

岩土介质的本构失稳与折迭突变模型

Constitutive failure of rock-soil mass and its fold catastrophic model

贺可强, 潘岳

(青岛建筑工程学院 岩土工程研究所, 山东 青岛 266033)

中图分类号: TD 324; TD 824.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2001)04-0506-04

作者简介: 贺可强, 男, 1960 年生。1982 年毕业于河北地质学院工程地质专业, 获学士学位; 1990 年在中国地质大学(北京)获工学硕士学位。现任青岛建筑工程学院土木工程系教授, 岩土工程研究所所长。目前在职攻读中科院地质与地球物理研究所博士学位。主要从事地质工程及岩土工程的教学和科研工作。

1 引言*

突变理论是法国数学家 R. Thom^[1]于 70 年代创立的。突变理论是描述不连续变化现象的一种有效方法。近年来在地学各学科, 利用突变理论来对地压动力现象进行讨论的文献时有出现, 这是可喜的现象。但在此同时, 注意到有些文献的作者在突变理论的认识和应用方面存在误区。由于一些失误是共同的, 有必要予以指正, 这也会对突变理论在地压动力现象中的正确应用起到积极作用。

突变理论中一个状态变量而控制变量数不大于 4 时的突变模型数有 4 个, 它们分别是折迭、尖点、燕尾和蝴蝶突变, 其中尖点突变模型的性态最易被理解因而应用文献也最多。然而, 本质不同的失稳现象应对应不同的突变模型, 本文拟通过压柱本构失稳等例子来说明这一自然法则。

2 岩土介质本构失稳与折迭突变模型

2.1 压杆几何失稳与尖点突变模型

Euler 压杆问题为人们所熟悉, 如图 1 所示。①当 $P < P_{cr} = EI\pi^2/l^2$ 时, 压杆为直线状态稳定。②当 $P \geq P_{cr}$ 时压杆可能保持直线状态, 但不稳定, 稍受外界干扰, 压杆可能左凸也可能右凸, 但这两个状态是稳定的。因此 $P \geq P_{cr}$ 时压杆共有三个平衡状态, 两个稳定, 另一个不稳定。③若图 1(c) 或(d) 中压杆中点作用有向右(或向左)的水平横向力 Q , 当 Q 增大到一定程度时, 压杆会由左凸(右凸)而跳跃式右凸(左凸)。使跳跃的动能由跳跃前杆内贮存的弯曲应变能转变而成。

尖点突变模型总势能的正则形式为^[4]

$$\Pi = \frac{x^4}{4} + \frac{a}{2}x^2 + bx \quad (1)$$

式中 x 为状态变量, a, b 为控制变量, 其平衡曲面 M 的平衡方程为

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (2)$$

M 图形如图 2(a), M 上的奇点集 S 满足

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = 3x^2 + a = 0 \quad (3)$$

由式(2), (3)消去 x 可得分岔集 B 的方程:

$$4a^3 + 27b^2 = 0 \quad (4)$$

B 的图形如图 2(b)。

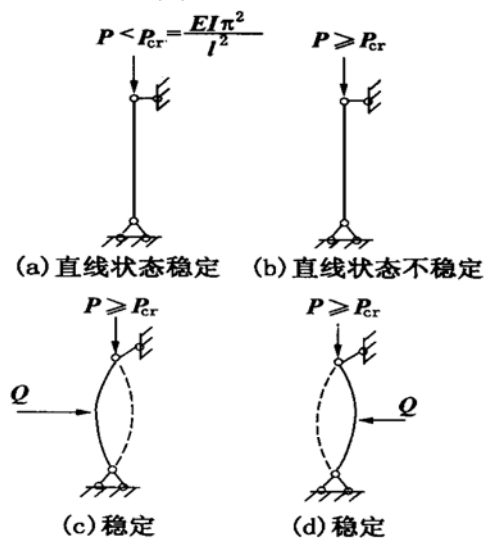


图 1 压杆的几何形状示意图

Fig. 1 The geometrical shape of a compressed rod

从图 2 中 x 对应图 1 中压杆中点的挠度 u (向左为正); $-a, b$ 分别对应图 1 中纵、横力 $P - P_{cr}, Q$ (向左为正)。现比较它们的性状如下:

(1) 当 $b = 0, a > 0$ 时, $Q = 0, P < P_{cr}$, 这时 M 只有一叶, 由式(2)得到一个实数解 $x = 0$ 或 $u = 0$, 它对应 $P < P_{cr}$ 时压杆处于直线状态, 由 $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = 3x^2 + a > 0$, 势函数取极小值, 此时直线状态稳定。

