析结果,如图3(c)所示,结构作用有上下表面的压力荷载。计算结果表明了利用本文所建立模型进行岩土材料破坏与应变局部化分析的可行性。自然,深入的研究亦是必须的,相信这是岩土科学计算学中很有意义与发展前途的研究方向。

5 结 论

本文在细观层次上对粘连接触颗粒岩土材料分析方法进行了研究,并在此基础上对宏观介质的力学性能进行了研究与预测。由于考虑界面的粘着特性,本文依据参变量变分原理建立了问题分析的有限元参数二次规划算法,通过特定的技术对所引入的惩罚因子进行了消除,使求解算法具有较好的数值稳定性与计算精度。通过对理想情况下两种细观结构岩土材料力学性能的计算表明,所提出的计算手段具有良好的应用前景,该研究成果可以在相关问题中(如金属材料、粉尘材料及相关的散体材料等问题)被借鉴和推广。将本文的方法应用于分析工程问题,应进一步考虑诸如颗粒体形状与分布的随机性,更为复杂的相互作用

关系以及电—化学等多场作用因素等,深入的研究工作是有必要的,并且是很有意义和前途的。

参考文献:

- [1] Serano A A, Rodriguez-Ortiz J M. A contribution to the mechanics of heterogeneous granular media[A]. In: Palmer A C, ed. Proc Symposium on the Role of Plasticity in Mechanics[C]. Cambridge: Cambridge Press, 1973.
- [2] Rodriguez-Ortiz J M. Estudio del comportamiento de medios granulares heterogeneos mediante modelos discontinuos analogicos matematicos[D]. Madrid: Universidad Politecnica de Madrid, 1974.
- [3] Cundall P A, Strack O D L. A discrete numerical model for granular assemblies[J]. Geotechnique, 1979, 29: 47– 65.
- [4] Thornton C, Randall C W. Micromechanics of granular materials[A]. Satake M, Jenkins T J, eds. Applications of Theoretical Contact Mechanics to Solid Particle System Simulation[M]. Amsterdam: Elsevier, 1988, 133– 142.
- [5] Walton O R, Braun R L. Stress calculation for assemblies of inelastic spheres in uniform shear[J]. Acta Mechanica, 1986, 63: 73– 86.
- [6] Ng T T. A non-linear numerical model for soil mechanics[J]. Int J Numer Anal Methods Geomech, 1992, 16: 247– 263.
- [7] Chang C S, Chang Y, Kabir M G. Micromechanical modelling for stress-strain behaviour of granular soils, I: Theory[J]. ASCE J Geotech Engng, 1992, 118: 1959– 1974.
- [8] Wren J R, Borja R I. Micromechanics of granular media Part I: Generation of overall constitutive equation for assemblies of circular disks[J]. Comp Methods Appl Mech Engng, 1995, 127: 13– 36.
- [9] Chang C S. Numerical and analytical modeling for granulates[A]. Proc the Ninth Int Conf For Computer Methods and Advances in Geomechanics[C]. Rotterdam, Netherland, 1997. 105– 114.
- [10] Herle I, Dedeus G. Determination of parameters of a hypoplastic constitutive model from properties of grain assemblies[J]. Mech Cohes Frict Mater, 1999, 4: 461– 486.
- [11] Jensen R P, Bosscher P J, Plesha M E, Edil T B. DEM simulation of granular media structure interface: effects of surface roughness and particle shape[J]. Int J Numer Anal Geomechanics, 1999, 23: 531– 547.
- [12] Matutis H G, Luding S, Herrmann H J. Discrete element simulations of dense packing and heaps made of spherical and non-spherical particles[J]. Powder Technology, 2000, 109: 278– 292.
- [13] 钟万勰, 张洪武, 吴成伟. 参变量变分原理及其在工程中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [14] Zhang Hongwu (张洪武), Zhong Wanxie (钟万勰), Gu Yuanxian (顾元宪). A combined parametric quadratic programming and iteration method for 3D elastic-plastic frictional contact problem analysis[J]. Comput Meths Appl Mech, 1998, 155: 307– 324.