(2) $a < 0$, 即 $P > P_{cr}$ 时, M 分为三叶, 对于 $b = 0$ 或 $Q = 0$ 的情况, 系统平衡位置 x 在中叶(含 $x = 0$ 的一叶)上时, $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} < 0$, 势函数取极大值; 由于在 S

集上 $\partial^2 IV / \partial x^2 = 0$ 平衡位置 x 在上、下叶上时, $\partial^2 IV / \partial x^2 > 0$, 势函数取极小值。故在上、下叶即压杆右凸或左凸时的平衡状态是稳定的。在中叶上, 即压杆可能保持直线平衡状态, 但状态不稳定。

(3) $a < 0$, 平衡位置 x 在 M 的上叶(或 M 的下叶)上, b 正向(或负向)增大到使控制点到达分岔集 B 的右分枝(或左分枝)上时, 平衡位置 x 会跃到 M 下叶(或跃到 M 上叶), 这正对应图 1 中 Q 右向(或左向)增大时, 压杆会由左凸(或右凸)而跳跃式右凸(或左凸)。

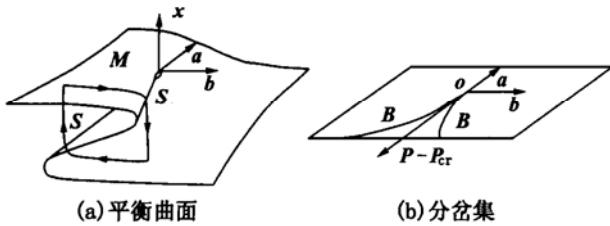


图2 压杆几何失稳的尖点突变模型

Fig. 2 Catastrophic model with cusp point for the failure of a rod

以上分析和对比表明, 尖点突变模型的性态与纵横力作用下的压杆基本性状可以一一相印证。实际上两者之间的所有性状可以全面相印证。由此可得到基本而重要结论: 尖点突变模型描述的是具有三个平衡状态, 其中一个不稳定, 另两个稳定, 并且两个稳定平衡状态在一定条件下可以相互转换、重复的系统行为。

2.2 本构失稳的基本特征

与结构几何失稳问题最多具有三个平衡状态不同, 岩石的压缩、剪切破坏, 低配筋率砼构件的弯曲、扭转破坏, 如同岩体地震只有震前、震后两个状态一样, 它们也只有失稳破裂前和失稳破坏后两个状态。与震后破坏岩体仍具有残余承载力一样, 构件失稳破裂后也具有残余承载力阶段。只不过常常由于脆坏剧烈, 造成处在弹性阶段的加载装置被突然卸载而使加载部位有很高的速度和动量, 加载部位以此速度和动量进一步对处在残余承载力阶段的构件加载, 由于试验中用以测定准静态加载方式的力、位移记录装置的响应频率很慢, 故往往记录不到构件失稳破裂后仍具残余承载力阶段的荷载-位移关系。此外, 据地震学中的概念, 认为地震前兆(即失稳破裂前的)阶段, 岩体系统的平衡状态不稳定, 而震后(失稳破裂后的)阶段, 岩体系统的状态是稳定的。为此, 构件介质失稳破裂后不能再恢复到破裂前的状态, 这与尖点突变平衡曲面上两个稳定平衡状态可以循环往复相异。

另外一个重要区别是: 几何失稳问题中常有明确的参考态, 如压杆问题中有一个 $P = P_{cr}$, $Q = 0$ 时的直线状态为参考态, 来进行计算, 而在本构失稳问题中没有那样的参考态。这就涉及到从哪一点对应的状态

起, 在有小位移的条件下来计算外力功变化和系统内能量变化问题。

至此可作出识别标准, 若突变理论中还存在某个突变模型与本构失稳问题对应的话, 该模型的势函数与平衡曲面所展示的性态与上述各项基本特征之间应能相互印证。

2.3 围岩-矿柱系统的分析模型

矿柱的冲击破坏问题中, 围岩-矿柱系统的行为可以很好地用实验室中的压机-煤、岩压柱系统的行为来模拟。压机始终处于弹性状态, 故压机可用一刚度为 k_m 的弹簧来代替, 这样就可取压机-压柱系统的分析模型如图 3。其中 $F(u)$ 为压机对压柱的作用力, N 为压柱对压机的作用力, 弹簧上端的力 P 为压机油缸内活塞端面上的油压力。 P 为使用在弹簧-压柱系统上的外力。压柱变形时压机也在变形。压柱两端的相对位移为 u 时, 压机位移为 u_m , 力 P 的位移 $u_p = u + u_m$ 。压机、压柱的荷载-位移关系可分别用图 4 (a), (b) 中斜率 $\tan \alpha = k_m$ 的半直线 om 和 $F(u)$ 曲线表示。采用准静态紧凑加载方式, 设油缸进油度为常数, 即 $du_p/dt = C_1 > 0$, C_1 为小常数。这样系统的平衡位置始终处于 $F(u)$ 曲线之上。由前所述, 这时有

$$F(u) = N = k_m u_m = P \quad (5)$$

式中第一个等式 $F(u) - N = 0$ 是压机、压柱之间的作用力反作用力关系, 而整个式(5)是平衡位置位于 $F(u)$ 曲线上时系统参量间的约束条件。

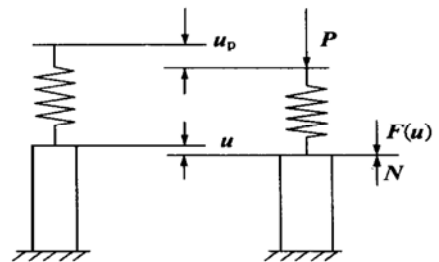


图3 压机-压柱系统的分析模型

Fig. 3 Mechanical model of test machine and rock specimen

2.4 压柱本构失稳的折迭突变模型

根据 Cook^[2] (1965) 判据, 若压机的刚度 k_m 小于压柱 $F(u)$ 曲线软化段拐点 t 处斜率的绝对值, 即 $k_m < -F'(u_1)$ 时, 在峰值承载力处的位移 u_0 与拐点处的位移 u_1 之间有一点 u_j , 当 $F'(u_j) + k_m = 0$ 时, 压柱失稳破裂即发生脆裂。而在 u_0 与 u_j 之间, 压机-压柱系统的平衡位置作准静态变化。因此可以以 u_0 与 u_j 之间的任一点 u 为起点, 来计算压柱再有微位移 du 时的外力功变化和系统内的能量变化。图 4 中 Δoau_m 的面积为压机内贮存的弹性能, 曲边梯形 $\square oau$ 为压柱位移到 u 时已吸收的能量, 若压柱再有位移 du 时要吸收能

量 $F(u)du$, 它是在位移 du 中压柱内弹性能变化与耗散掉的能量之和。由于这时压机的位移 $du_m < 0$, 故压机要释放弹性能 $-Ndu_m$ 。当 $du_m < du$ 时, 有

$$-Ndu_m < F(u)du \quad (6)$$

即压机释放的弹性能小于使压柱位移 du 所提供的能量 $F(u)du$, 故尚需外力做功 Pdu_p 来补充能量, 才能使压柱产生位移。由于是处在准静态区段, 故

$$F(u)du + Ndu_m - Pdu_p = 0 \quad (7)$$

式(7)是以压柱位移至 u 时的状态为参考态建立的, 压柱有微位移 $du (> 0)$ 而系统处于准静态时的能量平衡关系。显然, 式(7)适用于除失稳破裂阶段外的任何阶段, 例如失稳破裂后系统平衡位置作准静态位移的压柱残余承载力阶段。式(7)两端除以 du , 利用式(6), 并考虑到 k_m 是常数, 有 $Ndu_m/du = F(u) \cdot F'(u)/k_m$, 可以从式(7)导得压机-压柱系统的平衡位置作准静态变化时的平衡方程

$$F(u) + \frac{F(u)F'(u)}{k_m} - J = 0 \quad (8)$$

式中已记 $J = P \frac{du_p}{du}$ 。 J 是使压柱产生单位位移所需外界输入的能量, 可称之为能量输入率。若 $J > 0$ 即作准静态移动的力 P 在对系统做正功, 这表明压柱在作准静态位移。当 $J = 0$ 时, 则表明无需外力做功, 仅凭系统内部的能量转移(弹簧释放的弹性能向压柱转移), 压柱的位移便可自动加大, 系统处于临界状态。故可用

$$J = 0 \quad (9)$$

来作为系统失去准静态或压柱失稳破裂的临界条件。

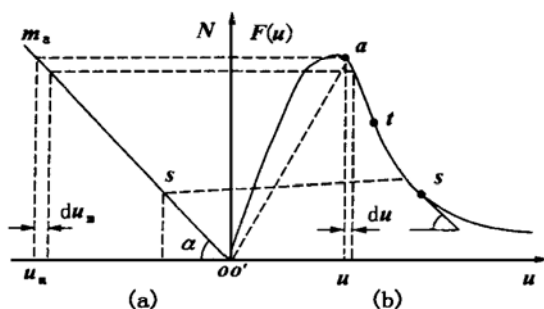


图4 压机、压柱的荷载-位移曲线, $k_m = \tan \alpha$

Fig. 4 Load-displacement relation of test machine and rock specimen

设压柱原长为 L , 横截面积为 A , 压柱介质的本构关系 $\sigma = E\epsilon e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon_0}}$, 其中 E 为弹模, ϵ_0 是介质的抗压强度对应的应变, 则图4(b)中压柱的荷载-位移关系为

$$F(u) = \lambda u e^{-\frac{u}{u_0}} \quad (10)$$

式中 $\lambda = EA/L$, $u_0 = L\epsilon_0$ 。 $F(u)$ 曲线弱化段拐点 t 处的位移 u_1 满足 $F''(u_1) = \frac{\lambda}{u_0}(-2 + \frac{u_1}{u_0})e^{-\frac{u_1}{u_0}} = 0$, 由

此得 $u_1 = 2u_0$ 。弱化段曲线拐点处的斜率越陡压柱越易失稳破裂, 将 $F(u)$, $F'(u)$ 在 u_1 处展开, 代入式(8), 经整理后可得平衡方程的无量纲形式^[3]:

$$2(\frac{u-u_1}{u_1})^2 + (1-K)\frac{u-u_1}{u_1} - (1-K) - \frac{k_m}{u_1^2 e^{-4}} \cdot J + O(\frac{u-u_1}{u_1})^3 = 0 \quad (11)$$

式中已记

$$K = \frac{k_m}{\lambda e^{-2}} = \frac{k_m}{-F'(u)} \quad (12)$$

K 在 1 附近取值, 为压机刚度与弱化段曲线拐点处斜率的绝对值之比, K 是反映压柱失稳破裂程度的重要参数。式(11)中的 $[(u-u_1)/u_1]^2$ 的系数不为零, 在突变理论中它对应折迭突变模型的平衡方程, 故可略去 $[(u-u_1)/u_1]^3$ 以上的项来讨论压机-压柱系统 K, J 在 1, 0 附近变化时的稳定性。式(11)可改写成

$$(\frac{u-u_1}{u_1} + \frac{1-K}{4})^2 - (\frac{1-K}{4})^2 - \frac{1-K}{2} - \frac{K}{2F(u_1)} \cdot J = 0 \quad (13)$$

作变量代换

$$x = \frac{u-u_1}{u_1} + \frac{1-K}{4}, \quad a = -(\frac{1-K}{4})^2 - \frac{1-K}{2} - \frac{K}{2F(u_1)} \cdot J \quad (14)$$

可将式(13)化成折迭突变模型平衡方程的正则形式:

$$x^2 + a = 0 \quad (15)$$

式中 x 是状态变量; a 是控制变量, $a > 0$ 时系统空状态, $a \leq 0$ 时式(15)的图形是个抛物线, 如图5, 因此对同 $-a$ 值有两个 x 与之对应。

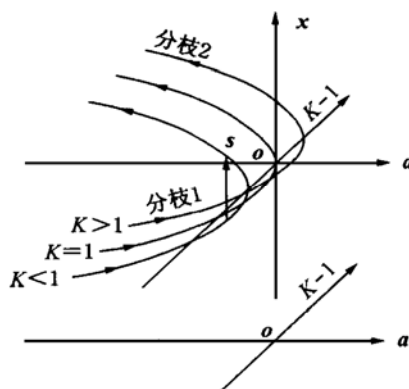


图5 压柱破裂过程折迭突变的平衡曲面

Fig. 5 Fold catastrophic balancing curved surface of damaging process in rock

据式(13), 图5中绘出 $K < 1$, $K = 1$ 和 $K > 1$ 时压机-压柱系统平衡路径汇成的平衡曲面。将图5中 K 轴上($x = 0$) 的点对应的压柱位移记为 u^* , 则由式

(14) 第一式得 $u^* = (1 - \frac{1-K}{4})u_1$ 。因此, 式(14)第一式将 $K=1$ 时的 $F(u)$ 曲线软化段上的拐点映到 K 轴上; 而 $K < 1$ 和 $K > 1$ 时则分别将软化段曲线上方和下方的某一点映到 K 轴上。由式(13)得压机-压杆系统平衡路径分枝1和分枝2的表达式为

$$\frac{u-u_1}{u_1} + \frac{1-K}{4} = x_1$$

$$= - \sqrt{\left(\frac{1-K}{4}\right)^2 + \frac{1-K}{2} + \frac{K}{2F(u_1)}} J \quad (16)$$

$$\frac{u-u_1}{u_1} + \frac{1-K}{4} = x_2$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1-K}{4}\right)^2 + \frac{1-K}{2} + \frac{K}{2F(u_1)}} J \quad (17)$$

从 $F(u)$ 曲线上 u_0 点起, 压柱位移 u 增大时, 系统平衡位置 (a, x) 将沿分枝1右行; 在 u^* 以下某区段压杆位移增大时, 平衡位置 (a, x) 将沿分枝2左行。压机作紧凑压缩加载直到压柱丧失承载力, 因此在图5中 (a, x) 最终必然要到达分枝2的, 若平衡位置 (a, x) 沿分枝1经过 K 轴到达分枝2, 则压柱作延性破裂, 否则平衡位置 (a, x) 将从分枝1突跳到分枝2, 压柱将失稳破裂。

3 结 语

(1) 本质不同的失稳现象对应不同的突变模型。

折迭突变模型最多有两个平衡状态, 一个不稳定, 一个稳定。它可以描述有能量耗散的破坏不可复原的本构失稳问题。尖点突变模型对同一参数最多有三个平衡状态, 一个不稳定另两个稳定。它描述的是两个稳定平衡状态在一定条件下可以相互转换、重复的系统, 例如弹性系统(保守系统)中的几何失稳问题。

(2) 只有正确地写出系统在临界点附近的能量变化和外力功变化的关系式, 才能导出反映失稳问题本质的突变模型。用突变理论对本构破坏问题作描述的文献中出现的失误在于, 为了硬套某一突变模型而没有能正确地选定参考态或计算起点来正确地写出系统的能量变化和外力功变化, 即系统总势能, 结果只能取该模型中的一部分性状(每一个突变模型都具有跳跃性状)来对问题作形式上的描述, 而实际原型中诸多其他重要特征在硬套的突变模型中是无从反映的。

参考文献:

- [1] Thom R. Stabilité Structurelle Morphogenèse [M]. Benjamin: Reading Mass, 1972.
- [2] Cook N G W. The failure of rock [J]. Int J Rock Mech, 1965, 2: 389~403.
- [3] 潘岳. 岩石破裂过程的折迭突变模型 [J]. 岩土工程学报, 1999, 21(3): 299~303.
- [4] 陈应天. 突变理论在力学中应用 [J]. 力学与实践, 1997, 1(3): 23~28.

请订阅《岩土工程学报》

《岩土工程学报》创办于1979年, 是我国水利、土木、力学、建筑、水电、振动等六个全国性学会联合主办的核心期刊。由南京水利科学研究院承办, 国内外公开发行人。主要刊登土力学、岩石力学领域中能代表我国理论和实践水平的论文、报告、实录等。报道新理论、新技术、新仪器、新材料的研究和应用。欢迎国家自然科学基金项目及其他重要项目的研究成果向本刊投稿, 倡导和鼓励有实践经验的作者撰稿, 并优先刊用这些稿件。主要栏目有论文、短文、工程实录、展望21世纪岩土力学、焦点论坛、学术讨论和动态简讯等。

本刊获“国家自然科学基金性、高科技学术期刊经费”资助; 本刊于1992年、1996年、2000年3次被确认为我国核心期刊; 本刊被《中国学术期刊文摘》、《中国科学引文数据库》、《中国科技论文统计与分析数据库》收录; 本刊被美国《工程索引》(Ei) 确认为 Ei Page One 数据库收录期刊; 本刊被 Geotechnical Engineering International Resources Center (GE-IRC) 确认为岩土工程核

心期刊。

凡本刊刊登的文稿均收入相应光盘版及 Internet 网。

本刊读者对象为土木建筑、水利电力、交通运输、矿山冶金、工程地质等领域中的科研人员、设计人员、施工人员、监理人员和大专院校师生。

本刊为双月刊, 大16开本, 双栏排版, 120页左右, 单月30日出版。每期定价10元, 全年60元。漏订或补缺者请向编辑部邮购。

本刊国际标准刊号 ISSN 1000-4548, 国内统一刊号 CN32-1124/TU, 国内发行代号 28-62, 国外发行代号 BM520。

本刊还承办广告业务, 欢迎惠顾。

编辑部地址: 南京虎踞关34号 邮编: 210024

(南京水利科学研究院土工所内)

电话: (025) 3739178-512 传真: (025) 3734321 电挂: 5710

E-mail: ge@njhri.edu.cn

(本刊编辑部)